

· САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
· МОСКВА  
· КРАСНОДАР  
2015





Д. П. ГОЛОСКОКОВ

# КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ  
ПАКЕТА MAPLE

*Издание второе, исправленное*

*ДОПУЩЕНО*

*УМО по образованию в области гидрометеорологии  
в качестве учебного пособия для студентов вузов,  
обучающихся по направлениям  
«Гидрометеорология» и «Прикладная гидрометеорология»*



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
МОСКВА  
КРАСНОДАР  
2015

ББК 22.311

Г 61

**Голоскоков Д. П.**

**Г 61** Курс математической физики с использованием пакета Maple: Учебное пособие. — 2-е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2015. — 576 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

**ISBN 978-5-8114-1854-1**

В учебном пособии рассмотрены классические методы интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, метод интегральных преобразований в конечных и бесконечных пределах, элементы теории интегральных уравнений, а также приближенные методы решения задач математической физики (вариационные методы и метод сеток). Основное внимание уделяется конструктивным методам, с помощью которых можно построить явное решение задачи. Изложение иллюстрируется большим количеством подробно разобранных примеров и задач.

Особенностью учебного курса является широкое использование системы аналитических вычислений Maple при решении учебных задач математической физики. В конце глав приводится значительное количество задач для самостоятельного решения и примеры решения задач в Maple с текстами программ, что делает это учебное пособие пригодным для практических и лабораторных занятий по математической физике.

Учебное пособие может быть рекомендовано студентам, обучающимся по направлениям «Прикладная математика и информатика» и другим физико-математическим и инженерно-техническим направлениям технических университетов.

**ББК 22.311**

**Рецензенты:**

*Ю. Г. ИГНАТЬЕВ* — доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики и математического моделирования Казанского (Приволжского) федерального университета;

*А. В. МАТРОСОВ* — доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Информационные системы» факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета.

**Обложка**  
*Е. А. ВЛАСОВА*

© Издательство «Лань», 2015  
© Д. П. Голоскоков, 2015  
© Издательство «Лань»,  
художественное оформление, 2015

# ПРЕДИСЛОВИЕ

**М**атематическая физика — это математический аппарат изучения физических полей — одного из центральных объектов современной физики. Термин «математическая физика» имеет и более узкий, классический, смысл. Именно под математической физикой часто понимают только такой математический аппарат изучения физических полей, который не связан непосредственно со сравнительно более поздними атомными, статистическими, релятивистскими и квантовыми представлениями. Этот аппарат является основой теоретической гидромеханики, теории теплопроводности, теории упругости, классической части теории электромагнитного поля. Поля, рассматриваемые в этих классических разделах физики, оказывается возможным в том или ином смысле трактовать как механические системы с бесконечным числом степеней свободы, что и обусловило общность соответствующего математического аппарата.

Предлагаемая вниманию читателя книга представляет результат переработки учебника автора [8], вышедшего в 2004 г. под названием «Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple». Переработка затрагивает два направления. Во-первых, за прошедшие 10 лет появились новые версии пакета Maple и, как следствие, новые возможности решения задач математической физики в этом пакете. Во-вторых, изменилась структура книги. Исчезла отдельная глава, посвященная преобразованию Лапласа. Этот материал помещен теперь в главу «Неоднородные задачи математической физики». Появилась новая глава «Численные методы решения задач математической физики»; изменилось содержание и название главы 8 — «Вариационные методы в математической физике».

В технических и физических проблемах основное внимание уделяется средствам и методам практического решения задач. По моему убеждению, должно существовать известное разделение труда между инженерами и физиками, с одной стороны, и математиками — с другой. Аппарат доказательств, если он носит специальный характер, для инженера и физика менее важен, но зато настоятельно требуются знания результатов, полученных с помощью этого аппарата, свойств, специальных функций и свободное владение техникой выкладок и простыми средствами доказательств.

Основное содержание книги, посвященной методам и приемам решения уравнений в частных производных математической физики, дополнено главами

по приближенным методам: численным и вариационным — и главой по интегральным уравнениям. Запас сведений, сообщаемых в предлагаемой книге, автор старался сделать по возможности минимальным. Изложены лишь те факты, которые рассматриваются обычно на лекциях, и необходимые дополнения к ним, касающиеся более углубленного рассмотрения некоторых понятий: они помогут ответить на вопросы и рассеять неясности, которые могут возникнуть у слушателей лекций, и преодолеть неизбежные затруднения.

Книга не является просто записью лекций, поэтому не все, что содержится в ней, целесообразно излагать на лекциях. Так, например, при изложении теории специальных функций можно вполне ограничиться лишь перечислением их основных свойств, опуская в ряде случаев подробные выкладки и доказательства. Некоторые главы могут составить отдельные небольшие курсы по методам математической физики. Это в первую очередь касается глав, посвященных интегральным преобразованиям, интегральным уравнениям и приближенным методам решения задач математической физики (численные и вариационные методы).

Материал в книге автор старался изложить так, чтобы максимально помочь учащемуся овладеть различными математическими методами, сделать их простыми и естественными, научить свободно их применять. С этой целью в учебнике много места отводится разбору решения задач на основе рассмотренных общих методов. Имеется также много задач и упражнений для самостоятельной работы, которые позволяют лучше усвоить изложенный материал, по существу разобраться в его содержании, проконтролировать его понимание, развить математическую культуру мышления, научить применять математический аппарат к решению практических задач. Изложение материала ведется на уровне строгости, принятом в настоящее время в классической математике, излагаемой в технических университетах.

Отметим некоторые особенности построения нашего курса. Он должен, по замыслу автора, служить студентам старших курсов инженерно-физических специальностей технических университетов руководством при изучении тех научных дисциплин, которые в учебных планах значатся как «уравнения математической физики», «методы математической физики» или «математическая физика». Последнее наименование лучше отвечает существу рассматриваемых в книге вопросов.

Как обычно, курс содержит только теорию линейных уравнений в частных производных, почти исключительно второго порядка — уравнений математической физики. Естественным образом основное место в книге занимают наиболее разработанные и важные для приложений три классических типа уравнений: эллиптические, параболические и гиперболические. Дается вывод основных уравнений математической физики; классификация уравнений второго порядка и задач математической физики; дается понятие о корректно поставленной задаче математической физики; доказываемся единственность решения задач математической физики для основных уравнений.

В книге рассматриваются следующие методы решения задач, связанных с уравнениями в частных производных второго порядка: метод Даламбера, метод Фурье с сопутствующей теорией задачи Штурма — Лиувилля (регулярной

и сингулярной), метод интегральных преобразований в конечных и бесконечных пределах.

Кроме того, в учебном пособии излагаются начальные сведения по специальным функциям, элементы теории интегральных уравнений и приближенных методов решения задач математической физики. Эти разделы математики становятся все более необходимы инженеру-исследователю и инженеру-математику, использующим в своей работе методы прикладной математики.

Следует сказать еще об одной особенности книги. В настоящее время специалист по прикладной математике не мыслится без хорошего знания компьютера. Современные вычислительные системы и базирующиеся на них информационные технологии совершенно изменили все стороны человеческого бытия. Пожалуй, в наибольшей степени изменился характер и повысилась производительность умственного труда. Теперь уже невозможно представить себе квалифицированного ученого, инженера, конструктора, не использующего Интернет для получения и обмена самой свежей информацией, программ для автоматизации выполнения и высококачественного оформления проектов. К числу наиболее замечательных программ такого типа можно отнести программу Maple. Этот пакет ныне широко используется для преподавания математики во многих учебных заведениях мира, в том числе и России. Его можно с успехом использовать для преподавания технических дисциплин: теоретической механики, сопротивления материалов, строительной механики и т. п. Для студентов Maple является неоценимым помощником в изучении разнообразных математических методов: освобождая от рутинных математических вычислений, он помогает сосредоточиться на существе изучаемого метода. В конце каждой главы после перечня задач для самостоятельного решения приводятся решения типовых примеров с использованием замечательных возможностей пакета Maple. Учащийся может использовать и другие математические пакеты, например Matlab, MathCad, Mathematica и т. п. Во всех примерах подробно описано составление программ для решения задач, благодаря чему студенты смогут повторить эти программы на других языках программирования.

Трудно перечислить те учебники, монографии, статьи, под влиянием которых сложились методические взгляды автора. Очень важно также влияние собственного опыта научной и преподавательской работы, научного и педагогического опыта коллег и друзей автора. Список литературы, которая наиболее часто использовалась, дан в конце книги. Некоторые монографии и учебники упомянуты в подстрочных замечаниях.

Помимо книг, указанных в списке литературы, автор использовал также материалы лекций, которые ему посчастливилось слушать в Ленинградском политехническом институте (ныне — Санкт-Петербургский политехнический университет) на физико-механическом факультете.

С искренней благодарностью автор вспоминает своего учителя — профессора Николая Николаевича Лебедева, блестящие лекции которого оставили у него неизгладимое впечатление.

# 1

# ВВЕДЕНИЕ

## Г Л А В А

Эта глава носит вспомогательный характер. Здесь кратко напоминаются некоторые понятия математического анализа, приводятся основные дифференциальные операторы и основные интегральные тождества, вводится произвольная криволинейная система координат.

### 1.1. ПРЕДМЕТ И ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Построение и исследование математических моделей физических явлений составляет предмет математической физики. Уместно проследить основные этапы зарождения и развития математической физики [4]. Математическая физика развивалась со времен Ньютона параллельно развитию физики и математики. В конце XVII в. было открыто дифференциальное и интегральное исчисление (И. Ньютон, Г. Лейбниц) и сформулированы основные законы классической механики и закон всемирного тяготения (И. Ньютон). В XVIII в. методы математической физики начали формироваться при изучении колебаний струн и стержней, а также задач, связанных с акустикой и гидродинамикой. В это же время закладываются основы аналитической механики (Ж. Даламбер, Л. Эйлер, Д. Бернулли, Ж. Лагранж, П. Лаплас). В XIX в. идеи математической физики получили новое развитие в связи с задачами теплопроводности, диффузии, упругости, оптики, электродинамики. В этот период создаются теория потенциала и теория устойчивости движения (Ж. Фурье, С. Пуассон, К. Гаусс, О. Коши, М. В. Остроградский, П. Дирихле, Б. Риман, С. В. Ковалевская, Д. Стокс, А Пуанкаре, А. М. Ляпунов, В. А. Стеклов, Д. Гильберт). В XX в. в математическую физику включаются задачи квантовой физики и теории относительности, а также новые проблемы газовой динамики, переноса частиц и физики плазмы.

Многие задачи классической математической физики сводятся к *краевым задачам для дифференциальных (интегродифференциальных) уравнений — уравнений математической физики.*



Основными математическими средствами исследования этих задач служат теория дифференциальных уравнений (включая родственные области — интегральные уравнения и вариационное исчисление), теория функций, функциональный анализ, теория вероятностей, приближенные методы и вычислительная математика.

Изучение математических моделей квантовой физики потребовало привлечения новых областей математики, таких как теория обобщенных функций, теория функций многих комплексных переменных, топологических и алгебраических методов.

С появлением ЭВМ существенно расширился класс математических моделей, допускающих детальный анализ; появилась реальная возможность ставить вычислительный эксперимент.

Среди задач математической физики выделяется важный класс *корректно поставленных задач*, т. е. задач, для которых решение существует, единственно и непрерывно зависит от данных задачи. Хотя эти требования на первый взгляд кажутся совершенно естественными, их тем не менее *необходимо доказывать в рамках принятой математической модели*. Доказательство корректности — это первая апробация математической модели: модель непротиворечива (решение существует), модель однозначно описывает физический процесс (решение единственно), модель малочувствительна к погрешностям измерений физических величин (решение непрерывно зависит от данных задачи).

В современной математической физике большое значение имеет понятие *обобщенного решения*. Обобщенные решения возникают при изучении интегральных соотношений типа локального баланса, и учет этих решений приводит к *обобщенным постановкам краевых задач* математической физики. Точное определение обобщенного решения опирается на понятия *обобщенной производной* и *обобщенной функции*. Аппарат теории обобщенных функций служит удобным средством для исследования линейных краевых задач математической физики, как в обобщенной, так и в классической постановках. Однако эти вопросы выходят за рамки классической высшей математики, изучаемой в технических университетах, и знание только которой мы предполагаем. В случае необходимости мы отсылаем к соответствующим учебникам [4]\*.

## 1.2. ОСНОВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Напомним некоторые понятия и определения анализа. Пусть  $A$  — произвольное множество. Если элемент  $a$  принадлежит множеству  $A$  (содержится во множестве  $A$ ), то это будем записывать так:  $a \in A$ . Если элемент  $a$  не принадлежит множеству  $A$  (не содержится во множестве  $A$ ), то это записывается так  $a \notin A$  или так  $a \in \bar{A}$ . Пусть  $B$  — другое множество. Обозначим  $A \subset B$  *включение*  $A$  в  $B$ ,  $A = B$  — *совпадение*  $A$  с  $B$ ,  $A \cup B$  — *объединение*  $A$  и  $B$ ,  $A \cap B$  — *пересечение*  $A$  и  $B$ ,  $A \setminus B$  (или  $B \setminus A$ ) — *разность* двух множеств (рис. 1.1),  $A \times B$  — *произведение*  $A$  и  $B$  (множество пар  $(a, b)$ ,  $a \in A$ ,  $b \in B$ ),  $\emptyset$  — пустое множество.

---

\* См. также: *Владимиров, В. С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979.

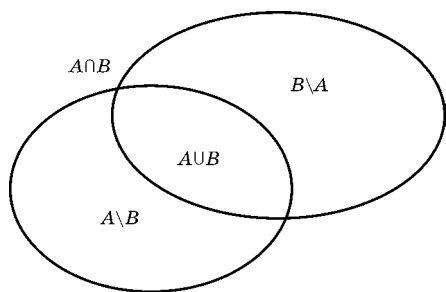


Рис. 1.1  
Операции над множествами

Таким образом, число  $|x - y|$  есть евклидово расстояние между точками  $x$  и  $y$ . Множество точек  $x \in \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющих неравенству  $|x - x_0| < r$ , называется *открытым шаром* радиуса  $r$  с центром в точке  $x_0$ . Этот шар обозначают так  $U(x_0; r)$ . Множество называется *ограниченным* в  $\mathbb{R}^n$ , если существует шар, содержащий это множество. Точка  $x_0$  называется *внутренней* точкой множества, если существует шар с центром в точке  $x_0$ , содержащийся в этом множестве. Множество называется *открытым*, если все его точки внутренние. Множество называется *связным*, если любые две его точки можно соединить кусочно-гладкой кривой, лежащей в этом множестве. Связное открытое множество называется *областью*.

Последовательность точек  $x_k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$  называется сходящейся к точке  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_k \rightarrow x$ ,  $k \rightarrow \infty$ , если  $|x - x_k| \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Точка  $x_0$  называется *предельной точкой* множества  $A$ , если существует последовательность  $x_k$  такая, что  $x_k \in A$ ,  $x_k \neq x_0$ ,  $x_k \rightarrow x_0$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Если к множеству  $A$  добавить все его предельные точки, то полученное множество называется *замыканием* множества  $A$  и обозначается  $\bar{A}$ ; ясно, что  $A \subset \bar{A}$ . Если множество совпадает со своим замыканием, то оно называется *замкнутым*. Замкнутое ограниченное множество называется *компактом*. *Окрестностью* множества  $A$  называется всякое открытое множество, содержащее  $A$ .

Пусть  $G$  — область, т. е. связное открытое множество. Точки замыкания  $\bar{G}$ , не принадлежащие  $G$ , образуют замкнутое множество  $S$ , называемое границей области  $G$ , так что  $S = \bar{G} \setminus G$ . Например, границей открытого шара  $U(x_0; r)$  является сфера  $|x - x_0| = r$ . Эту сферу обозначают  $S(x_0; r)$ .

Множество функций  $f$ , непрерывных в области  $G$  вместе с производными до некоторого порядка  $p$  включительно ( $0 \leq p < \infty$ ), образует *класс*  $C^{(p)}(G)$ . Таким образом, класс  $C^{(0)}(G)$  состоит из всех непрерывных функций в  $G$ ; этот класс часто обозначают просто  $C(G)$ .

В математической физике часто рассматривается величина, которая зависит не только от положения точки  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , т. е. от ее  $n$  (часто  $n = 1, 2, 3$ ) пространственных координат, но и еще от какой-либо переменной, в большинстве случаев от времени  $t$ . Если рассматриваемая величина является числом, то принято говорить, что речь идет о скалярной функции точки; если же рассматриваемая величина — вектор, то говорят о векторной функции точки.

Вместо терминов «числовая функция точки», «вектор-функция точки» употребляются равнозначные: *скалярное поле*, *векторное поле*. Эта терминология

Обозначим  $n$ -мерное вещественное евклидово пространство через  $\mathbb{R}^n$ , а его точки через  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$  — координаты точки  $x$ . Символами  $(x, y)$  и  $|x|$  обозначим *скалярное произведение* и *длину (норму)* в  $\mathbb{R}^n$ :

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n;$$

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

подчеркивает, что значения рассматриваемых функций зависят именно от точек пространства (в которых эти функции определены), а не от их координат, при выборе той или иной системы координат.

Например, плотность заряда в различных точках изолированного наэлектризованного тела представляет собой скалярную функцию точки; электрическое поле, которое создается этими зарядами в различных точках тела, представляет собой векторную функцию точки. Электрические заряды создают скалярное поле плотности и векторное поле электрических сил. Если электрические заряды изменяются в зависимости от времени, то скалярное и векторное поля являются не только функциями координат рассматриваемой точки, но также и функциями времени.

Употребляя эту терминологию, можно сказать, например, что всякое скалярное поле  $u = u(M)$ , определенное и дифференцируемое в некоторой области  $G$ , порождает векторное поле его градиентов:  $\vec{a}(M) = \text{grad}(u)$ .

Напомним основные дифференциальные операторы теории поля — операторы математической физики. Наиболее важные поля характеризуют следующие три функции:

1) градиент — векторная функция, аргументом которой является скалярная функция точки;

2) дивергенция — скалярная функция, аргументом которой является векторная функция точки;

3) вихрь — векторная функция, аргументом которой является векторная функция точки.

*Оператор — градиент* функции  $u$ : дана скалярная функция  $u(x, y, z)$ ; градиентом этой функции называется вектор с координатами  $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial u/\partial z$ :

$$\text{grad}(u) = \vec{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial u}{\partial z}.$$

С этим оператором тесно связан оператор — производная (градиент) по направлению  $\vec{l}$ :

$$[\text{grad}(u)]_{\vec{l}} \equiv \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\vec{l}, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\vec{l}, y) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(\vec{l}, z).$$

Здесь  $\cos(\vec{l}, x), \cos(\vec{l}, y), \cos(\vec{l}, z)$  — направляющие косинусы, т. е. косинусы углов, составляемых направлением  $\vec{l}$  с положительными направлениями координатных осей.

Очевидно,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \vec{l} \cdot \text{grad}(u).$$

*Оператор — дивергенция* векторной функции  $\vec{A}$ : дана векторная функция  $\vec{A}$  точки  $M(x, y, z)$ ; дивергенция вектора  $\vec{A}$  — это скалярная величина:

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Здесь предполагается, что  $\vec{A}(A_x, A_y, A_z) = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z$ .

*Оператор — ротор (или вихрь)* вектора  $\vec{A}$  — это векторная величина

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right).$$

Удобно символическое представление этого вектора в виде определителя третьего порядка\*:

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.$$

**Примечание.**

Дивергенция представима в виде суммы следующих скалярных произведений:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \vec{i} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}.$$

Вихрь представим в виде суммы следующих векторных произведений:

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{i} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + \vec{j} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + \vec{k} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}.$$

*Оператором Лапласа (лапласианом)* называют оператор

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Если применить его к скалярной функции  $u$ , то

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Применим оператор Лапласа к вектору  $\vec{A}$ . Имеем

$$\Delta \vec{A} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2}.$$

Так как  $\vec{A} = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z$ , то для вектора  $\Delta \vec{A}$  получаем следующее выражение:

$$\Delta \vec{A} = \vec{i} \Delta A_x + \vec{j} \Delta A_y + \vec{k} \Delta A_z.$$

*Оператором Гамильтона (символическим вектором набла или набла-оператором)* называют векторный оператор:

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

---

\* Под «произведением» символов  $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$  на скаляр  $\varphi(x, y, z)$  будем понимать соответственно скаляры  $\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y, \partial\varphi/\partial z$ .

Применяя его к скаляру  $u$ , получаем

$$\nabla u = \vec{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial u}{\partial z} = \text{grad}(u).$$

Скалярное произведение векторов  $\nabla$  и  $\vec{A}$  равно

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \text{div } \vec{A}.$$

Векторное произведение векторов  $\nabla$  и  $\vec{A}$  равно

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \text{rot } \vec{A}.$$

Аналогично получаем

$$\Delta u = \nabla^2 u,$$

где скалярный оператор  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$  обозначен через  $\Delta$ , т. е. существует очевидная связь между операторами:  $\text{div}(\text{grad}(u)) = \Delta u$ .

Если от одной системы координат  $Oxyz$  перейти к другой системе координат  $O'x'y'z'$ , то форма основных операторов математической физики не изменится — операторы инвариантны по отношению к повороту и переносу координатных осей.

### 1.3. ОСНОВНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТОЖДЕСТВА

Пусть задана система координат  $Oxyz$  и область  $D$ , ограниченная поверхностью  $S$ , гладкой или кусочно-гладкой. Под кусочно-гладкой поверхностью мы будем понимать поверхность, которая состоит из конечного числа кусков с непрерывно меняющейся на них касательной плоскостью.

Пусть, далее,  $\vec{A}$  — векторная функция точки  $M \in D$ . Предполагается, что эта функция непрерывна вместе со своими первыми производными в любой точке объема  $D$  и его границы  $S$ . Тогда, как известно, справедлива формула Остроградского:

$$\int_D \text{div } \vec{A} d\tau = \int_S A_n d\sigma, \quad (1.1)$$

где  $d\sigma$  — элемент поверхности  $S$ ;  $d\tau$  — элемент объема  $D$ ;  $A_n = \vec{A} \cdot \vec{n}$ ,  $\vec{n}$  — вектор внешней нормали к поверхности  $S$ . Формула (1.1) верна, если  $\vec{A} \in C^{(1)}(\bar{D})$ ,  $\bar{D} = D \cup S$ .

Положим в формуле (1.1)  $\vec{A} = \text{grad}(u)$ , тогда, очевидно,

$$\text{div } \vec{A} = \text{div}(\text{grad}(u)) = \Delta u;$$

с другой стороны,

$$A_n = \vec{A} \cdot \vec{n} = \text{grad}(u) \cdot \vec{n} = \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Таким образом, будем иметь

$$\int_D \Delta u d\tau = \int_S \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma. \quad (1.2)$$

Формула (1.2) верна, если  $u \in C^{(2)}(\bar{D})$ .

Заменим в (1.2) функцию  $u$  на функцию  $u^2/2$ . Имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) &= u \frac{\partial u}{\partial x}; & \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{u^2}{2}\right) &= u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2; \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2}\right) &= u \frac{\partial u}{\partial y}; & \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{u^2}{2}\right) &= u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2; \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u^2}{2}\right) &= u \frac{\partial u}{\partial z}; & \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{u^2}{2}\right) &= u \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2.\end{aligned}$$

Откуда получим

$$\Delta\left(\frac{u^2}{2}\right) = u\Delta u + (\text{grad}(u))^2; \quad \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{u^2}{2}\right) = u \frac{\partial u}{\partial n}$$

и, следовательно, вместо формулы (1.2) будем иметь

$$\int_D [u\Delta u + (\text{grad}(u))^2] d\tau = \int_S u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma. \quad (1.3)$$

Формула (1.3) верна, если  $u \in C^{(2)}(\bar{D})$ .

Рассмотрим теперь плоскость  $Oxy$  и плоскую область  $D$ , ограниченную контуром  $\Gamma$ . В этом случае вместо формул (1.2) и (1.3) будем иметь формулы

$$\begin{aligned}\int_D \Delta u d\sigma &= \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} dl; \\ \int_D [u\Delta u + (\text{grad}(u))^2] d\sigma &= \int_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial n} dl.\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\vec{n}, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\vec{n}, y),\end{aligned}$$

$d\sigma$  — элемент плоской области  $D$ ;  $dl$  — элемент дуги границы  $\Gamma$ .

Приведем еще одну полезную формулу, известную в литературе как формула Грина. Пусть  $S$  — замкнутая поверхность, ограничивающая область  $D$ . Пусть  $u$  и  $v$  — две скалярные функции точки  $M \in D$ . Покажем, что имеет место формула

$$\int_D [u\Delta v - v\Delta u] d\tau = \int_S \left[ u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma. \quad (1.4)$$

Воспользуемся легко проверяемой формулой (читателю рекомендуем проверить эту формулу!), определяющей дивергенцию произведения скалярного поля  $f$  на векторное поле  $\vec{A}$ :

$$\text{div}(f\vec{A}) = \vec{A} \cdot \text{grad}(f) + f \text{div}(\vec{A}).$$

Будем иметь

$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad}(v)) = \operatorname{grad}(v) \cdot \operatorname{grad}(u) + u \operatorname{div}(\operatorname{grad}(v)) = \operatorname{grad}(v) \cdot \operatorname{grad}(u) + u \Delta v.$$

Подставим в формулу (1.1) вместо вектора  $\vec{A}$  вектор  $u \operatorname{grad}(v)$ . Имеем

$$\int_D [u \Delta v + \operatorname{grad}(u) \cdot \operatorname{grad}(v)] d\sigma = \int_S u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma.$$

Меняя роли функций  $u$  и  $v$ , находим

$$\int_D [v \Delta u + \operatorname{grad}(v) \cdot \operatorname{grad}(u)] d\sigma = \int_S v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma.$$

Вычитая последнее выражение из предыдущего, получим формулу (1.4).

Из формулы Остроградского (1.1), кроме перечисленных интегральных тождеств, вытекает важное следствие, которое мы сформулируем в виде леммы [29].

**Лемма.** Пусть  $F$  — непрерывная функция, заданная в некоторой области трехмерного евклидова пространства. Для того чтобы для любой замкнутой поверхности  $S$ , проведенной внутри области задания векторной функции  $\vec{T}$  и ограничивающей область  $\Omega$ , имело место равенство

$$\int_S T_n d\sigma = \int_{\Omega} F d\tau, \quad (1.5)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{div} \vec{T} = F. \quad (1.6)$$

Действительно, применяя формулу (1.1), равенство (1.5) можно привести к виду

$$\int_{\Omega} [\operatorname{div} \vec{T} - F] d\tau = 0.$$

После этого достаточность условия леммы становится очевидной. Установим его необходимость. Будем рассуждать от противного. Допустим, что в некоторой точке, а тем самым в силу непрерывности и в ее окрестности, функция  $\operatorname{div} \vec{T} - F$  отлична от нуля, например положительна. Тогда интеграл, распространенный по малой области  $\omega$  вокруг упомянутой точки, будет отличен от нуля:

$$\int_{\omega} [\operatorname{div} \vec{T} - F] d\tau \neq 0,$$

и равенство (1.5) невозможно. Следовательно, наше предположение противоречит условию. Таким образом, необходимость равенства (1.6) доказана.

Точно так же может быть доказана аналогичная лемма для двумерной области, лежащей на плоскости.

Эта лемма часто используется в математической физике при получении дифференциальных уравнений (представляющих локальную форму законов сохранения) из законов сохранения в интегральной форме.

## 1.4. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

До сих пор, желая задать аналитически скалярное или векторное поле, мы пользовались декартовой системой координат. Так, например, скалярное поле мы задавали с помощью функции трех переменных; этими переменными были абсцисса, ордината и аппликата переменной точки пространства. Прямоугольная, декартова, система координат является широко рассматриваемой. Однако ясно, что задание абсциссы, ординаты и аппликаты точки является не единственным способом определения положения точки в пространстве. При решении ряда физических задач удобнее применять *криволинейную систему координат*.

Пусть дано трехмерное пространство и система декартовых координат  $Oxyz$ . Введем новые независимые переменные  $q^1, q^2, q^3$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= x(q^1, q^2, q^3) \\ y &= y(q^1, q^2, q^3) \\ z &= z(q^1, q^2, q^3) \end{aligned} \right\}.$$

Предположим, что эти функции однозначны, непрерывны и дифференцируемы, причем  $\alpha_i \leq q^i \leq \beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Предположим также, что функциональный определитель М. В. Остроградского\* отличен от нуля (за исключением, быть может, отдельных точек пространства), т. е.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q^1} & \frac{\partial y}{\partial q^1} & \frac{\partial z}{\partial q^1} \\ \frac{\partial x}{\partial q^2} & \frac{\partial y}{\partial q^2} & \frac{\partial z}{\partial q^2} \\ \frac{\partial x}{\partial q^3} & \frac{\partial y}{\partial q^3} & \frac{\partial z}{\partial q^3} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.7)$$

При сформулированных условиях можно утверждать о взаимно однозначном соответствии между переменными  $q^1, q^2, q^3$  и  $x, y, z$ . Таким образом, положение точки в пространстве можно характеризовать переменными  $q^1, q^2, q^3$ . Эти величины называются *криволинейными координатами* точки.

Важной характеристикой любой криволинейной системы координат является ее метрика, т. е. выражение квадрата линейного элемента, определяющего расстояние между двумя бесконечно близкими точками:

---

\* Здесь уместно сделать небольшое историческое отступление. В учебниках, авторы которых не интересуются историей математики, определитель (1.7) ошибочно называется якобианом. Немецкий математик К. Г. Я. Якоби (1804–1851), который жил некоторое время в Петербурге и был знаком с М. В. Остроградским (1801–1862), в письме к своему брату Б. С. Якоби (физик и электротехник) подтверждал, что функциональный определитель (1.7) является частным случаем функционального определителя, впервые введенного М. В. Остроградским. Именно Остроградский первым указал на роль функциональных определителей типа (1.7) при замене переменных в кратных интегралах и при решении дифференциальных уравнений с частными производными. И только советский математик А. Я. Хинчин (1894–1959), опубликовавший свыше 150 работ по математике и ее истории, в своем учебнике «Краткий курс математического анализа» функциональные определители типа (1.7) называет определителями Остроградского.



$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x}{\partial q^i} dq^i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial y}{\partial q^i} dq^i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial z}{\partial q^i} dq^i \right)^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 g_{ik} dq^i dq^k,$$

где

$$g_{ik} = \frac{\partial x}{\partial q^i} \frac{\partial x}{\partial q^k} + \frac{\partial y}{\partial q^i} \frac{\partial y}{\partial q^k} + \frac{\partial z}{\partial q^i} \frac{\partial z}{\partial q^k}, \quad i, k = 1, 2, 3.$$

Система криволинейных координат называется ортогональной, если  $g_{ik} = 0$  при  $i \neq k$ . Для ортогональной системы имеем

$$(dl)^2 = g_{11}(dq^1)^2 + g_{22}(dq^2)^2 + g_{33}(dq^3)^2 = H_1^2(dq^1)^2 + H_2^2(dq^2)^2 + H_3^2(dq^3)^2,$$

где величины  $H_i = \sqrt{g_{ii}}$ ,  $i = 1, 2, 3$  называются коэффициентами Лямэ:

$$H_i^2 = g_{ii} = \left( \frac{\partial x}{\partial q^i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q^i} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q^i} \right)^2.$$

Заметим, что каждая из величин  $H_i$  имеет смысл коэффициента пропорциональности в равенстве, выражающем связь между элементарным приращением  $dl_i$  длины отрезка вдоль  $i$ -й координатной линии и приращением соответствующей криволинейной координаты  $dq^i$ :  $dl_i = H_i dq^i$ .

Приведем для справки аналитические выражения основных операторов математической физики в ортогональных криволинейных координатах:

1) оператор — градиент

$$(\text{grad}(u))_{q^i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial u}{\partial q^i} \quad (i = 1, 2, 3);$$

2) оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q^1} \frac{H_2 H_3}{H_1} \left( \frac{\partial u}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \frac{H_1 H_3}{H_2} \left( \frac{\partial u}{\partial q^2} \right) + \frac{\partial}{\partial q^3} \frac{H_1 H_2}{H_3} \left( \frac{\partial u}{\partial q^3} \right) \right];$$

3) оператор — дивергенция

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q^1} (A_{q_1} H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q^2} (A_{q_2} H_1 H_3) + \frac{\partial}{\partial q^3} (A_{q_3} H_1 H_2) \right];$$

4) оператор — ротор

$$\begin{aligned} \text{rot}_{q_1} \vec{A} &= \frac{1}{H_2 H_3} \left[ \frac{\partial (A_{q_3} H_3)}{\partial q^2} - \frac{\partial (A_{q_2} H_2)}{\partial q^3} \right]; \\ \text{rot}_{q_2} \vec{A} &= \frac{1}{H_1 H_3} \left[ \frac{\partial (A_{q_1} H_1)}{\partial q^3} - \frac{\partial (A_{q_3} H_3)}{\partial q^1} \right]; \\ \text{rot}_{q_3} \vec{A} &= \frac{1}{H_2 H_1} \left[ \frac{\partial (A_{q_2} H_2)}{\partial q^1} - \frac{\partial (A_{q_1} H_1)}{\partial q^2} \right]. \end{aligned}$$

В заключение рассмотрим две важнейшие системы ортогональных криволинейных координат в пространстве. Эти системы будут использованы при изучении уравнений распространения волн и Лапласа.

**Цилиндрические координаты.** Координатные поверхности: круговые цилиндры с осью вращения  $Oz$ , плоскости, перпендикулярные оси  $Oz$ , и полу-плоскости, проходящие через  $Oz$  (рис. 1.2).

Цилиндрические координаты  $r, \varphi, z$  связаны с прямоугольными координатами  $x, y, z$  соотношениями:

$$x = r \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\varphi), \quad z = z.$$

Коэффициенты Лямэ —  $H_r = 1, H_\varphi = r, H_z = 1$ .

Оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

**Сферические координаты.** Координатные поверхности: сферы с центром  $O$  и радиусом  $\rho$ , круговые конусы с вершиной  $O$ , образующие которых составляют с осью вращения  $Oz$  угол  $\vartheta$ , и полу-плоскости, проходящие через  $Oz$  под углом  $\varphi$  к плоскости  $Oxz$  (рис. 1.3).

Сферические координаты  $\rho, \vartheta, \varphi$  связаны с прямоугольными координатами  $x, y, z$  соотношениями

$$x = \rho \sin(\vartheta) \cos(\varphi), \quad y = \rho \sin(\vartheta) \sin(\varphi), \quad z = \rho \cos(\vartheta).$$

Коэффициенты Лямэ —  $H_\rho = 1, H_\vartheta = \rho \sin(\vartheta), H_\varphi = \rho$ .

Оператор Лапласа в сферических координатах имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin(\vartheta) \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

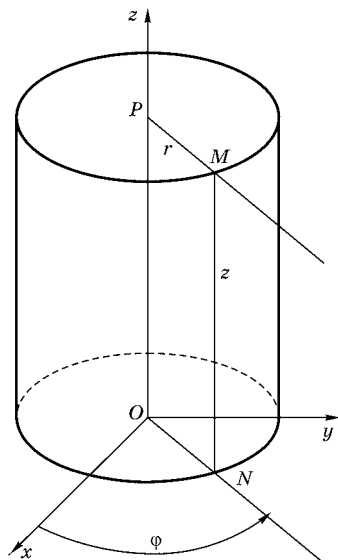


Рис. 1.2  
Цилиндрические координаты

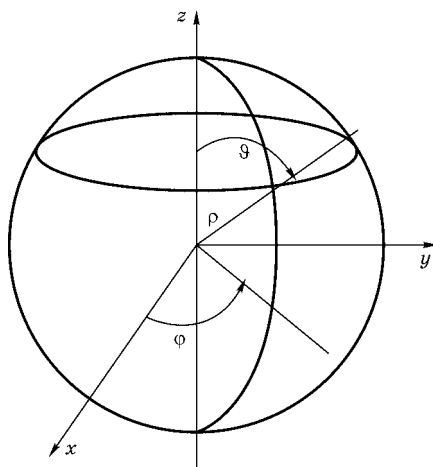


Рис. 1.3  
Сферические координаты

# 2

## УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

### ГЛАВА

Математическое описание физических процессов приводит к дифференциальным и интегральным уравнениям или даже к интегродифференциальным уравнениям. Широкий класс физических процессов описывается линейными дифференциальными уравнениями второго порядка:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = F(x). \quad (2.1)$$

В этой главе мы рассмотрим характерные физические процессы, сводящиеся к различным краевым задачам для дифференциальных уравнений типа (2.1), классификацию таких уравнений и постановки задач математической физики.

### 2.1. УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

Многие задачи механики (колебания струн, стержней, мембран и трехмерных объемов) и физики (электромагнитные колебания) описываются уравнением колебаний следующего вида:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla \cdot (p(x) \nabla u) - q(x)u + F(x, t), \quad (2.2)$$

где неизвестная функция  $u(x, t)$  зависит от  $n$  пространственных координат (обычно  $n = 1, 2, 3$ ) и времени  $t$ ; коэффициенты  $\rho(x)$ ,  $p(x)$  и  $q(x)$  определяются свойствами среды, где происходит колебательный процесс; свободный член  $F(x, t)$  выражает интенсивность внешнего возмущения. В уравнении (2.2) в соответствии с определением операторов дивергенции и градиента:

$$\nabla \cdot (p(x) \nabla u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( p(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

#### УРАВНЕНИЕ МАЛЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

Продемонстрируем вывод уравнения (2.2) на примере малых поперечных колебаний струны. *Струной* называется натянутая нить, не сопротивляющаяся изгибу.

Пусть в плоскости  $(x, u)$  струна совершает малые поперечные колебания около своего положения равновесия, совпадающего с осью  $x$ . Величину отклонения струны от положения равновесия в точке  $x$  в момент времени  $t$  обозначим через  $u(x, t)$ , так что  $u = u(x, t)$  есть уравнение струны в момент времени  $t$ . Ограничиваясь рассмотрением лишь малых колебаний струны, мы будем пренебрегать величинами высшего порядка малости по сравнению с  $\operatorname{tg} \alpha = \partial u / \partial x$ .

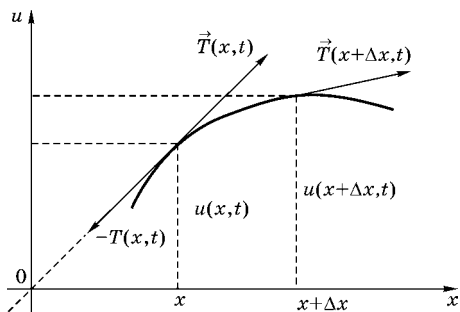


Рис. 2.1  
Натянутая струна

Так как струна не сопротивляется изгибу, то ее натяжение  $\vec{T}(x, t)$  в точке  $x$  в момент времени  $t$  направлено по касательной к струне в точке  $x$  (рис. 2.1). Любой участок струны  $(a, b)$  после отклонения от положения равновесия в рамках нашего приближения не изменит своей длины:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \cong b - a,$$

и, следовательно, в соответствии с законом Гука величина натяжения  $|\vec{T}(x, t)|$  будет оставаться постоянной, не зависящей от  $x$  и  $t$ ,  $|\vec{T}(x, t)| = T_0$ .

Обозначим через  $F(x, t)$  плотность внешних сил, действующих на струну в точке  $x$  в момент времени  $t$  и направленных перпендикулярно оси  $x$  в плоскости  $(x, u)$ . Наконец, пусть  $\rho(x)$  обозначает линейную плотность струны в точке  $x$ , так что приближенно  $\rho(x) \Delta x$  — масса элемента струны  $(x, x + \Delta x)$ .

Составим уравнение движения струны. На ее элемент  $(x, x + \Delta x)$  действуют силы натяжения  $\vec{T}(x + \Delta x, t)$  и  $-\vec{T}(x, t)$  (рис. 2.1) и внешняя сила, сумма которых согласно законам Ньютона должна быть равна произведению массы этого элемента на его ускорение. Проектируя это векторное равенство на ось  $u$ , на основании всего сказанного получим равенство

$$T_0 \sin(\alpha)|_{x+\Delta x} - T_0 \sin(\alpha)|_x + F(x, t) \Delta x = \rho(x) \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.3)$$

Но в рамках нашего приближения

$$\sin(\alpha) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)}} \approx \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\partial u}{\partial x},$$

а потому из (2.3) имеем

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + F(x, t),$$

откуда при  $\Delta x \rightarrow 0$  следует равенство

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F.$$

Это и есть *уравнение малых поперечных колебаний струны*. При  $F \neq 0$  колебания струны называются *вынужденными*, а при  $F = 0$  — *свободными*. Если

плотность  $\rho$  постоянна,  $\rho(x) = \rho$ , то уравнение колебаний струны принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad (2.4)$$

где  $f = F/\rho$ , а  $v^2 = T_0/\rho$  — постоянная. Уравнение (2.4) называется *одномерным волновым уравнением*. Впервые это уравнение было получено Ж. Л. Даламбером в 1743 г. Им же было предложено и общее решение уравнения (2.4).

### УРАВНЕНИЕ МАЛЫХ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГО СТЕРЖНЯ

Уравнение вида (2.2) описывает также *малые продольные колебания упругого стержня* (стержнем называется тело цилиндрической формы, для растяжения или изгибающего которого надо приложить известное усилие; это отличает даже самый тонкий стержень от струны, которая гнется свободно):

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t), \quad (2.5)$$

где  $S(x)$  — площадь поперечного сечения стержня и  $E(x)$  — модуль Юнга в точке  $x$ . Если  $S(x)$ ,  $E(x)$  и  $\rho(x)$  — постоянны, то уравнение (2.5) приводится к виду (2.4), где  $f = F/(\rho S)$ , а  $v^2 = E/\rho$ .

Дадим вывод уравнения (2.5). Представим себе прямолинейный стержень, диаметр поперечного сечения которого много меньше его длины. Допустим далее, что один конец этого стержня заделан, а второй свободен (рис. 2.2). Эти условия несущественны, принимаются для конкретности.

Будем считать, что все поперечные сечения стержня одинаковы. Выберем ось стержня, как линию, проходящую через центры тяжести поперечных сечений. Координату вдоль оси стержня обозначим  $x$ . Каждому поперечному сечению стержня отвечает своя координата  $x$ . Реальный стержень является трехмерным телом, т. е. занимает некоторый объем в пространстве. Однако если диаметр поперечного сечения стержня значительно меньше его длины, то при взгляде на стержень издалека он воспринимается как линия. Поэтому кажется естественным рассматривать тонкий стержень как материальную линию, т. е. объект, лишенный объема, но наделенный массой. Массу стержня удобно задавать посредством линейной массовой плотности, которую можно вычислить так. Если  $S(x)$  — площадь поперечного сечения стержня, то объем материала стержня, заключенного между поперечными сечениями  $AB$  и  $CD$ , вычисляется по очевидной формуле:  $dV = S dx$ . Масса этого бесконечно малого объема:  $dm = \rho S dx$ , где  $\rho$  — массовая плотность материала, из которого изготовлен стержень. Реальный стержень моделируется линией. Мы должны считать, что массы реаль-

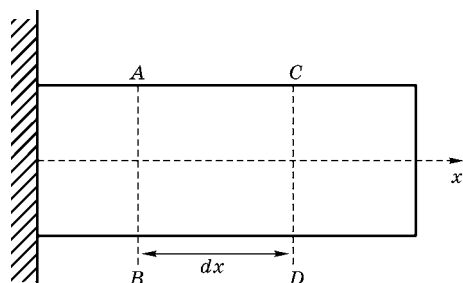


Рис. 2.2  
Стержень

ного стержня и модели одинаковы. Если через  $\rho_c$  обозначить линейную плотность массы стержня-модели, то масса его элемента  $dx$  равна  $dm = \rho_c dx$ . Получаем соотношение для определения  $\rho_c$  через трехмерную плотность  $\rho$

$$dm = \rho_c dx = \rho S dx \Rightarrow \rho_c = \rho S.$$

Представим себе, что мы ухватили за правый конец стержня, оттянули его вдоль оси  $x$  и отпустили. Ясно, что при этом точки стержня придут в движение и стержень начнет колебаться вдоль оси  $x$ . Такие колебания стержня называются *продольными колебаниями*. Чтобы описать состояние колеблющегося стержня, введем в рассмотрение функцию двух переменных  $u(x, t)$  — перемещение точки стержня с координатой  $x$  в момент времени  $t$  вдоль оси стержня. В процессе движения стержня в момент времени  $t$  поперечное сечение  $AB$  стержня сместится вдоль оси на расстояние  $u(x, t)$ , так что его координата будет равна  $x + u(x, t)$ . Поперечное сечение  $CD$  стержня также сместится и его координата будет

$$x + dx + u(x + dx, t) = x + dx + u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Расстояние между сечениями  $AB$  и  $CD$  в момент времени  $t$  будет

$$\left[ x + u(x, t) + dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right] - [x + u(x, t)] = \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx.$$

*Продольной деформацией* стержня называется относительное изменение длины бесконечно малых отрезков стержня. В нашем случае относительное удлинение отрезка  $dx$  между сечениями  $AB$  и  $CD$  согласно последней формуле равно

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx - dx \right]}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Составим уравнение движения стержня. На элемент стержня  $(x, x + dx)$  действуют силы натяжения  $\vec{T}(x + dx, t)$ ,  $-\vec{T}(x, t)$  и внешняя массовая сила, распределенная по длине стержня и изменяющаяся с течением времени (рис. 2.3). Усилие  $\vec{T} = T(x, t)\vec{i}$  моделирует воздействие части стержня, находящейся правее точки с координатой  $x$ , на часть стержня, находящуюся левее точки с координатой  $x$ . Плотность массовой силы в момент времени  $t$  в сечении  $x$  обозначим  $\vec{F} = F(x, t)\vec{i}$ . Если  $T(x, t) > 0$ , то усилие  $T(x, t)$  называется *растягивающим*, если  $T(x, t) < 0$ , то усилие  $T(x, t)$  называется *сжимающим* или усилием сжатия. Сумма всех этих сил согласно законам Ньютона должна быть равна произведению массы рассматриваемого элемента на ускорение.

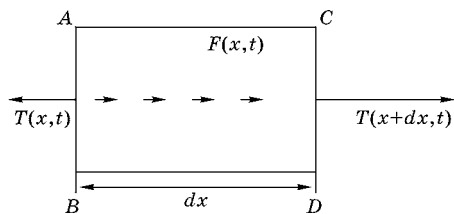


Рис. 2.3  
Усилия в стержне

На основании сказанного будем иметь

$$\begin{aligned}
 T(x+dx, t) - T(x, t) + F(x, t)dx &= \rho(x)S(x)dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} dx + F(x, t)dx &= \rho(x)S(x)dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} + F(x, t) &= \rho(x)S(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Последнее уравнение содержит две неизвестные функции: усилие  $\vec{T} = T(x, t)\vec{i}$  и перемещение  $u(x, t)$ . Таким образом, для решения задачи необходимо дополнительное условие. Мы будем рассматривать малые продольные колебания, поэтому таким дополнительным условием является закон Гука, устанавливающий пропорциональность силы и перемещения, в нашем случае

$$T(x, t) = ES\varepsilon = ES \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{2.7}$$

где коэффициент пропорциональности  $ES$  называется *жесткостью стержня на растяжение*. Соотношение (2.7) называется *определяющим уравнением* или *соотношением упругости*, справедливым только для малых деформаций  $\varepsilon$  и упругих стержней. Подставляя (2.7) в (2.6), получаем (2.5).

Из физических соображений следует, что для однозначного описания процесса колебаний струны или стержня необходимо дополнительно задать величины смещения  $u$  и скорости  $u_t \equiv \partial u / \partial t$  в начальный момент времени (*начальные условия*) и режим на концах (*граничные условия*).

Рассмотрим некоторые примеры граничных условий:

а) если конец  $x_0$  струны или стержня движется по закону  $\mu(t)$ , то

$$u|_{x=x_0} = \mu(t);$$

б) если на правый конец  $x_0$  струны действует заданная сила  $v(t)$ , то

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_0} = \frac{v(t)}{T_0}.$$

Действительно, в этом случае

$$T_0 \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_0} \approx T_0 \sin(\alpha)|_{x=x_0} = v(t);$$

в) если правый конец  $x_0$  закреплен упруго и  $\alpha$  — коэффициент жесткости закрепления, то в соответствии с законом Гука

$$E \left. \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u \right|_{x=x_0} = 0.$$

Таким образом, желая полностью охарактеризовать физическую задачу, мы не можем ограничиться только дифференциальным уравнением; необходимо добавить некоторые дополнительные соотношения — начальные и граничные условия.

Поясним необходимость добавления дополнительных соотношений на следующем примере. Колебания струны, как нам уже известно, описываются дифференциальным уравнением (2.4). Допустим, что струна имеет длину  $l$  и в состоянии равновесия занимает отрезок  $[0, l]$  оси  $x$ . Далее допустим, что струна в момент времени  $t = 0$  была выведена из положения равновесия и начала колебаться. Задача состоит в том, чтобы исследовать отклонение  $u(x, t)$  точки струны с произвольной абсциссой  $x \in [0, l]$  в произвольный момент времени, следующий за начальным, т. е. в момент времени  $t > 0$ . Иначе говоря, функция  $u(x, t)$ , удовлетворяющая уравнению (2.4), должна быть определена на плоскости переменных  $x$  и  $t$  в области  $D: t > 0, 0 \leq x \leq l$ . Граница этой области состоит из отрезка  $[0, l]$  оси  $x$  и из двух лучей  $x = 0, t > 0$  и  $x = l, t > 0$ . Единственными данными в уравнении (2.4) являются: величина  $v^2$ , которая определенным образом зависит от физических особенностей струны (от ее плотности и натяжения), и функция  $f(x, t)$ , характеризующая внешнюю силу, которая в момент времени  $t$  действует на точку  $x$  струны. Уравнение (2.4) не содержит никакой информации о том, каким образом струна была выведена из положения равновесия, а также о том, каково состояние концов струны (они могут быть закреплены или, наоборот, свободны, или их перемещения стеснены теми или иными ограничениями). Указанная информация должна быть сообщена особо. Вывести струну из состояния равновесия можно, сообщив ее точкам либо начальное отклонение, либо начальную скорость, либо и то и другое вместе. Пусть точке  $x$  струны,  $0 \leq x \leq l$ , сообщены начальное отклонение  $\varphi(x)$  и начальная скорость  $\psi(x)$ . Тогда искомая функция  $u(x, t)$  должна удовлетворять соотношениям:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (\text{A})$$

Пусть еще известны законы колебания концов струны: пусть в момент времени  $t \geq 0$  смещение левого конца струны равно  $\mu_0(t)$ , а смещение правого конца —  $\mu_l(t)$ . Тогда должны выполняться еще соотношения:

$$u|_{x=0} = \mu_0(t), \quad u|_{x=l} = \mu_l(t). \quad (\text{B})$$

Условия (B) нет необходимости ставить, если струна бесконечная, т. е. если она в состоянии равновесия заполняет всю ось  $x$ .

Дополнительные условия (A) и (B) должны выполняться на линиях  $t = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = l$ , т. е. на границе области  $D$ , в которой определена функция  $u(x, t)$ . По этой причине такие условия и называются *граничными* или *краевыми условиями*.

Заметим, что условия (A) и (B) не вполне независимы. Если требовать, чтобы функция  $u(x, t)$  была непрерывной не только внутри области  $D$ , но и на ее границе, то необходимо, чтобы выполнялись соотношения:

$$\varphi(0) = \mu_0(0), \quad \varphi(l) = \mu_l(0). \quad (\text{B})$$

Соотношения (B) называются *условиями согласования*. Они вытекают из требования, чтобы смещение концов струны было непрерывным в начальный момент времени. Если требовать, чтобы на границе области  $D$  были непрерывны также и некоторые из производных функции  $u(x, t)$ , то могут возникнуть



новые условия согласования. Например, если требовать непрерывности первых производных, то необходимо, чтобы

$$\psi(0) = \mu'_0(0), \quad \psi(l) = \mu'_l(0).$$

Если требовать непрерывности вторых производных, то появляются условия:

$$\mu''_0(0) - v^2\varphi''(0) = f(0, 0), \quad \mu''_l(0) - v^2\varphi''(0) = f(l, 0).$$

Далее мы покажем, что при достаточно слабых ограничениях уравнение (2.4) имеет одно и только одно решение, удовлетворяющее условиям (А) и (Б). Это означает, что уравнения (2.4), (А) и (Б) содержат всю информацию, необходимую для исследования колебаний струны (решение единственно), и не содержат избыточной, противоречивой информации (решение существует).

### УРАВНЕНИЕ МАЛЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАНЫ

Аналогично выводится *уравнение малых поперечных колебаний мембраны* (мембраной называется тонкая натянутая плоская пленка, не сопротивляющаяся изгибу и сдвигу, но оказывающая сопротивление растяжению):

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + F(x, t), \quad x = (x_1, x_2). \quad (2.8)$$

Если плотность  $\rho$  постоянна, то уравнение колебаний мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + f(x, t), \quad v^2 = \frac{T}{\rho}, \quad f = \frac{F}{\rho}$$

называется *двумерным волновым уравнением*.

Дадим вывод уравнения (2.8). Будем рассматривать малые поперечные колебания мембраны, в которых смещение перпендикулярно плоскости мембраны, за которую мы примем плоскость  $Oxy$ . Пусть  $u = u(x, y, t)$  — величина смещения точки с координатами  $(x, y)$  в момент времени  $t$ . Критерием малости колебаний служат условия:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \ll 1, \quad \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \ll 1.$$

Пусть  $ds$  — элемент дуги некоторого контура, лежащего на поверхности мембраны,  $M$  — точка этого элемента. На этот элемент действуют силы натяжения  $\vec{T}ds$ . Отсутствие сопротивления мембраны изгибу и сдвигу математически выражается в том, что вектор натяжения  $\vec{T}$  лежит в плоскости, касательной к поверхности мембраны в точке  $M$ , и перпендикулярен элементу  $ds$ , а величина натяжения  $T$  в этой точке не зависит от направления элемента  $ds$ , содержащего точку  $M$ . Из предположения о малости колебаний следует:

- 1) проекция  $T_{\text{пр}}$  вектора натяжения  $\vec{T}$  на плоскость  $(x, y)$  равна  $T$ ;
- 2) натяжение  $T$  не зависит от времени  $t$ .

Действительно,  $T_{\text{np}} = T \cos(\alpha)$ , где  $\alpha$  — угол между вектором  $\vec{T}$  и плоскостью  $(x, y)$ . Но  $\alpha$  не больше угла  $\gamma$  между касательной плоскостью к поверхности мембраны, в которой лежит вектор  $\vec{T}$ , и плоскостью  $(x, y)$ :  $\alpha \leq \gamma$ . Поэтому

$$\cos(\alpha) \geq \cos(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}} \approx 1.$$

Следовательно,  $\cos(\alpha) \approx 1$  и, значит,  $T_{\text{np}} \approx T$ .

Далее рассмотрим участок  $S$  невозмущенной мембраны. Его площадь равна

$$\iint_S dx dy.$$

Площадь этого участка в момент времени  $t$  равна

$$\iint_S \frac{dx dy}{\cos(\gamma)} \approx \iint_S dx dy.$$

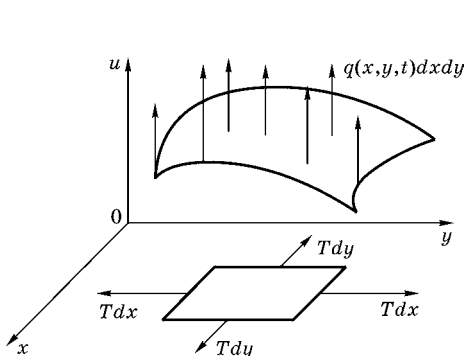


Рис. 2.4  
Натянутая мембрана

Таким образом, площадь фиксированного участка мембраны не меняется со временем, т. е. участок не растягивается. Поэтому в силу закона Гука и  $T$  не меняется со временем. Из того, что вектор  $\vec{T}$  направлен по перпендикуляру к элементу дуги  $ds$ , следует, что  $T$  не зависит также от  $x$  и  $y$ .

Рассмотрим элемент мембраны, для которого точка  $N(x, y, u)$  — средняя точка. На этот элемент, кроме сил натяжения  $\vec{T}$ , действует внешняя распределенная по поверхности нагрузка  $q(x, y, t)$ , рассчитанная на единицу площади и

перпендикулярная к поверхности мембраны (рис. 2.4). Равнодействующая внешних сил будет равна  $q(x, y, t) dx dy$ . Равнодействующая сил натяжения

$$\begin{aligned} & \left[ T dy \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x+\frac{dx}{2}} - T dy \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x-\frac{dx}{2}} \right] + \left[ T dx \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y+\frac{dy}{2}} - T dx \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y-\frac{dy}{2}} \right] = \\ & = T dy \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + T dx \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = T \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Обозначим через  $\rho(x, y)$  поверхностную плотность мембраны (плотность, рассчитанную на единицу площади). Тогда масса рассматриваемого элемента мембраны будет  $\rho(x, y) dx dy$ . Таким образом, в силу законов Ньютона мы можем написать уравнение

$$\begin{aligned} \rho(x, y) dx dy \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= q(x, y, t) dx dy + T \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{q(x, y, t)}{T}, \quad v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Величина  $v$  имеет размерность скорости. Она характеризует скорость распространения колебаний. В частном случае может быть  $q(x, y, t) = 0$ , тогда мы имеем уравнение свободных колебаний мембраны:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (2.10)$$

Для завершения постановки задачи о колебаниях мембраны зададим начальные и граничные условия.

Начальные условия:

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x, y). \quad (2.11)$$

Граничные условия на контуре  $\Gamma$ :

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (2.12)$$

Итак, задача о колебаниях мембраны сводится к интегрированию уравнений (2.9) и (2.10) при начальных и граничных условиях (2.11) и (2.12).

### ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ МЕМБРАНЫ

Если считать, что  $q = q(x, y)$ , т. е. внешняя поперечная нагрузка не зависит от времени, то можно ставить задачу о равновесии мембраны. Уравнение равновесия можно вывести непосредственно либо можно получить из уравнения колебаний. Уравнение равновесия мембраны имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{q(x, y)}{T}.$$

Это уравнение надлежит интегрировать с граничным условием, например с условием вида (2.12). Начальные условия не ставятся.

### ЗАДАЧА ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ СИНУСОИДАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ МЕМБРАНЫ

Пусть  $q = q(x, y, t)$  зависит от времени специальным образом:

$$q(x, y, t) = Q(x, y)\cos(\omega t)$$

либо

$$q(x, y, t) = Q(x, y)\sin(\omega t),$$

где  $\omega$  — частота внешней возмущающей силы.

В этом случае и решение задачи целесообразно искать в виде

$$u(x, y, t) = U(x, y)\cos(\omega t)$$

либо

$$u(x, y, t) = U(x, y)\sin(\omega t)$$

соответственно.

После подстановки этих функций  $u(x, y, t)$  в уравнение колебаний мембраны получим уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{v^2} U = -\frac{Q(x, y)}{T},$$

которое надлежит интегрировать при граничных условиях, например в виде (2.12).

## ТЕЛЕГРАФНОЕ УРАВНЕНИЕ

В качестве еще одного примера волнового уравнения рассмотрим *телеграфное уравнение*, которое применяется в теории распространения квазистационарных электрических колебаний по кабелям.

Если протяженность электрической цепи *велика* (например, телеграфные линии или линии передачи энергии), то такую цепь нельзя характеризовать сосредоточенными параметрами (сопротивлением, емкостью, катушкой самоиндукции). В простейшем случае, когда электрическая цепь имеет большую протяженность, можно говорить о *линиях с распределенными параметрами*\*. При изучении таких линий учитывают сопротивление проводов, индуктивность линии, утечку тока в атмосферу вследствие отсутствия изоляции провода или ее несовершенства, а также взаимную емкость

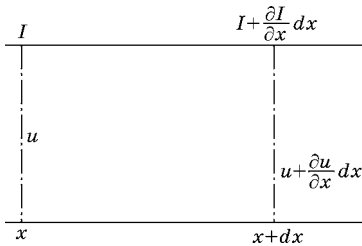


Рис. 2.5  
Линия электропередач

между проводами (или между проводом и землей). Мы будем рассматривать однородную линию, т. е. линию, сопротивление, индуктивность, утечка и емкость которой распределены вдоль провода непрерывно и равномерно; для наглядности будем считать линию *двухпроводной* (рис. 2.5). Будем считать, что линия электропередачи обладает омическим сопротивлением  $R$ , самоиндукцией  $L$ , емкостью  $C$  и утечкой изоляции  $g$ , рассчитанными на единицу длины. Пусть напряжение между проводами и ток на расстоянии  $x$  от начала линии  $x = 0$  в момент времени  $t$  равны соответственно  $u(x, t)$  и  $I(x, t)$ . Эти функции и являются искомыми; они связаны двумя дифференциальными уравнениями, которые мы сейчас выведем.

Напомним, что самоиндукция  $L$  — коэффициент пропорциональности, связывающий электродвижущую силу самоиндукции со скоростью изменения тока, т. е.  $u_c = L \partial I / \partial t$ . Емкость  $C$  — коэффициент пропорциональности между током смещения и скоростью изменения напряжения, т. е.  $I_{cm} = C \partial u / \partial t$ . Последнее равенство получается дифференцированием соотношения  $q = Cu$ , где  $q$  — количество электричества, остающегося на участке провода, рассматриваемого как обкладка конденсатора, а  $u$  — напряжение. Наконец, утечка  $g$  есть коэффициент пропорциональности между током утечки и напряжением:  $I_y = gu$ .

Для составления дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять функции  $u(x, t)$  и  $I(x, t)$ , выделим участок провода от точки с абсциссой  $x$  до точки с абсциссой  $x + dx$ . Если напряжение и ток в точке  $x$  в момент времени  $t$  равны соответственно  $u(x, t)$  и  $I(x, t)$ , то в точке  $x + dx$  в тот же момент времени значения этих величин (с точностью до бесконечно малых высших порядков по сравнению с  $dx$ ) будут равны  $u + (\partial u / \partial x) dx$  и  $I + (\partial I / \partial x) dx$ . Падение напряжения на рассматриваемом участке будет вызываться потерей

\* Если длина электромагнитной волны настолько мала, что она сравнима с поперечными размерами проводника, то полученные здесь уравнения становятся неприменимы. В этом случае необходимо прибегнуть к решению уравнений электромагнитного поля, излагаемому в специальных курсах.

напряжения в проводе, т. е. величиной  $RdxI$ , и возникновением противодействующей электродвижущей силы самоиндукции  $u_c = Ldx(\partial I/\partial t)$ . Поэтому

$$u - \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = RdxI + Ldx \frac{\partial I}{\partial t},$$

т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + L \frac{\partial I}{\partial t} + RI = 0. \quad (2.13)$$

Далее, изменение тока на этом же участке обусловлено током утечки и током смещения. Следовательно,

$$I - \left( I + \frac{\partial I}{\partial x} dx \right) = gdxu + Cdx \frac{\partial u}{\partial t},$$

откуда

$$\frac{\partial I}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial t} + gu = 0. \quad (2.14)$$

Большое значение имеют начальные и граничные условия, которые должны выполняться на концах линии. Начальные условия в общем случае формулируются так:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad I|_{t=0} = \psi(x).$$

Пользуясь уравнениями (2.13) и (2.14), легко найти  $\partial u/\partial t$  и  $\partial I/\partial t$  при  $t = 0$ .

Если в начале линии  $x = 0$  включен источник питания с электродвижущей силой  $E$ , а на конце  $x = l$  имеется приемник тока с сопротивлением  $R_l$ , то граничные условия будут:

$$u|_{x=0} = E(t), \quad u|_{x=l} = R_l I|_{x=l}.$$

В частности, если, например, один конец  $x = 0$  поддерживается под напряжением  $E$ , а другой  $x = l$  замкнут накоротко, мы имеем

$$u|_{x=0} = E(t), \quad u|_{x=l} = 0.$$

Если, например, конец  $x = 0$  линии открыт, то в этом конце мы должны иметь

$$I|_{x=0} = 0.$$

Вообще, если в конце ( $x = l$ ) линии включена внешняя электродвижущая сила  $E$ , сопротивление  $R$  и самоиндукция  $L$ , то в этом конце мы должны иметь

$$u|_{x=l} = \left( E + RI + L \frac{\partial I}{\partial t} \right) \Big|_{x=l}.$$

Разумеется, можно рассматривать любую комбинацию условий при  $x = 0$  и  $x = l$ .

Исключим ток из уравнений (2.13) и (2.14), получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (Lg + CR) \frac{\partial u}{\partial t} + Rgu, \quad v = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (2.15)$$

Уравнение (2.15) называется *телеграфным уравнением*;  $v$  — скорость передачи сигнала по кабелю.

В силу симметрии уравнений (2.13) и (2.14) аналогичное уравнение получается и для тока  $I$  (заменой в (2.15) напряжения  $u$  на ток  $I$ ).

Если считать  $R = 0$ ,  $g = 0$ , то вместо уравнения (2.15) мы будем иметь уравнение для линии без потерь:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Это одномерное волновое уравнение.

В завершение рассмотрения уравнений колебаний, отметим еще, что в трехмерном координатном пространстве рассматривается *трехмерное волновое уравнение*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) + f(x, t), \quad x = (x_1, x_2, x_3). \quad (2.16)$$

Это уравнение описывает процессы распространения звука в однородной среде и электромагнитных волн в однородной непроводящей среде. Ему удовлетворяют плотность и давление газа, потенциал скоростей, а также составляющие напряженности электрического и магнитного полей и соответствующие потенциалы.

## 2.2. УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ

Процессы распространения тепла или диффузии частиц в среде описываются следующим общим *уравнением диффузии*:

$$\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (p(x) \nabla u) - q(x)u + F(x, t). \quad (2.17)$$

### УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Выведем уравнение распространения тепла. Обозначим через  $u(x, t)$  температуру среды в точке  $x = (x_1, x_2, x_3)$  в момент времени  $t$ . Считая среду изотропной, обозначим через  $\rho(x)$ ,  $c(x)$  и  $k(x)$  соответственно ее плотность, удельную теплоемкость и коэффициент теплопроводности в точке  $x$ . Обозначим через  $F(x, t)$  интенсивность источников тепла в точке  $x$  в момент времени  $t$ . Если различные точки среды имеют различную температуру, то в этой среде будет происходить естественный процесс передачи тепла от участков более нагретых к участкам менее нагретым. Этот процесс передачи тепла можно характеризовать вектором плотности потока тепла  $\vec{q}$  — вектором, направление которого совпадает с направлением потока тепла в данный момент времени. Величина этого вектора — количество тепла, протекающего за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к направлению потока тепла. Экспериментально установлено, что

$$\vec{q} = -k \nabla u. \quad (2.18)$$

Соотношение (2.18) называется законом Фурье. Выделим в среде бесконечно малый объем, средняя точка которого  $(x_1, x_2, x_3)$ :  $d\tau = dx_1 dx_2 dx_3$ . Составим баланс тепла для этого объема. Количество тепла, выделяемого в объеме  $d\tau$  за время  $\Delta t$ , будет  $dQ_1 = F(x, t)d\tau\Delta t$ . Количество тепла, израсходованного в  $d\tau$  за  $\Delta t$  на нагрев этого объема:

$$dQ_2 = c\rho d\tau[u(x, t + \Delta t) - u(x, t)] = c\rho d\tau \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t.$$

Количество тепла, вытекающего из объема  $d\tau$  за  $\Delta t$ , будет

$$\begin{aligned} dQ_3 &= \left[ q_{x_1} \Big|_{x_1 + \frac{dx_1}{2}} - q_{x_1} \Big|_{x_1 - \frac{dx_1}{2}} \right] dx_2 dx_3 \Delta t + \\ &+ \left[ q_{x_2} \Big|_{x_2 + \frac{dx_2}{2}} - q_{x_2} \Big|_{x_2 - \frac{dx_2}{2}} \right] dx_1 dx_3 \Delta t + \left[ q_{x_3} \Big|_{x_3 + \frac{dx_3}{2}} - q_{x_3} \Big|_{x_3 - \frac{dx_3}{2}} \right] dx_1 dx_2 \Delta t = \\ &= \left( \frac{\partial q_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial q_{x_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial q_{x_3}}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 \Delta t = (\nabla \cdot \vec{q}) d\tau \Delta t. \end{aligned}$$

Из закона сохранения энергии  $dQ_1 = dQ_2 + dQ_3$ , откуда получаем уравнение

$$(\nabla \cdot \vec{q}) + c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = F(x, t). \quad (2.19)$$

Уравнения (2.18) и (2.19) содержат две неизвестные функции  $\vec{q}$  и  $u(x, t)$ . Исключив  $\vec{q}$ , будем иметь

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla u) = F(x, t). \quad (2.20)$$

Если среда однородна, т. е.  $c$ ,  $\rho$  и  $k$  — постоянные, то уравнение (2.20) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v^2 \Delta u + f(x, t), \quad v^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f = \frac{F}{c\rho}. \quad (2.21)$$

Уравнение (2.21) называется *уравнением теплопроводности* или *уравнением Фурье*.

Как и в случае уравнения колебаний, для полного описания процесса распространения тепла необходимо задать начальное распределение температуры в среде (начальное условие) и режим на границе этой среды (граничное условие).

Рассмотрим некоторые примеры граничных условий:

а) если на границе  $S$  поддерживается заданное распределение температуры  $u_0$ , то

$$u|_S = u_0; \quad (2.22)$$

б) если на границе  $S$  поддерживается заданный поток тепла  $q$ , то

$$-k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = q; \quad (2.23)$$

в) если на границе  $S$  происходит теплообмен согласно закону Ньютона, то

$$k \frac{\partial u}{\partial n} + h(u - u_0) \Big|_S = 0, \quad (2.24)$$

где  $h$  — коэффициент теплообмена;  $u_0$  — температура окружающей среды;

г) если граница  $S$  является границе раздела двух сред (теплообмен соприкасающихся твердых тел или конвективный теплообмен тела с жидкостью), когда температура соприкасающихся поверхностей одинакова, то в этом случае граничные условия задаются как условия равенства температуры и плотностей теплового потока на поверхности соприкосновения двух сред (или тел)

$$u_1|_S = u_2|_S, \quad k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n}|_S = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}|_S. \quad (2.25)$$

Возможны и многие другие граничные условия.

### УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ

Аналогично выводится и *уравнение диффузии* частиц. При этом вместо закона Фурье нужно пользоваться законом Нернста:

$$\vec{q} = -D\nabla u, \quad (2.26)$$

где  $D(x)$  — коэффициент диффузии;  $u(x, t)$  — плотность частиц в точке  $x$  в момент времени  $t$ . Уравнение для плотности  $u(x, t)$  будет иметь вид (2.17), где  $\rho$  обозначает коэффициент пористости,  $p = D$  и  $q$  характеризует поглощение среды.

Представим себе, что имеется некий объем, заполненный жидкостью или газом. Пусть  $C$  — концентрация диффундирующего вещества в этом объеме;  $\vec{q}$  — вектор плотности потока диффундирующего вещества. Согласно закону Нернста (2.26):

$$\vec{q} = -D\nabla C. \quad (2.27)$$

Выделяем малый элемент объема  $d\tau$  и составляем баланс вещества. Пусть  $Q(x, y, z, t)$  — плотность выделения вещества, тогда  $Q(x, y, z, t)d\tau dt$  — количество вещества, выделившегося в объеме  $d\tau$  за время  $dt$ . Имеем

$$Q(x, y, z, t)d\tau dt = [C|_{t+dt} - C|_t]d\tau + \text{div}(\vec{q})d\tau dt.$$

Здесь первое слагаемое в правой части последнего уравнения характеризует увеличение вещества в объеме  $d\tau$  за время  $dt$ , а второе слагаемое — количество вещества, вытекающего из объема  $d\tau$  за время  $dt$ .

Таким образом, получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \text{div}(\vec{q}) = Q(x, y, z, t). \quad (2.28)$$

Исключим теперь из уравнений (2.27) и (2.28) вектор плотности потока диффундирующего вещества  $\vec{q}$ . Окончательно будем иметь основное уравнение теории диффузии в виде

$$\Delta C - \frac{1}{D} \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{Q(x, y, z, t)}{D}.$$

Это уравнение надлежит интегрировать с начальными условиями:

$$C|_{t=0} = \varphi(x, y, z)$$



и какими-нибудь граничными условиями на поверхности  $S$ , например, в случае непроницаемых стенок такими условиями будут

$$\left. \frac{\partial C}{\partial n} \right|_S = 0.$$

Могут быть и другие условия.

### 2.3. СТАЦИОНАРНОЕ УРАВНЕНИЕ

Для стационарных процессов  $F(x, t) = F(x)$ ,  $u(x, t) = u(x)$  уравнения колебаний (2.2) и диффузии (2.17) принимают вид

$$-\nabla \cdot (p(x)\nabla u) + q(x)u = F(x). \quad (2.29)$$

При  $p = \text{const}$  и  $q = 0$  уравнение (2.29) называется *уравнением Пуассона*:

$$\Delta u = -f, \quad f = \frac{F}{p}; \quad (2.30)$$

при  $f = 0$  уравнение (2.30) переходит в *уравнение Лапласа*:

$$\Delta u = 0.$$

Для полного описания стационарного процесса необходимо задать режим на границе — одно из граничных условий (2.22)–(2.25).

Пусть в волновом уравнении (2.16) внешнее возмущение  $f(x, t)$  периодическое с частотой  $\omega$  и амплитудой  $a^2 f(x)$ , т. е.

$$f(x, t) = a^2 f(x) e^{i\omega t}.$$

Если искать периодические возмущения  $u(x, t)$  с той же частотой и неизвестной амплитудой  $u(x)$ :

$$u(x, t) = a^2 u(x) e^{i\omega t},$$

то для функции  $u(x)$  получим стационарное уравнение:

$$\Delta u + k^2 u = -f(x), \quad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2},$$

которое называется *уравнением Гельмгольца*. К такому уравнению, как мы видели, сводится задача об установившихся синусоидальных колебаниях мембраны.

### ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

Предположим, что в пространстве распределен электрический заряд с плотностью  $\rho = \rho(x, y, z)$  — заряд в единице объема. Этот заряд создает электрическое поле, которое характеризуется вектором напряженности  $\vec{E}$ . Известно, что поле является потенциальным, т. е.

$$\vec{E} = -\text{grad}(u),$$

где  $u$  — потенциал.

Выделим малый элемент объема со средней точкой  $M(x, y, z)$  со сторонами  $dx, dy, dz : d\tau = dx dy dz$ . Подсчитаем поток вектора  $\vec{E}$  через поверхность объема  $d\tau$ :

$$E_x \Big|_{x+\frac{dx}{2}} dydz - E_x \Big|_{x-\frac{dx}{2}} dydz + E_y \Big|_{y+\frac{dy}{2}} dx dz - E_y \Big|_{y-\frac{dy}{2}} dx dz + \\ + E_z \Big|_{z+\frac{dz}{2}} dx dy - E_z \Big|_{z-\frac{dz}{2}} dx dy = \operatorname{div}(\vec{E}) d\tau.$$

Согласно теореме Остроградского — Гаусса\* поток через замкнутую поверхность пропорционален заряду, заключенному в этот объем:

$$\operatorname{div}(\vec{E}) d\tau = 4\pi\rho(x, y, z) d\tau,$$

откуда

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = 4\pi\rho(x, y, z)$$

или

$$\Delta u = -4\pi\rho(x, y, z). \quad (2.31)$$

Уравнение (2.31) — уравнение Пуассона. Если  $\rho = 0$ , то уравнение (2.31) принимает вид

$$\Delta u = 0. \quad (2.32)$$

Уравнение (2.32) — уравнение Лапласа.

#### ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ

Пусть в пространстве имеется стационарный поток жидкости. Будем считать жидкость несжимаемой (плотность  $\rho = \text{const}$ ). Такой поток характеризуется скоростью  $\vec{v}$ , причем если течение жидкости не вихревое, то скорость является потенциальным вектором, т. е.

$$\vec{v} = -\operatorname{grad}(u), \quad (2.33)$$

где  $u$  — потенциал скорости.

Рассмотрим элементарный объем в форме параллелепипеда и подсчитаем поток через поверхность этого объема за единицу времени:

$$v_x \Big|_{x+\frac{dx}{2}} dydz - v_x \Big|_{x-\frac{dx}{2}} dydz + v_y \Big|_{y+\frac{dy}{2}} dx dz - v_y \Big|_{y-\frac{dy}{2}} dx dz + \\ + v_z \Big|_{z+\frac{dz}{2}} dx dy - v_z \Big|_{z-\frac{dz}{2}} dx dy = \operatorname{div}(\vec{v}) d\tau.$$

Условие стационарности потока (сколько жидкости втекает в объем, столько же и вытекает из него) дает

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0. \quad (2.34)$$

Учитывая соотношение (2.33), получим из (2.34):

$$\Delta u = 0, \quad (2.35)$$

т. е. потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа.

\* Калашиков, С. Г. Электричество. — М. : Наука, 1970.

Рассмотрим задачу об обтекании твердого тела потоком жидкости. Пусть некое тело, ограниченное поверхностью  $S$ , помещено в поток жидкости, движущейся с заданной скоростью  $\vec{v}_0$ . Поток жидкости предполагается однородным. Наша задача — определить поле скоростей в этом потоке.

Представим потенциал скоростей в любой точке потока как сумму  $u = u_0 + u_1$ , где  $u_0$  — потенциал однородного невозмущенного потока (когда тело отсутствует):

$$u_0 = -v_0[x\cos(\alpha) + y\cos(\beta) + z\cos(\gamma)],$$

а  $u_1$  — возмущение из-за присутствия тела в потоке. Здесь, очевидно,  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы, которые составляет вектор скорости  $\vec{v}_0$  с координатными осями.

Потенциал  $u_1$  удовлетворяет уравнению (2.35) во всем пространстве, т. е.

$$\Delta u_1 = 0.$$

Условие на границе  $S$ :

$$v_n|_S = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n}|_S = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial n}|_S = -\frac{\partial u_0}{\partial n}|_S = f(P), \quad (2.36)$$

где  $f(P)$  — заданная функция точки  $P \in S$ .

Граничное условие вытекает из требования, что нормальная составляющая скорости на границе тела равна нулю. Кроме того, должно выполняться условие затухания возмущений на бесконечности, т. е.

$$u_1|_{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \rightarrow \infty} = 0. \quad (2.37)$$

Таким образом, задача об обтекании твердого тела потоком жидкости сводится к интегрированию уравнения Лапласа при условиях (2.36) и (2.37).

## 2.4. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В предыдущих параграфах мы достаточно подробно знакомились с разнообразными задачами физики и механики, которые приводят к уравнениям с частными производными. Можно привести еще много примеров подобного рода. Но основная наша цель состоит не в выводе уравнений в частных производных, а в исследовании и решении их.

В этом параграфе мы просто еще раз перечислим основные, наиболее часто применяемые уравнения математической физики.

1. Мы начнем с самого простого и, быть может, одного из важнейших уравнений математической физики — *уравнения Лапласа*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (2.38)$$

Левая часть уравнения (2.38) обозначается, как мы видели выше, символом  $\Delta u$  и называется *оператором Лапласа* над функцией  $u$ . Помимо уравнения Лапласа, оператор Лапласа входит в волновое уравнение, в уравнения теплопроводности и диффузии и в ряд других уравнений. Уравнение Лапласа встречается

в электростатике, магнитостатике, гидро- и аэродинамике, теории теплопроводности, теории упругости и других науках. Уравнению (2.38) должен удовлетворять потенциал сил тяготения или сил взаимодействия электрических зарядов во всех точках пространства, находящихся вне притягивающих масс или вне зарядов, создающих поле. Этому уравнению должен удовлетворять потенциал скорости безвихревого течения несжимаемой жидкости. Уравнению (2.38) должна удовлетворять температура в однородном теле, если теплообмен является стационарным, т. е. температура  $u$  зависит только от места, но не от времени.

2. Уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(x, y, z).$$

Область применимости — та же, что и для уравнения Лапласа. Уравнение Лапласа описывает поля, не имеющие внутренних источников, а уравнение Пуассона — поля с распределенными внутренними источниками. Эти уравнения встречаются почти во всех областях прикладной физики.

3. Волновое уравнение:

$$\Delta u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -f(x, y, z, t).$$

Это уравнение встречается при описании волновых процессов. Волны могут иметь разную природу.

4. Уравнение теплопроводности Фурье:

$$\Delta u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial u}{\partial t} = -f(x, y, z, t).$$

Это уравнение встречается в теории теплопроводности, теории диффузии, теории ядерных реакторов.

5. Уравнение Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = -f(x, y, z), \quad k = \text{const.}$$

Это уравнение для амплитуд установившихся периодических колебаний заданной частоты;  $k = \omega/v$  — волновое число.

6. Уравнение Шредингера:

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0.$$

Это одно из уравнений квантовой механики. Здесь  $\psi(x)$  — волновая функция;  $m$  — масса частицы;  $E$  — энергия частицы;  $V(x)$  — потенциал внешнего силового поля;  $\hbar$  — постоянная Планка ( $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-27}$  эрг·с).

7. Распространение волн в средах с поглощением энергии описывается уравнением

$$\Delta u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b \frac{\partial u}{\partial t} - cu = -f(x, y, z, t).$$

Все перечисленные уравнения представляют собой линейные уравнения в частных производных второго порядка, ставшими уже классическими уравне-

ниями математической физики. Однако уравнений второго порядка недостаточно для того, чтобы изучать даже важнейшие стационарные явления.

В качестве примеров приведем уравнения, которые используются в теории упругости. Так, теория изгиба упругой призматической балки приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению равновесия *четвертого* порядка\* относительно функции нормального прогиба  $u$ :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = q(x).$$

Если нагрузка  $q$  зависит не только от координаты  $x$ , но и от времени, то балка будет совершать колебательное движение, которое описывается *уравнением поперечных колебаний* призматической балки в частных производных

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = q(x, t) - \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Здесь  $E$  — модуль упругости балки;  $J$  — момент инерции площади поперечного сечения  $S$  относительно центральной оси, перпендикулярной к плоскости колебаний;  $\rho$  — плотность. Если  $EJ = \text{const}$ , то, полагая  $EJ/(\rho S) = v^2$  и  $f(x, t) = q(x, t)/(\rho S)$ , получим окончательно уравнение колебаний в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + v^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(x, t).$$

Задача о поперечных колебаниях упругой призматической балки сводится к интегрированию данного уравнения с начальными и граничными условиями, зависящими от вида закрепления концов балки.

Начальные условия:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x).$$

Приведем три вида наиболее распространенных граничных условий. В случае жесткой заделки конца балки граничные условия на этом конце имеют вид (прогиб и угол поворота — нулевые)

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

В случае свободной опоры конца балки (прогиб и изгибающий момент на опоре — нулевые) граничные условия сводятся к уравнениям:

$$u = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

В случае свободного конца балки (изгибающий момент и перерезывающая сила — нулевые) граничные условия сводятся к уравнениям:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

---

\* Собрание трудов академика А. Н. Крылова. Том X. Вибрация судов. — М.; Л., Изд. АН СССР, 1948.

Второй пример. Теория изгиба тонких пластин приводит к уравнению равновесия четвертого порядка в частных производных относительно функции нормального прогиба  $u$ :

$$D\nabla^4 u = q(x, y). \quad (2.39)$$

Здесь  $D$  — так называемая цилиндрическая жесткость пластины,  $\nabla^4 = \Delta^2$  — бигармонический оператор, который в декартовых координатах имеет вид

$$\nabla^4 u \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}.$$

Уравнение (2.39) называется уравнением Софи Жермен — Лагранжа.

Если нагрузка  $q$  зависит не только от координат  $x, y$ , но и от времени, то пластинка будет совершать колебательное движение, которое описывается уравнением в частных производных:

$$\frac{1}{v^4} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \nabla^4 u = \frac{q(x, y, t)}{D}, \quad v^4 = \frac{D}{\rho h}. \quad (2.40)$$

Здесь  $\rho$  — плотность;  $h$  — толщина пластинки.

Интегрирование уравнения (2.40) необходимо вести с учетом начальных и граничных условий. Рассмотрим наиболее распространенные граничные условия. Если один из краев прямоугольной пластинки шарнирно оперт, тогда прогиб и изгибающий момент вдоль этого края равны нулю. Это приводит к условиям:

$$u = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Если край жестко заделан, то прогиб и угол поворота сечения в точках края равны нулю:

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Если край свободен, то на этом краю обычно ставятся следующие условия:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (2-v) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2} = 0.$$

Здесь  $v$  — коэффициент Пуассона материала, из которого изготовлена пластинка.

## 2.5. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В этом параграфе мы дадим классификацию квазилинейных (линейных относительно всех старших производных) дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных.

## КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ В ТОЧКЕ

Будем рассматривать функции  $n$  независимых переменных  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, \nabla u) = 0 \quad (2.41)$$

с непрерывными коэффициентами  $a_{ij}(x)$  в области  $D$ . Можно считать без потери общности, что  $a_{ij} = a_{ji}$ . Зафиксируем определенную точку  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  в области  $D$  и составим квадратичную форму:

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x^0) X_i X_j. \quad (2.42)$$

Квадратичная форма (2.42) называется квадратичной формой, связанной с уравнением (2.41). Составим определитель формы (2.42):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Будем говорить, что квадратичная форма (2.42) *определенная*, если она сохраняет знак при любых изменениях переменных  $X$ , и *неопределенная*, если ее знак меняется.

Мы скажем, что уравнение (2.41) принадлежит *эллиптическому типу* в точке  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , если  $\Delta \neq 0$  и  $g$  — определенная форма; уравнение (2.41) принадлежит *гиперболическому типу*, если  $\Delta \neq 0$  и  $g$  — неопределенная форма; уравнение (2.41) принадлежит *параболическому типу*, если  $\Delta = 0$ . Уравнение (2.41) принадлежит эллиптическому типу (соответственно гиперболическому или параболическому) в области  $D$ , если во всех точках этой области оно принадлежит эллиптическому (соответственно гиперболическому или параболическому) типу. Если коэффициенты  $a_{ij}$  постоянные, то принадлежность уравнения к тому или иному типу не зависит от значений независимых переменных.

Отметим, что приведенная классификация не зависит от выбора переменных и остается неизменной при замене переменных. Введем вместо переменной  $x$  новые независимые переменные:

$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

при этом

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Так как  $J \neq 0$ , то в некоторой окрестности можно выразить переменные  $x$  через переменные  $\xi$ :  $x = x(\xi)$ . Обозначим  $u(x(\xi)) = \tilde{u}(\xi)$ ; тогда  $\tilde{u}(\xi(x)) = u(x)$ . Имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_i} &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_l \partial \xi_k} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_l} \frac{\partial^2 \xi_l}{\partial x_i \partial x_j}.\end{aligned}$$

Здесь мы, конечно, предполагаем, что функции  $\xi = \xi(x)$  обладают непрерывными вторыми производными. После подстановки последних выражений в уравнение (2.41), получим

$$\sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_l \partial \xi_k} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_l} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 \xi_l}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi^*(\xi, \tilde{u}, \nabla \tilde{u}) = 0. \quad (2.43)$$

Обозначив теперь новые коэффициенты при вторых производных через

$$\tilde{a}_{kl}(\xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}, \quad (2.44)$$

перепишем уравнение (2.43) в виде

$$\sum_{k,l=1}^n \tilde{a}_{kl}(\xi) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_l \partial \xi_k} + \tilde{\Phi}(\xi, \tilde{u}, \nabla \tilde{u}) = 0.$$

В фиксированной точке  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  обозначим  $\xi^0 = \xi(x^0)$ ,  $\alpha_{li} = \partial \xi_l(x^0) / \partial x_i$ ; тогда формула (2.44) запишется в виде

$$\tilde{a}_{kl}(\xi^0) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x^0) \alpha_{kj} \alpha_{li}. \quad (2.45)$$

Формула (2.45) преобразования коэффициентов  $a_{ij}(x^0)$  совпадает с формулой преобразования квадратичной формы (2.42) при неособенном линейном преобразовании:

$$X_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} Y_j, \quad \det(\alpha_{ji}) \neq 0, \quad (2.46)$$

переводящем форму (2.42) в форму

$$\sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\xi^0) Y_i Y_j.$$

В курсе линейной алгебры доказывается, что всегда существует неособенное преобразование (2.46), при котором квадратичная форма (2.42) принимает следующий канонический вид:

$$\sum_{i=1}^r Y_i^2 - \sum_{i=r+1}^m Y_i^2, \quad m \leq n. \quad (2.47)$$



Кроме того, в силу закона инерции квадратичных форм целые числа  $r$  и  $m$  не зависят от преобразования (2.46)\*. Приведенная классификация зависит от точки  $x^0$ , так как числа  $r$  и  $m$  зависят от  $x^0$ .

Пусть коэффициенты  $a_{ij}$  в уравнении (2.41) постоянны, и пусть преобразование (2.46) приводит квадратичную форму (2.42) к каноническому виду (2.47). Тогда линейная замена независимых переменных

$$\xi_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j$$

преобразует уравнение (2.41) к следующему каноническому виду:

$$\sum_{i=1}^r \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_i^2} - \sum_{i=r+1}^m \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_i^2} + \tilde{\Phi}(\xi, \tilde{u}, \nabla \tilde{u}) = 0.$$

Уравнения разных типов описывают разные по характеру явления и процессы и, наоборот, уравнения одного типа описывают схожие явления. Например, гиперболические уравнения описывают процессы распространения волн и колебания; параболические уравнения описывают явления переноса; эллиптические уравнения — статические процессы, задачи об установившихся стационарных движениях.

Рассмотрим ряд примеров.

1. Уравнение Лапласа:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Составим для него квадратичную форму  $g = X^2 + Y^2 + Z^2$ ; определитель этой формы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Ясно, что  $g$  — определенная форма (положительно определенная). Следовательно, уравнение Лапласа принадлежит к эллиптическому типу. К этому же типу относятся уравнения Пуассона и Гельмгольца.

2. Волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Составим для него квадратичную форму  $g = X^2 + Y^2 + Z^2 - T^2/v^2$ ; определитель этой формы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{v^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{v^2} \neq 0.$$

Очевидно, что  $g$  — неопределенная форма; тип уравнения — гиперболический.

\* См., например: Мальцев, А. И. Основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1970.; Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1980.

3. Уравнение Фурье:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Квадратичная форма  $g = X^2 + Y^2 + Z^2$ ; определитель этой формы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение относится к параболическому типу.

4. Уравнение Трикоми:

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Квадратичная форма  $g = yX^2 + Y^2$ ; определитель этой формы

$$\Delta = \begin{vmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = y.$$

Это уравнение *смешанного типа*. Если  $y < 0$  — тип уравнения гиперболический; если  $y > 0$  — эллиптический тип, а если  $y = 0$ , то уравнение параболического типа.

### КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

В предыдущем разделе мы рассмотрели вопрос о приведении квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка к каноническому виду в каждой отдельной точке, где задано это уравнение. Для каждой точки  $x^0$  имеется, вообще говоря, свое преобразование независимых переменных, приводящее уравнение к каноническому виду. Дифференциальное уравнение с числом независимых переменных больше двух (если исключить случай постоянных коэффициентов), вообще говоря, невозможно привести с помощью преобразования независимых переменных к каноническому виду даже в сколь угодно малой области. В случае же двух независимых переменных такое преобразование независимых переменных существует при достаточно общих предположениях о коэффициентах уравнения.

Для случаев двух, трех или четырех независимых переменных классификацию уравнений можно упростить.

Рассмотрим квазилинейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad (2.48)$$

где коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  суть функции от  $x$  и  $y$ , имеющие непрерывные производные до второго порядка включительно. Будем предполагать, что  $A$ ,  $B$

и  $C$  не обращаются одновременно в нуль. Уравнению (2.48) соответствует квадратичная форма:

$$g = AX^2 + 2BXY + CY^2,$$

определитель которой есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Пусть  $\Delta = AC - B^2 > 0 \Rightarrow A \neq 0$ . Тогда можно записать

$$g = \frac{1}{A} \{ (AX + BY)^2 + (AC - B^2)Y^2 \}. \quad (2.49)$$

Форма (2.49), очевидно, определенная. Следовательно, уравнение принадлежит эллиптическому типу.

Пусть  $\Delta = AC - B^2 < 0$ . Возможны два случая:

1)  $A \neq 0$ , тогда имеет место равенство (2.49), но в зависимости от  $Y$  знак  $g$  меняется; форма неопределенная. Следовательно, уравнение (2.48) — гиперболического типа;

2)  $A = 0$ , тогда запишем  $g$  в виде  $g = (2BX + CY)Y$ . Ясно, что  $g$  — неопределенная форма, тип уравнения — гиперболический.

Пусть  $\Delta = AC - B^2 = 0$ . Тип уравнения — параболический.

Таким образом, окончательно получаем: если  $\Delta > 0$ , то уравнение эллиптического типа; если  $\Delta < 0$ , то уравнение гиперболического типа, если  $\Delta = 0$ , то уравнение параболического типа.

## 2.6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ

Всякое линейное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными может быть записано в виде

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0, \quad (2.50)$$

где  $A, B, C, D, E, F, G$  — заданные функции от  $x$  и  $y$  (или, в частном случае, постоянные).

Попытаемся упростить это уравнение с помощью замены переменных:

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y); \\ \eta = \psi(x, y). \end{cases} \quad (2.51)$$

Здесь  $\xi$  и  $\eta$  — новые независимые переменные. Функции  $\varphi$  и  $\psi$ , связывающие новые переменные со старыми переменными, будут подобраны позднее. Пока же мы будем считать, что отображение (2.51) является взаимно однозначным. Сделаем требуемую замену переменных:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}; \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]; \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right]; \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \\ &+ \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Правые части формул (2.52)–(2.55) представляют собой линейные функции относительно частных производных  $u'_\xi, u'_\eta, u''_{\xi\xi}, u''_{\xi\eta}, u''_{\eta\eta}$ . Подставляя  $u'_x, u'_y, u''_{xx}, \dots$  из этих формул в уравнение (2.50), мы получим снова *линейное уравнение второго порядка* с неизвестной функцией  $u$  и независимыми переменными  $\xi$  и  $\eta$ .

$$\bar{A} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\bar{B} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{C} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi \left( \xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (2.56)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + C \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2; \\ \bar{B} &= A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + B \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + C \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}; \\ \bar{C} &= A \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + C \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2, \end{aligned}$$

а функция  $\Phi$  — линейна относительно  $u, u'_\xi, u'_\eta$ .

Уравнение (2.56) становится особенно простым, если в нем коэффициенты  $\bar{A}$  и  $\bar{C}$  окажутся равными нулю. Для того чтобы первоначально заданное уравнение (2.50) можно было привести к такому простому виду, надо в нем сделать замену переменных (2.51), подобрав функции  $\phi$  и  $\psi$  так, чтобы они являлись решениями уравнения

$$A \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + C \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (2.57)$$

Это уравнение является нелинейным уравнением в частных производных первого порядка. Следующая теорема показывает, как связаны его решения с общим решением некоторого обыкновенного уравнения.

**Теорема.** Для того чтобы функция  $z = f(x, y)$  во всех точках области  $\Omega$  удовлетворяла уравнению (2.57), необходимо и достаточно, чтобы семейство  $f(x, y) = \text{const}$  было общим интегралом уравнения

$$A(dy)^2 - 2Bdx dy + C(dx)^2 = 0 \quad (2.58)$$

в той же области  $\Omega$ .

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге Ю. С. Очана [23]. Теорема открывает путь для упрощения исходного уравнения (2.50).

Для этого сначала составляем вспомогательное уравнение (2.58); оно называется *характеристическим уравнением* для данного уравнения (2.50). Характеристическое уравнение есть *обыкновенное* дифференциальное уравнение первого порядка, но второй степени. Разрешая его относительно производной  $y'$ , получим два уравнения:

$$y' = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}; \quad (2.59)$$

$$y' = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \quad (2.60)$$

Если общий интеграл уравнения (2.59) имеет вид  $\varphi(x, y) = \text{const}$ , то, полагая  $\xi = \varphi(x, y)$ , мы обращаем в нуль коэффициент при производной  $u''_{\xi\xi}$ . Если  $\psi(x, y) = \text{const}$  является общим интегралом уравнения (2.60), независимым от интеграла  $\varphi(x, y) = \text{const}$ , то, полагая  $\eta = \psi(x, y)$ , мы обратим в нуль также и коэффициент при производной  $u''_{\eta\eta}$ .

Интегральные кривые характеристического уравнения, т. е. все кривые, входящие в семейства  $\varphi(x, y) = \text{const}$  и  $\psi(x, y) = \text{const}$ , называются *характеристиками* заданного дифференциального уравнения (2.50). В связи с этим рассматриваемый метод упрощения уравнения (2.50) называется *методом характеристик*.

#### УРАВНЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Семейства  $\varphi(x, y) = \text{const}$  и  $\psi(x, y) = \text{const}$  можно рассматривать, как общие интегралы уравнения (2.58) — это уравнение распадается на два уравнения (2.59) и (2.60). Правые части уравнений (2.59) и (2.60) действительны и различны. Следовательно, согласно указанной теореме, функции  $z = \varphi(x, y)$  и  $z = \psi(x, y)$  являются решениями уравнения в частных производных (2.57). Функции  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  линейно независимы (можно доказать, что их определитель Вронского отличен от нуля, если  $AC - B^2 < 0$ ). Поэтому, возвращаясь к уравнению (2.50), мы можем в нем сделать замену переменных по формулам (2.51). Так как функции  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  удовлетворяют уравнению (2.58), то в результате этой замены переменных окажется  $\bar{A} = 0$  и  $\bar{C} = 0$ . Следовательно, уравнение (2.50) преобразуется к виду

$$2\bar{B} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$$

или после деления на  $2\bar{B}$  и переноса в другую часть равенства к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \bar{\Phi}\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \quad (2.61)$$

Полученное уравнение имеет более простой вид, чем исходное уравнение (2.50); если мы его сможем решить, то для того, чтобы найти решение исходного уравнения, достаточно вернуться к старым переменным.

Уравнение (2.61) представляет *каноническую форму уравнения гиперболического типа*. Иногда пользуются другой канонической формой уравнения

гиперболического типа. Сделаем в уравнении (2.61) замену переменных по закону  $\xi = t + \tau$ ,  $\eta = t - \tau$ , где  $t$  и  $\tau$  — новые переменные. В результате этого преобразования уравнение (2.61) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \tilde{\Phi},$$

где  $\tilde{\Phi} = 4\bar{\Phi}$ . (Проверьте самостоятельно!)

### УРАВНЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В этом случае уравнения (2.59) и (2.60) совпадают, и мы получаем один общий интеграл  $\varphi(x, y) = \text{const}$ , определяющий одно семейство характеристик. Тогда можно положить  $\xi = \varphi(x, y)$ ,  $\eta = \psi(x, y)$ , где  $\psi(x, y)$  — любая функция, независимая от функции  $\varphi(x, y)$ , лишь бы она была дифференцируема нужное число раз. Очевидно, при выбранной замене переменных коэффициент  $\bar{A}$  в уравнении (2.56) обращается в нуль, т. е.

$$\bar{A} = A \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + C \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = 0.$$

С учетом того, что  $AC - B^2 = 0$  или  $B = \sqrt{A}\sqrt{C}$ , последнее равенство можно переписать в виде

$$A \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + C \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = \left( \sqrt{A} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{C} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = 0.$$

Это поможет доказать, что коэффициент  $\bar{B} = 0$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \bar{B} &= A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + B \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + C \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \\ &= A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{A}\sqrt{C} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \sqrt{A}\sqrt{C} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + C \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \\ &= \sqrt{A} \frac{\partial \xi}{\partial x} \left( \sqrt{A} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{C} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \sqrt{C} \frac{\partial \xi}{\partial y} \left( \sqrt{A} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{C} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = \\ &= \left( \sqrt{A} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{C} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left( \sqrt{A} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{C} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

Итак, уравнение (2.56) принимает вид

$$\bar{C} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi \left( \xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0.$$

После деления на  $\bar{C}$  окончательно получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \tilde{\Phi} \left( \xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right). \quad (2.62)$$

Уравнение (2.62) называется *канонической формой уравнения параболического типа*. Интересно отметить, что если правая часть уравнения (2.62) не содержит производной  $\partial u / \partial \xi$ , то оно становится обыкновенным дифференциальным уравнением, где роль параметра играет  $\xi$ .

#### УРАВНЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Правые части уравнений (2.59) и (2.60) комплексно сопряжены. Пусть  $\varphi(x, y)$  — комплексный интеграл уравнения (2.59). Тогда  $\varphi^*(x, y) = \text{const}$  интеграл уравнения (2.60), где  $\varphi^*(x, y)$  — функция, комплексно сопряженная с функцией  $\varphi(x, y)$ . Если теперь перейти к комплексным переменным  $\xi = \varphi(x, y)$ ,  $\eta = \varphi^*(x, y)$ , то согласно общей теории уравнение (2.50) приведет к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi \left( \xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right),$$

т. е. точно к такому же виду, как и гиперболическое уравнение. Желая остаться в действительной области, сделаем еще одну замену переменных:

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i}, \quad i = \sqrt{-1},$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — новые переменные. Тогда  $\xi = \alpha + i\beta$ ,  $\eta = \alpha - i\beta$ . Нетрудно показать, что при такой замене переменных  $\bar{A} = \bar{C}$ ,  $\bar{B} = 0$ . Таким образом, уравнение (2.50) приведет к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Theta \left( \alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \right),$$

который называется каноническим видом уравнения эллиптического типа.

## 2.7. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В этом параграфе мы сформулируем математические модели для ряда характерных физических процессов, которые сводятся к различным крайевым задачам для линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Классификация задач математической физики осуществляется по характеру дополнительных условий, которые ставятся при решении задачи.

Выше было отмечено, что линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla \cdot (p(x) \nabla u) - q(x)u + F(x, t) \quad (2.63)$$

описывает процессы колебаний, уравнение

$$\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (p(x) \nabla u) - q(x)u + F(x, t) \quad (2.64)$$

описывает процессы диффузии и, наконец, уравнение

$$-\nabla \cdot (p(x)\nabla u) + q(x)u = F(x) \quad (2.65)$$

описывает соответствующие стационарные процессы.

Пусть  $G \in \mathbb{R}^n$  — область, где происходит процесс, и  $S$  — ее граница, которую считаем кусочно-гладкой поверхностью. Таким образом,  $G$  есть область изменения аргументов  $x$  в уравнении (2.65) — область задания уравнения (2.65). Областью задания уравнений (2.63) и (2.64) будем считать цилиндр  $\Pi_T = G \times (0, T)$  высоты  $T$  с основанием  $G$  (рис. 2.6).

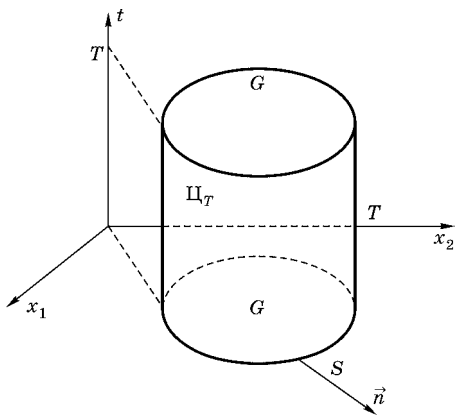


Рис. 2.6  
Область задания уравнений

Его граница состоит из боковой поверхности  $S \times [0, T]$  и двух оснований: нижнего  $\bar{G} \times \{0\}$  и верхнего  $\bar{G} \times \{T\}$ . Будем предполагать, что коэффициенты уравнений (2.63)–(2.65) не зависят от времени. В соответствии с их физическим смыслом будем считать, что  $\rho(x) > 0$ ,  $p(x) > 0$ ,  $q(x) \geq 0$ ,  $x \in \bar{G}$ . Наконец, в соответствии с математическим смыслом уравнений (2.63)–(2.65) необходимо считать, что  $\rho \in C(\bar{G})$ ,  $p \in C^{(1)}(\bar{G})$ ,  $q \in C(\bar{G})$ . При этих предположениях уравнение колебаний (2.63) — гиперболического типа, уравнение диффузии (2.64) — параболического типа, стационарное уравнение (2.65) — эллиптического типа. Таким образом, различие в математических

типах уравнений тесно связано с различием физических процессов, описываемых этими уравнениями. Чтобы полностью описать тот или иной процесс, необходимо, кроме самого уравнения, задать начальное состояние этого процесса (*начальные условия*) и режим на границе области, в которой происходит процесс (*граничные условия*). Математически это связано с неединственностью решения дифференциальных уравнений. Поэтому, чтобы выделить решение, описывающее реальный процесс, необходимо задать дополнительные условия. Такими дополнительными условиями и являются *краевые условия* — *начальные и граничные условия*. Соответствующая задача называется *краевой задачей*. Различают три основных типа краевых задач для дифференциальных уравнений.

*Задача Коши* для уравнений гиперболического и параболического типов: задаются начальные условия; область  $G$  совпадает со всем пространством  $\mathbb{R}^n$ ; граничные условия отсутствуют.

*Краевая задача* для уравнений эллиптического типа: задаются граничные условия на границе  $S$ ; начальные условия, естественно, отсутствуют.

*Смешанная задача* для уравнений гиперболического и параболического типов. В этом случае задаются как начальные, так и граничные условия,  $G \neq \mathbb{R}^n$ .

Опишем подробнее постановку перечисленных задач для уравнений (2.63)–(2.65).



## ЗАДАЧА КОШИ

Для уравнения колебаний (2.63) гиперболического типа задача Коши ставится следующим образом: найти функцию

$$u(x, t) \in C^{(2)}(t > 0) \cap C^{(1)}(t \geq 0),$$

удовлетворяющую уравнению (2.63) в полупространстве  $t > 0$  и начальным условиям при  $t = +0$ :

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_1(x). \quad (2.66)$$

При этом необходимо, чтобы  $F \in C(t > 0)$ ,  $u_0 \in C^{(1)}(R^n)$ ,  $u_1 \in C(R^n)$ .

Для уравнения диффузии (2.64) параболического типа задача Коши ставится следующим образом: найти функцию

$$u(x, t) \in C^{(2)}(t > 0) \cap C(t \geq 0),$$

удовлетворяющую уравнению (2.64) в полупространстве  $t > 0$  и начальным условиям при  $t = +0$

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (2.67)$$

При этом необходимо, чтобы  $F \in C(t > 0)$ ,  $u_0 \in C(R^n)$ .

## КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Краевая задача для уравнения (2.65) эллиптического типа ставится следующим образом: найти функцию  $u(x) \in C^{(2)}(G) \cap C^{(1)}(\bar{G})$ , удовлетворяющую уравнению (2.65) в области  $G$  и граничному условию на  $S$  вида

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = v, \quad (2.68)$$

где  $\alpha, \beta, v$  — заданные непрерывные функции на  $S$ , причем  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0$ .

Выделяют следующие три типа граничных условий (2.68).

1. Граничное условие первого рода ( $\alpha = 1, \beta = 0$ ):

$$u|_S = u_0. \quad (2.69)$$

2. Граничное условие второго рода ( $\alpha = 0, \beta = 1$ ):

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = u_1. \quad (2.70)$$

3. Граничное условие третьего рода ( $\alpha \geq 0, \beta = 1$ ):

$$\alpha u + \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = u_2. \quad (2.71)$$

Соответствующие краевые задачи называются *краевыми задачами первого, второго и третьего рода*.

Для уравнений Лапласа и Пуассона краевая задача первого рода называется *задачей Дирихле*: найти функцию  $u \in C^{(2)}(G) \cap C(\bar{G})$ , удовлетворяющую в области  $G$  уравнению

$$\Delta u = -f$$

и граничному условию (2.69) на поверхности  $S$ . Функция  $u_0$  непрерывна на  $S$ . Точный смысл граничного условия (2.69) таков

$$\lim_{M \rightarrow P} u(M) = u_0(P), \quad M \in G, \quad P \in S.$$

Краевая задача второго рода

$$\Delta u = -f, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = u_1$$

называется *задачей Неймана*: найти функцию  $u \in C^{(2)}(G) \cap C^{(1)}(\bar{G})$ , удовлетворяющую в области  $G$  уравнению Пуассона (или Лапласа) и граничному условию (2.70) на поверхности  $S$ . Функция  $u_1$  непрерывна на  $S$ . Точный смысл граничного условия (2.70) таков

$$\lim_{M \rightarrow P} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_M = u_1(P), \quad M \in G, \quad P \in S.$$

Функция  $u_1(P)$  должна также удовлетворять дополнительному условию разрешимости задачи Неймана. Действительно, воспользуемся равенством

$$\int_G \Delta u d\tau = \int_S \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \Rightarrow - \int_G f d\tau = \int_S u_1 d\sigma.$$

В случае уравнения Лапласа условие разрешимости принимает вид

$$\int_S u_1 d\sigma = 0;$$

последнее обычно пишут в виде

$$\bar{u}_1|_S = \frac{1}{S} \int_S u_1 d\sigma = 0,$$

т. е. среднее значение функции  $u_1(P)$  на поверхности должно быть равно нулю.

Краевые задачи первого, второго и третьего рода для уравнения Лапласа носят названия *гармонических краевых задач*.

Аналогично ставятся краевые задачи для уравнения (2.65) и во внешности ограниченной области  $G$  (*внешние краевые задачи*). Отличие состоит в том, что, помимо граничного условия (2.68) на  $S$ , задаются еще условия на бесконечности. Такими условиями, например, могут быть условия вида  $u(x) = O(1)$  или  $u(x) = o(1)$  при  $|x| \rightarrow \infty$  для уравнения Пуассона.

### СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА

Для уравнения колебаний (2.63) гиперболического типа смешанная задача ставится следующим образом: найти функцию  $u(x, t) \in C^{(2)}(\Pi_T) \cap C^{(1)}(\bar{\Pi}_T)$ , удовлетворяющую уравнению (2.63) в цилиндре  $\Pi_T$ , начальным условиям (2.66) при  $t = 0, x \in \bar{G}$  (на нижнем основании цилиндра  $\Pi_T$ ) и граничному условию

(2.68) (на боковой поверхности цилиндра  $\Pi_T$ ). При этом необходимо должны быть выполнены условия гладкости:

$$F \in C(\Pi_T), u_0 \in C^{(1)}(\bar{G}), u_1 \in C(\bar{G}), v \in C(S \times [0, T])$$

и условия согласованности:

$$\alpha u_0 + \beta \frac{\partial u_0}{\partial n} \Big|_S = v|_{t=0}.$$

Аналогично для уравнения диффузии (2.64) параболического типа смешанная задача ставится так: найти функцию  $u(x, t) \in C^{(2)}(\Pi_T) \cap C(\bar{\Pi}_T)$ ,  $\text{grad}_x(u) \in C(\bar{\Pi}_T)$ , удовлетворяющую уравнению (2.64) в цилиндре  $\Pi_T$ , начальному условию (2.67) и граничному условию (2.68).

## 2.8. ПОНЯТИЕ О КОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Поскольку задачи математической физики представляют собой математические модели реальных физических процессов, то их постановки должны удовлетворять следующим естественным требованиям:

- 1) решение должно *существовать* в каком-то классе функций  $M_1$ ;
- 2) решение должно быть единственным в некотором классе функций  $M_2$ ;
- 3) решение должно *непрерывно* зависеть от данных задачи (начальных и граничных данных, свободного члена, коэффициентов уравнения и т. д.).

Непрерывная зависимость решения  $u$  от данного задачи  $\tilde{u}$  означает следующее: пусть последовательность данных  $\tilde{u}_k, k = 1, 2, \dots$ , в каком-то смысле стремится к  $\tilde{u}$  и  $u_k (k = 1, 2, \dots)$ ,  $u$  — соответствующие решения задачи. Тогда должно быть  $u_k \rightarrow u$  при  $k \rightarrow \infty$  в смысле сходимости, выбранной надлежащим образом. Требование непрерывной зависимости решения обуславливается тем обстоятельством, что физические данные, как правило, определяются из эксперимента приближенно, и поэтому нужно быть уверенным в том, что решение задачи в рамках выбранной математической модели не будет существенно зависеть от погрешностей измерений.

Задача, удовлетворяющая перечисленным требованиям, называется *корректно поставленной* (по Адамару), а множество функций  $M_1 \cap M_2$  — *классом корректности*. Задача, не удовлетворяющая хотя бы одному из условий 1–3, называется *некорректно поставленной*.

К некорректно поставленным задачам часто приводят *обратные задачи математической физики*: по некоторой информации о решении прямой задачи восстановить некоторые неизвестные физические величины, определяющие эту задачу (источники, краевые условия, коэффициенты уравнения и т. д.).

### ЗАМЕЧАНИЕ О КЛАССЕ ФУНКЦИЙ, СРЕДИ КОТОРЫХ ИЩЕТСЯ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Исследование корректности постановки задач математической физики представляет важнейшую и притом весьма трудную задачу теории уравнений в частных производных. Каждый тип задач имеет свои условия, обеспечивающие корректность постановки той или иной краевой задачи. Например, для уравнения Лапласа можно выделить группу условий, гарантирующих корректность поста-

новки соответствующей краевой задачи. Искомая функция, дающая решение краевой задачи для уравнения в частных производных второго порядка, должна удовлетворять следующим условиям:

- 1) быть непрерывной в области, в которой ставится задача, вплоть до границы области;
- 2) внутри области иметь непрерывные вторые производные и удовлетворять заданному уравнению;
- 3) удовлетворять заданному краевому условию;
- 4) если область трехмерна и бесконечна, то при перемещении к бесконечно удаленной точке вдоль любого луча, принадлежащего области, стремиться к нулю.

Таким образом, наиболее естественное требование — производные существуют и непрерывны во всей области; порядок производных определяется порядком уравнения.

Изложенные в предыдущих пунктах постановки краевых задач характеризуются тем, что решения их предполагаются достаточно гладкими и они должны удовлетворять уравнению в каждой точке области задания этого уравнения. Такие решения называются *классическими*, а постановки соответствующих краевых задач — *классическими постановками*. Таким образом, классические постановки задач уже предполагают достаточную гладкость входящих в задачу данных.

### О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Докажем единственность решения основных краевых задач для уравнения Пуассона, а также для уравнений теплопроводности и колебаний.

#### ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Решение задачи Дирихле ищется в классе функций  $u \in C^{(2)}(G) \cap C(\bar{G})$ . Утверждается, что решение задачи Дирихле в этом классе функций единственно. Докажем эту теорему в случае, когда  $u \in C^{(2)}(G) \cap C^{(1)}(\bar{G})$ .

Допустим, что существуют два решения задачи  $u_1$  и  $u_2$ . Пусть  $\Psi = u_1 - u_2$ . Очевидно, что

$$\Delta \Psi = 0, \quad \Psi \in C^{(2)}(G), \quad \Psi|_S = 0, \quad \Psi \in C^{(1)}(S). \quad (2.72)$$

Доказательство теоремы сводится к доказательству того, что в данном классе функций нет другого решения задачи (2.72), кроме как решения  $\Psi = 0$ . Это последнее решение очевидно в силу однородности задачи (2.72).

Воспользуемся тождеством

$$\int_G [\Psi \Delta \Psi + (\nabla \Psi)^2] d\tau = \int_S \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\sigma, \quad \Psi \in C^{(2)}(G) \cap C^{(1)}(\bar{G}). \quad (2.73)$$

В силу (2.72) из тождества (2.73) находим

$$\int_G (\nabla \Psi)^2 d\tau = 0 \Rightarrow \nabla \Psi = 0 \Rightarrow \Psi = \text{const}, \quad x \in G.$$

Так как функция  $\Psi$  предполагается непрерывной и  $\Psi = 0$  на  $S$ , то  $\Psi = 0$  в  $G$ , следовательно,  $u_1 = u_2$  в  $G$ . Утверждение доказано.

## ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА

Решение задачи Неймана ищется в классе функций  $u \in C^{(2)}(G) \cap C^{(1)}(\bar{G})$ . Утверждается, что в этом классе функций задача Неймана имеет единственное решение, определяемое с точностью до аддитивной постоянной.

Допустим, что существует два решения задачи  $u_1$  и  $u_2$ . Пусть  $\Psi = u_1 - u_2$ . Очевидно, что

$$\Delta\Psi = 0, \quad \Psi \in C^{(2)}(G), \quad \left. \frac{\partial\Psi}{\partial n} \right|_S = 0, \quad \Psi \in C^{(1)}(S).$$

Применяем тождество (2.73). Будем иметь

$$\int_G (\nabla\Psi)^2 d\tau = 0 \Rightarrow \nabla\Psi = 0 \Rightarrow \Psi = \text{const} \Rightarrow u_1 = u_2 + \text{const}, \quad x \in G.$$

Таким образом, решение задачи Неймана определяется с точностью до аддитивной постоянной.

## ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Третья краевая задача формулируется следующим образом: найти функцию  $u \in C^{(2)}(G) \cap C^{(1)}(\bar{G})$ , удовлетворяющую в области  $G$  уравнению Пуассона (или Лапласа) и граничному условию (2.71) на поверхности  $S$ :

$$\Delta u = -f, \quad x \in G, \quad \alpha u + \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = u_2, \quad x \in S. \quad (2.74)$$

Утверждается, что задача (2.74) в рассматриваемом классе функций имеет единственное решение.

Допустим, что существуют два решения задачи  $u_1$  и  $u_2$ . Пусть  $\Psi = u_1 - u_2$ . Очевидно, что

$$\Delta\Psi = 0, \quad \Psi \in C^{(2)}(G), \quad \left. \frac{\partial\Psi}{\partial n} + \alpha\Psi \right|_S = 0, \quad \Psi \in C^{(1)}(S). \quad (2.75)$$

Задача (2.75) всегда имеет тривиальное решение  $\Psi = 0$ . Покажем, что другого решения не существует. Воспользуемся тождеством (2.73). С учетом (2.75) будем иметь

$$\int_G (\nabla\Psi)^2 d\tau = - \int_S \alpha\Psi^2 d\sigma \Rightarrow \int_G (\nabla\Psi)^2 d\tau + \int_S \alpha\Psi^2 d\sigma = 0 \quad (\alpha \geq 0),$$

последнее равенство возможно лишь тогда, если каждый из интегралов будет равен нулю. Следовательно,

$$\left. \begin{array}{l} \nabla\Psi = 0, \quad x \in G \\ \Psi = 0, \quad x \in S \end{array} \right\} \Rightarrow \Psi = 0, \quad x \in \bar{G} \Rightarrow u_1 = u_2, \quad x \in \bar{G}.$$

Таким образом, единственность решения третьей краевой задачи доказана.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ,  
СВЯЗАННЫХ С УРАВНЕНИЕМ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

В случае уравнения Гельмгольца единственность решения задачи может не иметь места для некоторых определенных значений волнового числа  $k$ . Рассмотрим, например, первую краевую задачу для уравнения Гельмгольца: найти функцию  $u \in C^{(2)}(G) \cap C(\bar{G})$ , удовлетворяющую следующим условиям:

$$\Delta u + k^2 u = f, \quad x \in G, \quad u|_S = g, \quad x \in S. \quad (2.76)$$

Пусть  $u_1$  и  $u_2$  — решения задачи (2.76). Пусть  $\Psi = u_1 - u_2$ . Очевидно, что

$$\begin{aligned} \Delta \Psi + k^2 \Psi &= 0, \\ \Psi|_S &= 0, \quad \Psi \in C^{(2)}(G) \cap C(\bar{G}). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Задача (2.77), очевидно, имеет решение  $\Psi = 0$ . Утверждается, что, кроме тривиального решения, существуют другие решения при некоторых значениях волнового числа  $k$ . Построим такие ненулевые решения. Рассмотрим область в виде параллелепипеда со сторонами  $a, b, c$ . Будем искать решение задачи (2.77) в виде

$$\Psi = A \sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{c}\right), \quad A = \text{const}, \quad l, m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.78)$$

После подстановки (2.78) в уравнение (2.77) получим

$$A \left[ k^2 - \left( \frac{l^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{c^2} \right) \right] \sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{c}\right) = 0. \quad (2.79)$$

Уравнение (2.79) удовлетворится, если

$$k = \pi \sqrt{\left(\frac{l}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{c}\right)^2},$$

кроме того, удовлетворяются все граничные условия

$$\Psi|_{x=0,a} = 0, \quad \Psi|_{y=0,b} = 0, \quad \Psi|_{z=0,c} = 0.$$

Таким образом, видим, что имеется ненулевое решение задачи (2.77).

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\Delta u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial u}{\partial t} = -f, \quad x \in G, \quad t > 0.$$

Пусть начальные условия имеют вид

$$u|_{t=0} = \varphi(x).$$

Граничные условия будем рассматривать первого, второго или третьего рода, т. е.

$$u|_S = \varphi_1(t),$$

либо

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = \varphi_2(t),$$

либо

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} + hu \right|_S = \varphi_3(t), \quad h > 0.$$

Докажем, что решение задачи единственно в классе  $A$ . Мы скажем, что функция  $u \in A$ , если:

- 1) функция  $u$  непрерывна вместе с первой и второй производной по  $x = (x_1, x_2, x_3)$  во всех точках области  $G$  при  $t > 0$ ;
- 2) производная  $\partial u / \partial t$  непрерывна в  $G$  при  $t > 0$ ;
- 3) функция  $u$  непрерывна вместе с первой производной по  $x = (x_1, x_2, x_3)$  в замкнутой области  $G + S$ ,  $t \geq 0$ .

Предположим, что существуют два решения  $u_1, u_2 \in A$ . Пусть  $\Psi = u_1 - u_2$ . Ясно, что  $\Psi \in A$  и для  $\Psi$  будем иметь следующее однородное уравнение:

$$\Delta \Psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0, \quad x \in G, \quad t > 0, \quad (2.80)$$

с однородными начальными:

$$\Psi|_{t=0} = 0 \quad (2.81)$$

и граничными условиями:

$$\Psi|_S = 0 \quad (2.82)$$

либо

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right|_S = 0, \quad (2.83)$$

либо

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial n} + h\Psi \right|_S = 0. \quad (2.84)$$

Задача (2.80)–(2.84), очевидно, имеет тривиальное решение. Покажем, что другого решения не существует. Рассмотрим следующий интеграл, который в силу (2.80) равен нулю:

$$J = \int_0^t dt \iiint_G \Psi \left[ \Delta \Psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right] d\tau = 0.$$

Преобразуем этот интеграл с помощью тождества (2.73). Будем иметь

$$\begin{aligned} J &= \int_0^t dt \left\{ - \iiint_G (\nabla \Psi)^2 d\tau + \iint_S \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\sigma - \iiint_G \frac{1}{v^2} \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial t} d\tau \right\} = \\ &= - \int_0^t dt \iiint_G (\nabla \Psi)^2 d\tau + \int_0^t dt \iint_S \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\sigma - \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \left( \iiint_G \frac{\Psi^2}{2v^2} d\tau \right) dt = \\ &= - \int_0^t dt \iiint_G (\nabla \Psi)^2 d\tau + \int_0^t dt \iint_S \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\sigma - \iiint_G \frac{\Psi^2}{2v^2} d\tau + \iiint_G \frac{\Psi^2}{2v^2} \Big|_{t=0} d\tau. \end{aligned}$$

Для условий первого и второго рода будем иметь

$$0 = - \int_0^t dt \iiint_G (\nabla \Psi)^2 d\tau - \iiint_G \frac{\Psi^2}{2v^2} d\tau \Rightarrow \int_0^t dt \iiint_G (\nabla \Psi)^2 d\tau + \iiint_G \frac{\Psi^2}{2v^2} d\tau = 0.$$

Здесь оба интеграла не отрицательны, следовательно, каждый из них равен нулю, а значит,  $\Psi = 0$ ,  $x \in \bar{G}$ ,  $t \geq 0 \Rightarrow u_1 = u_2$ . В случае условий третьего рода будем иметь

$$\int_0^t dt \iiint_G (\nabla \Psi)^2 d\tau + \int_0^t dt \iint_S h \Psi^2 d\sigma + \iiint_G \frac{\Psi^2}{2v^2} d\tau = 0 \Rightarrow \Psi = 0, \quad x \in \bar{G}, \quad t \geq 0 \Rightarrow u_1 = u_2.$$

Таким образом, единственность решения задачи для уравнения теплопроводности в классе функций  $A$  доказана.

#### ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ СТРУНЫ

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -f, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \quad (2.85)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0; \quad (2.86)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x). \quad (2.87)$$

Докажем единственность решения задачи (2.85)–(2.87) в классе функций  $A$ . Функция  $u \in A$ , если:

1) функция  $u$  непрерывна вместе с первой и второй производной по  $x$  и  $t$  в открытой области  $G = \{0 < x < l, t > 0\}$ ;

2) функция  $u$  непрерывна и имеет непрерывные производные по  $x$  и  $t$  первого порядка в замкнутой области  $G + S = \{0 \leq x \leq l, t \geq 0\}$ .

Предположим, что существуют два решения задачи  $u_1$  и  $u_2$ . Пусть  $\Psi = u_1 - u_2$ . Тогда  $\Psi \in A$  и для  $\Psi$  будем иметь следующую однородную задачу:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \quad (2.88)$$

$$\Psi|_{x=0} = 0, \quad \Psi|_{x=l} = 0;$$

$$\Psi|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0.$$

Рассмотрим интеграл (который равен нулю в силу (2.88))

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t dt \int_0^l \frac{\partial \Psi}{\partial t} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right] dx = \int_0^t dt \int_0^l \frac{\partial \Psi}{\partial t} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} dx - \int_0^t dt \int_0^l \frac{1}{v^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} dx = \\ &= \int_0^t dt \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial x} dx \right] - \int_0^t dt \int_0^l \frac{1}{v^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} dx = \\ &= \int_0^t \frac{\partial \Psi}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=l} dt - \int_0^t dt \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 \right] dx = \\ &= \int_0^t \frac{\partial \Psi}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=l} dt - \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 \right] \Big|_{t=0} dx. \end{aligned}$$



Учитывая условия, накладываемые на функцию  $\Psi$ , будем иметь

$$\Psi|_{x=0} = 0, \quad \Psi|_{x=l} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right|_{x=l} = 0 \Rightarrow \int_0^t \left. \frac{\partial \Psi}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_{x=0}^{x=l} dt = 0;$$

$$\int_0^l \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 \right] dx = 0.$$

Таким образом, будем иметь

$$\int_0^l \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 \right] dx = 0.$$

Последнее равенство возможно в том случае, когда

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0; \quad 0 < x < l; \quad t > 0.$$

Это означает, что  $\Psi = \text{const}$ . Функция  $\Psi$  непрерывна, и на границе  $\Psi = 0$ , следовательно,  $\Psi = 0$  в области, а тогда  $u_1 = u_2$  для  $0 < x < l, t > 0$ .

Таким образом, единственность решения задачи о колебаниях струны доказана в классе функций  $A$ .

#### Примечание.

В процессе доказательства единственности решения задачи о колебаниях струны естественным образом возник интеграл

$$\frac{1}{2} \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 \right] dx = 0.$$

Учитывая, что  $v^2 = T/\rho$ , этот интеграл можно переписать в виде

$$\frac{1}{T} \int_0^l \left[ \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 \right] dx = 0. \quad (*)$$

Величина  $K = \int_0^l \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 dx$  является кинетической энергией струны, а  $\Pi = \int_0^l \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 dx$  — ее потенциальная энергия, так что функция

$$E = K + \Pi = \int_0^l \left[ \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

выражает полную энергию струны. С учетом (\*) получаем равенство  $E = 0$ , которое является математическим выражением закона сохранения энергии для свободных колебаний любой физической

природы при нулевых граничных условиях, т. е. когда нет притока или рассеивания энергии в процессе колебаний. Неоднородность в граничных условиях и неоднородность в уравнении означает наличие постоянно действующих факторов, подводящих или рассеивающих энергию. Неоднородность в начальных условиях означает, что в начальный момент времени струна обладала некоторым запасом энергии, который сохраняется в течение всего процесса колебаний.

## 2.9. ПОНЯТИЕ ОБ ОБЩЕМ ИНТЕГРАЛЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Как мы знаем, для обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка вся совокупность решений (за исключением «особых» решений) представляется функцией от независимой переменной  $x$ , а также от  $n$  произвольных постоянных интегрирования  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Наоборот, для любого семейства функций  $u = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ , зависящего от  $n$  параметров, существует дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка, решение которого  $u = \varphi$  получается исключением параметров  $C_1, C_2, \dots, C_n$  из уравнения  $u = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$  и  $n$  уравнений

$$\begin{aligned} u' &= \varphi'(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ &\dots \\ u^{(n)} &= \varphi^{(n)}(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{aligned}$$

Для дифференциальных уравнений с частными производными дело обстоит сложнее. Здесь тоже можно искать всю совокупность решений или «общее решение», т. е. такое решение, которое дает любое частное решение после того, как фиксированы некоторые «произвольные» элементы (опять за исключением некоторых «особых» решений). В случае дифференциальных уравнений с частными производными эти произвольные элементы уже не могут быть постоянными интегрирования, а должны содержать произвольные функции; вообще говоря, число этих произвольных функций равно порядку дифференциального уравнения. Число аргументов этих произвольных функций на единицу меньше числа аргументов решения  $u$ . Более точная формулировка этого утверждения содержится в теореме существования Коши — Ковалевской [4], [25]. Здесь мы только получим некоторые сведения, разобрав несколько примеров.

Пожалуй, самое яркое отличие здесь заключается в том, что задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям в частных производных, почти нигде не встречаются в такой форме, чтобы искомым являлось общее решение. Мало того, если вы располагаете таким решением, то знание его, за редким исключением, почти ничего не дает для решения основной частной задачи. Ведь общее решение уравнения в частных производных зависит от произвольных функций и для нахождения частного решения придется рассматривать систему сложных функциональных соотношений, так что отыскание произвольных функций часто оказывается практически невозможным.

## ПРИМЕРЫ

Рассмотрим определение общих интегралов некоторых дифференциальных уравнений в частных производных. Следует отметить, что этот вопрос тесно связан с преобразованием дифференциального уравнения в частных производных к каноническому виду.

**Пример 1.** Пусть  $u = u(x, y)$ . Дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

для функции  $u(x, y)$  означает, что  $u$  не зависит от  $y$ ; следовательно,  $u = w(x)$ , где  $w(x)$  — произвольная функция  $x$ .

**Пример 2.** Для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0,$$

где  $u = u(x, y)$ , можно сразу получить общее решение вида  $u = w(x) + v(y)$ . Здесь  $w(x)$  и  $v(y)$  — произвольные дифференцируемые функции.

**Пример 3.** Пусть  $u = u(x, y)$ . Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Найдем общий интеграл этого уравнения. Для этого сделаем замену переменных

$$x + y = \xi, \quad x - y = \eta.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{aligned}$$

и уравнение принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Значит,  $u = f(\xi)$ . Возвращаясь к старым переменным, получим  $u = f(x + y)$ , причем  $f$  — любая дифференцируемая функция.

**Пример 4.** Пусть  $u = u(x, y)$ . Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Сделаем замену переменных

$$\frac{y}{x} = \xi, \quad y = \eta.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{y}{x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot 0 = -\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{y}{x^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{1}{x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot 1 = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{1}{x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{aligned}$$

и уравнение принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Значит,  $u = f(\xi)$ . Следовательно, общий интеграл уравнения будет  $u = f(y/x)$ , причем  $f$  — любая дифференцируемая функция.

**Пример 5.** Пусть  $u = u(x, y)$ . Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Сделаем замену переменных

$$x + y = \xi, \quad x - y = \eta.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

и уравнение принимает вид

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Значит,  $u = F(\xi) + G(\eta)$ . Следовательно, общий интеграл уравнения будет  $u = F(x + y) + G(x - y)$ , где  $F$  и  $G$  — произвольные дифференцируемые функции.

**Пример 6.** Пусть  $u = u(x, y)$ . Общий интеграл дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

дается функцией  $u = F(x + iy) + G(x - iy)$ , где  $F$  и  $G$  — произвольные дифференцируемые функции ( $i = \sqrt{-1}$ ).

### ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩЕГО ИНТЕГРАЛА К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

**1.** Пусть некоторый процесс описывается одномерным волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Обозначим  $vt = y$ , тогда уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Следовательно, общий интеграл волнового уравнения будет

$$u = F(x + vt) + G(x - vt).$$

Причем здесь  $F(x + vt)$  — плоская волна, распространяющаяся влево от начала координат со скоростью  $v$ , форма которой (профиль) определяется функцией  $F$ . Такая волна называется обратной волной. Функция  $G(x - vt)$  описывает плоскую волну, распространяющуюся вправо от начала координат со скоростью  $v$  — прямая волна. Таким образом, рассматриваемый процесс представляет собой результат наложения двух волн.

2. Рассмотрим процесс, описываемый уравнением

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Это трехмерное волновое уравнение, записанное в сферических координатах в предположении, что процесс не зависит от угловых координат (радиальные колебания).

Сделаем замену переменных  $u = \frac{w}{r}$ , тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} w, & r^2 \frac{\partial u}{\partial r} &= r \frac{\partial w}{\partial r} - w, \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

В результате получим уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Откуда

$$w = F(r + vt) + G(r - vt) \Rightarrow u = \frac{F(r + vt)}{r} + \frac{G(r - vt)}{r}.$$

Первое слагаемое представляет собой сферическую волну, распространяющуюся из бесконечности в начало координат со скоростью  $v$  (обратная волна), второе слагаемое — сферическая волна, распространяющаяся со скоростью  $v$  от начала координат в бесконечность (прямая волна). Таким образом, и в этом случае общее решение уравнения представляет собой наложение прямой и обратной волны.

### КОЛЕБАНИЯ НЕОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ. МЕТОД ДАЛАМБЕРА

Пусть требуется найти функцию  $u = u(x, t)$ , непрерывную в замкнутой области  $\{-\infty < x < \infty, t \geq 0\}$ , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (2.89)$$

и начальным условиям:

$$u(x, 0) = \Phi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \Psi(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.90)$$

Общий интеграл уравнения имеет вид

$$u = F(x + vt) + G(x - vt) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = vF'(x + vt) - vG'(x - vt).$$

При  $t = 0$  будем иметь

$$F(x) + G(x) = \Phi(x), \quad F'(x) - G'(x) = \frac{1}{v}\Psi(x).$$

Откуда находим

$$2F'(x) = \Phi'(x) + \frac{1}{v}\Psi(x), \quad 2G'(x) = \Phi'(x) - \frac{1}{v}\Psi(x)$$

или

$$F(x) = \frac{1}{2}\Phi(x) + \frac{1}{2v} \int_0^x \Psi(\xi) d\xi + c_1, \quad G(x) = \frac{1}{2}\Phi(x) - \frac{1}{2v} \int_0^x \Psi(\xi) d\xi + c_2.$$

После подстановки в выражение для  $u$  получим

$$u = \frac{1}{2}\Phi(x + vt) + \frac{1}{2v} \int_0^{x+vt} \Psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2}\Phi(x - vt) - \frac{1}{2v} \int_0^{x-vt} \Psi(\xi) d\xi + c,$$

где  $c = c_1 + c_2$ . Легко видеть, что  $c = 0$ . Это следует из начального условия  $u(x, 0) = \Phi(x)$ .

Итак,

$$u = \frac{1}{2}[\Phi(x + vt) + \Phi(x - vt)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \Psi(\xi) d\xi. \quad (2.91)$$

Формулу (2.91) называют формулой Даламбера решения задачи Коши для волнового уравнения (2.89).

Рассмотрим качественную картину колебания неограниченной струны. Для этого изучим два частных случая.

1. Пусть функция  $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \Psi(x) \equiv 0$ , а функция  $u(x, 0) = \Phi(x)$  отлична от нуля лишь в конечном промежутке, например  $-a \leq x \leq a$ . Тогда решение дается формулой

$$u = \frac{1}{2}[\Phi(x + vt) + \Phi(x - vt)];$$

слагаемое  $\frac{1}{2}\Phi(x - vt)$  есть постоянное по форме возмущение, перемещающееся со скоростью  $v$  в положительном направлении оси  $x$ . Это следует из того, что, поместив начало неподвижной системы координат  $\xi$  в точке  $x = vt$ , т. е. считая  $\xi = x - vt$ , мы будем видеть в этой неподвижной системе координат возмущение постоянным. Аналогично, слагаемое  $\frac{1}{2}\Phi(x + vt)$  есть такое же по форме возмущение, перемещающееся со скоростью  $v$  в противоположном направлении, т. е. в отрицательном направлении оси  $x$ . Эти возмущения называются *волнами*. Первое — *прямая волна*, а второе — *обратная волна*. Вначале волны налегают

друг на друга, а затем расходятся и потом все больше разбегаются в разные стороны друг от друга. В каждом месте струны после прохождения этих волн воцаряется покой.

2. Пусть функция  $u(x, 0) = \Phi(x) \equiv 0$ , а функция  $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \Psi(x)$  отлична от нуля лишь в конечном промежутке, например  $-a \leq x \leq a$ . В этом случае говорят, что струна не имеет начального возмущения, а имеет начальный импульс.

Рассмотрим функцию  $\psi(x)$ , первообразную для функции  $\Psi(x)$ , равную нулю для  $x \in (-\infty, -a]$ . Для  $x \geq a$  эта функция равна постоянной, отличной, вообще говоря, от нуля. Очевидно, эта постоянная равна

$$\int_{-a}^a \Psi(\xi) d\xi.$$

Решение в этом случае дается формулой

$$u = \frac{1}{2v} [\psi(x + vt) - \psi(x - vt)].$$

Таким образом, в этом случае по струне опять бегут две волны — прямая и обратная, которые отличаются лишь знаком одна от другой.

Там, где обе волны уже прошли — прямая и обратная, — струна придет в состояние покоя, но не вернется, вообще говоря, к исходному состоянию. В струне останется так называемое остаточное смещение.

До сих пор мы не накладывали никаких ограничений на функции  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$ , фигурирующие в начальных условиях (2.90). Формула (2.91) будет давать решение задачи Коши в том случае, если функция  $\Phi(x)$  обладает производными первого и второго порядков, а функция  $\Psi(x)$  — производной первого порядка. К этому выводу мы придем, когда захотим убедиться в правильности полученного решения путем подстановки его в уравнение (2.89). (Проверьте!)

Решение  $u$  зависит от начальных функций  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$  только в интервале  $(x - vt, x + vt)$ , причем  $\Phi(x)$  задана только в концах этого интервала. Значения функций  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$  за пределами этого интервала не играют роли при определении решения  $u$ .

Метод Даламбера допускает распространение и на более сложные случаи.

## 2.10. ПОНЯТИЕ ОБ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЯХ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Во многих задачах математической физики, с которыми мы встречались, существование решения устанавливалось лишь при значительных ограничениях на краевые условия. В наиболее интересных задачах данные могут иметь довольно сильные особенности. Поэтому для таких задач классические постановки уже оказываются недостаточными. Чтобы поставить такие задачи, приходится отказываться (частично или полностью) от требований гладкости решения в области или вплоть до границы, вводить так называемые *обобщенные решения*. Но тогда встает вопрос о том, какие функции можно называть решениями уравнения. Чтобы сделать это, необходимо существенно

обобщить понятие производной и вообще понятие функции, т. е. ввести так называемые *обобщенные функции*. Концепция обобщенного решения широко используется в книге В. С. Владимирова [4]\*.

Мы введем одно понятие, которое позволит нам не заниматься далее этими вопросами.

Рассмотрим для определенности задачу Коши (2.89)–(2.90) для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

при начальных условиях:

$$u(x, 0) = \Phi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \Psi(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Как мы только что показали, решением этой задачи будет функция, определяемая по формуле (2.91):

$$u = \frac{1}{2} [\Phi(x+vt) + \Phi(x-vt)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \Psi(\xi) d\xi.$$

Эта формула дает классическое решение волнового уравнения только в предположении, что  $\Phi(x)$  имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, а  $\Psi(x)$  — до первого.

Задача Коши (2.89)–(2.90) поставлена корректно. Действительно, полученное решение единственно, что следует из способа вывода формулы (2.91). Несомненно далее непрерывная зависимость решения (2.91) от начальных данных. В самом деле, для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta > 0$ , что если заменить  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$  на  $\tilde{\Phi}(x)$  и  $\tilde{\Psi}(x)$  так, что

$$|\Phi(x) - \tilde{\Phi}(x)| < \delta, \quad |\Psi(x) - \tilde{\Psi}(x)| < \delta, \quad -\infty < x < \infty,$$

то разность между новым решением  $\tilde{u}(x, t)$  и первоначальным  $u(x, t)$  будет по абсолютной величине меньше  $\varepsilon$  на любом конечном отрезке времени  $[0, T]$ . Это утверждение легко следует из формулы (2.91). Действительно, будем иметь

$$\begin{aligned} |u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| &\leq \frac{1}{2} |\Phi(x+vt) - \tilde{\Phi}(x+vt)| + \frac{1}{2} |\Phi(x-vt) - \tilde{\Phi}(x-vt)| + \\ &+ \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} |\Psi(\xi) - \tilde{\Psi}(\xi)| d\xi, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2v} \cdot 2vt < \delta(1+T).$$

Остается только принять  $\delta = \varepsilon/(1+T)$  и мы получаем  $|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| < \varepsilon$ .

При решении конкретных физических задач может оказаться, что функции  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$  не удовлетворяют указанным условиям. Тогда нельзя утверждать

\* См. также: Владимиров, В. С. Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979.



дать, что существует решение задачи Коши. В этом случае вводят так называемые обобщенные решения задачи Коши.

Будем называть обобщенным решением задачи Коши для уравнения (2.89) при начальных условиях (2.90) функцию  $u(x, t)$ , являющуюся пределом равномерно сходящейся последовательности решений  $u_n(x, t)$  уравнения (2.89) при начальных условиях

$$u_n(x, 0) = \Phi_n(x), \quad \left. \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|_{t=0} = \Psi_n(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

если последовательность функций  $\Phi_n(x)$ , имеющих непрерывные вторые производные, сходится равномерно к  $\Phi(x)$ , а последовательность функций  $\Psi_n(x)$ , имеющих непрерывные первые производные, сходится равномерно к  $\Psi(x)$ .

Нетрудно доказать существование и единственность обобщенного решения задачи Коши для уравнения (2.89) при любых непрерывных функциях  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$ . Это обобщенное решение также дается формулой (2.91).

Введение обобщенных решений уравнения (2.89) оправдано тем, что, во-первых, для существования обычного (классического) решения задачи Коши приходится на заданные функции  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$  налагать весьма жесткие условия гладкости, в то время как для существования обобщенных решений такой гладкости от заданных функций не требуется. Во-вторых, функции  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$  в конкретных задачах физики известны нам только приближенно. Поэтому соответствующая функция  $u(x, t)$ , даваемая формулой (2.91), также является только некоторым приближением к точному решению поставленной задачи.

Следовательно, совершенно безразлично, является ли это приближение обычным или обобщенным решением задачи Коши. Важно, что оно будет мало отличаться от истинного решения, если только функции  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$  равномерно мало отличаются от истинных начальных значений  $u(x, 0)$  и  $\partial u(x, 0)/\partial t$ .

Мы говорили сейчас об обобщенном решении задачи Коши для одномерного волнового уравнения. То же самое относится к общему волновому уравнению, к уравнению теплопроводности и уравнению Пуассона.

Следует отметить, что обобщенное решение может быть введено различными способами. Мы определили обобщенное решение как предел последовательности классических решений. Такое понятие обобщенного решения не всегда удобно — оно трудно проверяемо. Чтобы убедиться, что функция  $u(x, t)$  является обобщенным решением, необходимо построить последовательность гладких решений, сходящуюся к ней.

Обобщенное решение можно определить через интегральное тождество. Для этого рассмотрим класс функций  $\eta(x, t)$ , имеющих в области  $\Omega_\eta \subset \Omega$  ( $\Omega$  — область определения уравнения (2.89)) непрерывные производные до второго порядка включительно, и  $\eta(x, t) = 0$ , если точка  $(x, t) \notin \Omega_\eta$ .

Если уравнение (2.89) умножить на функцию  $\eta(x, t)$  и проинтегрировать по области  $\Omega$ , то можно записать следующее интегральное равенство:

$$\int_{\Omega_\eta} \eta \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] dx dt = 0. \quad (*)$$

Это интегральное равенство (\*) и дифференциальное уравнение (2.89) эквивалентны в классе функций, имеющих непрерывные производные до второго порядка включительно. Это значит, что если функция  $u(x, t)$  является классическим решением дифференциального уравнения (2.89), то для нее выполняется интегральное равенство (\*), и, наоборот, если для любой функции  $\eta(x, t)$  выполняется интегральное равенство (\*), то это возможно только для функции  $u(x, t)$ , являющейся решением дифференциального уравнения (2.89).

Преобразуем уравнение (\*) двукратным интегрированием по частям по переменным  $x$  и  $t$ . Так как функция  $\eta(x, t)$  и ее производные обращаются в нуль вне области  $\Omega_\eta$ , то внеинтегральные члены при интегрировании обратятся в нуль и мы получим интегральное равенство:

$$\int_{\Omega_\eta} u \left[ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right] dx dt = 0. \quad (**)$$

Функция  $u(x, t)$  называется обобщенным решением задачи Коши для уравнения (2.89) при начальных условиях (2.90), если для любой функции  $\eta(x, t)$  выполняется равенство (\*\*).

Можно показать, что классическое решение уравнения (2.89) удовлетворяет этому определению.

Так как в процессе преобразования равенства (\*) в равенство (\*\*) производные от функции  $u(x, t)$  «перешли» к функции  $\eta(x, t)$ , то в качестве обобщенного решения дифференциального уравнения (2.89) теперь можно рассматривать также и такие функции, которые не имеют во всех точках области  $\Omega$  производных, предписываемых дифференциальным уравнением (2.89).

### ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ ДИРАКА И ЕЕ СВОЙСТВА

Функция, о которой пойдет речь в данном подразделе, рассматривалась в работах французских математиков О. Коши, С. Пуассона, а также немецкого математика и механика Г. Кирхгофа. Широко использовал дельта-функцию О. Хэвисайд, крупнейший английский математик, физик и инженер, он называл ее импульсной функцией. В работах О. Хэвисайда эта функция стала действенным инструментом, позволяющим эффективно решать задачи математической физики. О. Хэвисайд получил различные представления импульсной функции — разложение ее в ряд и интеграл Фурье, разложение по различным системам функций. Эти разложения в наше время приводятся во многих учебниках по математической физике. О. Хэвисайд считал дельта-функцию самой обычной функцией.

Второе рождение дельта-функции связано с именем английского физика-теоретика П. Дирака (в современной физико-математической литературе эта функция носит его имя и обозначается, как правило, греческой буквой  $\delta$ ). П. Дирак обратил внимание, что дельта-функцию нельзя, строго говоря, рассматривать как обычную функцию.

Дельта-функция Дирака является сингулярной обобщенной функцией. К понятию дельта-функции Дирака  $\delta(x)$ , как обобщенной функции, можно прийти, рассматривая ее в качестве предела функциональных последовательностей, обладающих определенными свойствами.

Рассмотрим, например, последовательность кусочно-постоянных функций  $\{\delta_n(x)\}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , определенных по правилу

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n/2, & |x| < 1/n; \\ 0, & |x| > 1/n. \end{cases}$$

Можно заметить, что при любом  $n$  функция  $\delta_n(x)$  обладает рядом свойств. А именно:

1)  $\delta_n(x) = \delta_n(-x)$ , т. е. функция четная относительно  $x$ ;

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) dx = 1;$$

3) для любой непрерывной функции  $f(x)$  справедливо  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_n(x) dx = f(x_0)$ , где  $x_0$  — некоторая точка из интервала  $(-1/n, 1/n)$ ;

4) справедливы соотношения:

$$\delta_n(x) = \frac{d}{dx} \Phi_n(x), \quad x \neq \pm \frac{1}{n};$$

$$\Phi_n(x) = \int_{-\infty}^x \delta_n(x) dx = \begin{cases} 0, & x < -1/n; \\ (1+nx)/2, & |x| < 1/n; \\ 1, & x > 1/n. \end{cases}$$

Можно показать, что при  $n \rightarrow \infty$  функция  $\Phi_n(x)$  стремится к ступенчатой функции Хэвисайда  $\theta(x)$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = \theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Можно указать и другие последовательности функций  $\delta_n(x)$ , обладающие свойствами 1)–3), например:

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n - n^2 |x|, & |x| < 1/n; \\ 0, & |x| > 1/n; \end{cases} \quad \delta_n(x) = \begin{cases} \frac{n[1 + \cos(n\pi x)]}{2}, & |x| < 1/n; \\ 0, & |x| > 1/n; \end{cases}$$

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Если в указанных последовательностях функций  $\delta_n(x)$  перейти к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , то мы придем к соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0; \\ \infty, & x = 0, \end{cases}$$

которое показывает, что предельный элемент этих функциональных последовательностей не является, вообще говоря, функцией в классическом понимании. Поэтому предел при  $n \rightarrow \infty$  следует понимать не в смысле равномерной сходимости, а в смысле *слабой сходимости последовательности*.

Мы скажем, что последовательность  $\{g_n(x)\}$  *сходится слабо* на интервале  $(a, b)$ , если для любой непрерывной функции  $f(x)$  существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)g_n(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

который и определяет предельный элемент  $g(x)$  слабо сходящейся последовательности  $\{g_n(x)\}$  даже если этот предельный элемент не является функцией в классическом смысле.

Итак, назовем предельный элемент, к которому в случае слабой сходимости сходятся рассмотренные выше последовательности  $\{\delta_n(x)\}$ , обобщенной дельта-функцией и обозначим ее символом  $\delta(x)$ .

Свойства 1)–3) функций  $\delta_n(x)$  не зависят от значения  $n$ . Поэтому эти свойства можно приписать и предельному элементу, т. е. считать, что

$$\delta(x) = \delta(-x); \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1; \quad (2.92)$$

для любой непрерывной функции  $f(x)$  выполняется соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0). \quad (2.93)$$

Формулу (2.92) можно рассматривать как следствие формулы (2.93) при  $f(x) \equiv 1$ . Поэтому интегральное соотношение (2.93) следует выделить как основное свойство дельта-функции, рассматривая фактически формулу (2.93) как определение дельта-функции Дирака в случае слабой сходимости и понимая ее как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_n(x)dx = f(0).$$

Учитывая свойство 4) последовательности кусочно-постоянных функций и проводя предельный переход при  $n \rightarrow \infty$ , можно получить формулу

$$\delta(x) = \theta'(x), \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

которая определяет обобщенную дельта-функцию как производную разрывной функции Хэвисайда. Естественно, что и эту формулу следует понимать как предельную в смысле слабой сходимости.

Наряду с дельта-функцией  $\delta(x)$  для описания сосредоточенного воздействия в точке  $x = x_0$  вводят дельта-функцию вида  $\delta(x - x_0)$ , определяемую интегральным соотношением:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0),$$

где  $f(x)$  — любая непрерывная функция.

Аналогично вводится пространственная дельта-функция  $\delta(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Например, дельта-функция в трехмерном пространстве определяется дельта-по-

следовательностями вида  $\{\delta_n(x_1)\delta_n(x_2)\delta_n(x_3)\}$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , составленными из произведений  $\delta_n(x_1)\delta_n(x_2)\delta_n(x_3)$ . Поэтому по определению

$$\delta(x) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$$

и

$$\delta(x - x^0) = \delta(x_1 - x_1^0)\delta(x_2 - x_2^0)\delta(x_3 - x_3^0),$$

где  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in \mathbb{R}^3$ .

Основным свойством, определяющим такую пространственную обобщенную функцию, является интегральное соотношение:

$$\iiint_{\Omega} f(x)\delta(x - x^0)dx = \begin{cases} f(x^0), & x^0 \in \Omega; \\ 0, & x^0 \notin \Omega, \end{cases}$$

где  $f(x)$  — непрерывная в области  $\Omega$  функция. При этом область  $\Omega$  может совпадать со всем пространством  $\mathbb{R}^3$ . Для  $f(x) \equiv 1$  имеем

$$\iiint_{\Omega} \delta(x - x^0)dx = \begin{cases} 1, & x^0 \in \Omega; \\ 0, & x^0 \notin \Omega. \end{cases}$$

## ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 2

1. Напишите общий вид линейного дифференциального уравнения второго порядка.
2. Напишите общий вид уравнения колебаний.
3. Что называется струной? Выведите уравнение колебаний струны.
4. Что называется стержнем? Выведите уравнение продольных колебаний стержня.
5. Напишите уравнение поперечных колебаний стержня. Приведите примеры граничных условий.
6. Что называется мембраной? Выведите уравнение поперечных колебаний мембраны.
7. Напишите уравнение поперечных колебаний тонкой пластинки. Приведите примеры граничных условий.
8. Сформулируйте задачу о равновесии мембраны.
9. Сформулируйте задачу об установившихся синусоидальных колебаниях мембраны.
10. Выведите телеграфное уравнение.
11. Напишите трехмерное волновое уравнение. Какие дополнительные условия ставятся при решении волнового уравнения?
12. Напишите общий вид уравнения диффузии. Выведите уравнение диффузии.
13. Выведите уравнение теплопроводности.
14. Напишите общий вид стационарного уравнения.
15. Выведите уравнение электростатики.
16. Выведите уравнение гидродинамики.
17. Сформулируйте задачу об обтекании твердого тела потоком жидкости.
18. Сформулируйте краевые задачи для уравнения теплопроводности.
19. Сформулируйте краевые задачи для одномерного волнового уравнения на примерах поперечных колебаний струны и продольных колебаний стержня.
20. Напишите уравнение Лапласа и уравнение Пуассона. Сформулируйте основные краевые задачи для этих уравнений.
21. К какому типу уравнений относится уравнение Лапласа, Пуассона?
22. Напишите уравнение Гельмгольца. Какие процессы описывает это уравнение?
23. К какому типу уравнений относится уравнение Гельмгольца?
24. Какое уравнение называется уравнением гиперболического типа? Приведите примеры.
25. Какие физические процессы описывает гиперболическое уравнение?
26. Какое уравнение называется уравнением параболического типа? Приведите примеры.

27. Какие физические процессы описывает параболическое уравнение?
28. Какое уравнение называется уравнением эллиптического типа? Приведите примеры.
29. Какие физические процессы описывает эллиптическое уравнение?
30. Запишите характеристическое уравнение. Что называется характеристикой дифференциального уравнения?
31. Какие характеристики имеет одномерное волновое уравнение?
32. Какие характеристики имеет двухмерное уравнение Лапласа?
33. Напишите каноническую форму уравнения гиперболического типа.
34. Напишите каноническую форму уравнения параболического типа.
35. Напишите каноническую форму уравнения эллиптического типа.
36. Дайте понятие об общем интеграле уравнения в частных производных. Приведите примеры.
37. Дайте физическое истолкование общего решения уравнения колебаний струны.
38. Выведите формулу Даламбера решения задачи Коши для волнового уравнения.
39. Расскажите о корректности постановки задач математической физики.
40. Что такое начальные и граничные условия? С чем связана необходимость в постановке дополнительных условий? Приведите примеры.
41. Что называется задачей Коши? Для какого типа уравнений ставится задача Коши? Приведите примеры.
42. Что называется краевой задачей? Для какого типа уравнений ставится краевая задача? Приведите примеры.
43. Что называется смешанной задачей? Для какого типа уравнений ставится смешанная задача? Приведите примеры.
44. Докажите единственность решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.
45. Докажите единственность решения задачи Неймана для уравнения Пуассона. В чем особенность решения этой задачи?
46. Докажите единственность решения третьей краевой задачи для уравнения Пуассона.
47. Что можно сказать о единственности решения краевых задач, связанных с уравнением Гельмгольца?
48. Докажите единственность решения задачи для уравнения теплопроводности.
49. Докажите единственность решения задачи о колебаниях струны.
50. Дайте общее решение волнового уравнения в сферических координатах в случае радиальных колебаний. Каково физическое истолкование этого решения?

### ЗАДАЧИ С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ

1. Рассмотреть случай, когда уравнение (2.50) имеет постоянные коэффициенты. Показать, что после соответствующей замены переменных это уравнение приводится к одной из простейших форм:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + b_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu + f = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu + f = 0,$$

когда  $B^2 - AC > 0$  — гиперболический тип;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu + f = 0,$$

когда  $B^2 - AC = 0$  — параболический тип;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu + f = 0,$$

когда  $B^2 - AC < 0$  — эллиптический тип.

2. Показать, что уравнения, полученные в п. 1, можно еще больше упростить, если ввести новую неизвестную функцию  $v(\xi, \eta)$  по формуле

$$u(\xi, \eta) = e^{\lambda\xi + \mu\eta}v(\xi, \eta), \quad \lambda, \mu = \text{const}$$

и числа  $\lambda, \mu$  подобрать так, чтобы исчезли члены с производными первого порядка в уравнениях гиперболического и эллиптического типов, а в уравнении параболического типа исчез один из членов с производной первого порядка и член с неизвестной функцией. В результате таких преобразований привести уравнение гиперболического типа к виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma v + f_1 = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \gamma v + f_1 = 0;$$

уравнение параболического типа — к виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + b_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} + f_1 = 0;$$

уравнение эллиптического типа — к виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \gamma v + f_1 = 0.$$

3. Привести к каноническому виду уравнения:

$$1. \quad 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$2. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$3. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} - 5 \frac{\partial u}{\partial y} + 4u = 0.$$

$$4. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 4u = 0.$$

$$5. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 4u = 0.$$

$$6. \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$7. \quad 4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e^{2x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4y^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

$$8. \quad y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$9. \quad 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0.$$

$$10. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

4. Найти общее решение уравнений:

$$1. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos(x) \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$2. x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$3. x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$4. 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$5. 4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e^{2x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4y^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

5. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$u|_{t=0} = \sin(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

(задача Коши).

6. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = A \sin(x)$$

(задача Коши).

7. Бесконечной струне сообщена только на отрезке  $(-c, c)$  поперечная начальная скорость  $V_0 = \text{const}$ . Решить задачу о колебаниях этой струны. Построить профиль струны для моментов времени  $t_k = (c/2v)k$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

8. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$$

если

$$u|_{t=0} = x^2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

9. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$$

если

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = x.$$



10. Найти форму струны, определяемой уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0$$

в момент времени  $t = \pi/2v$ , если

$$u|_{t=0} = \sin(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 1.$$

11. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$$

если

$$u|_{t=0} = x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = -x.$$

12. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$$

если

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \cos(x).$$

13. Найти форму струны, определяемой уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$$

в момент времени  $t = \pi$ , если

$$u|_{t=0} = \sin(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \cos(x).$$

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

**Пример 1.** Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0, \quad y > 0,$$

и найти его общее решение.

*Решение.* Определим сначала тип уравнения. Имеем

$$A = x^2, \quad B = 0, \quad C = -y^2 \Rightarrow \Delta = AC - B^2 = -x^2 y^2 < 0.$$

Следовательно, тип уравнения — гиперболический.

Составим характеристическое уравнение:

$$x^2 dy^2 - y^2 dx^2 = 0.$$

Это уравнение распадается на два уравнения с разделяющимися переменными

$$x dy - y dx = 0, \quad x dy + y dx = 0.$$

Откуда находим

$$xy = C_1, \quad \frac{y}{x} = C_2.$$

Таким образом, прямые  $y = C_2x$  и гиперболы  $y = C_1/x$  являются характеристиками заданного уравнения.

Преобразуем теперь заданное уравнение к каноническому виду. Для этого согласно общей теории введем новые переменные по формулам:

$$\xi = xy, \quad \eta = \frac{y}{x}.$$

Используя формулы (2.53) и (2.54), найдем  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{y}{x^3} \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения вторых производных в исходное уравнение, окончательно получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad \xi > 0, \quad \eta > 0.$$

Последнее уравнение можно проинтегрировать. Для этого перепишем его в виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Введем теперь новую неизвестную функцию  $v(\xi, \eta) = \frac{\partial u}{\partial \eta}$ . Будем иметь

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{v}{2\xi} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{d\xi}{2\xi} \Rightarrow \ln |v| = \frac{1}{2} \ln |\xi| + \ln |f(\eta)|,$$

где  $f(\eta)$  — произвольная функция  $\eta$ . После потенцирования получим

$$v = f(\eta) \sqrt{\xi}.$$

Далее,

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = v(\xi, \eta) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\eta) \sqrt{\xi} \Rightarrow u = \sqrt{\xi} \int f(\eta) d\eta + \psi(\xi),$$

где  $\psi(\xi)$  — произвольная функция  $\xi$ . Обозначив

$$\varphi(\eta) = \int f(\eta) d\eta,$$

окончательно получим

$$u = \sqrt{\xi} \varphi(\eta) + \psi(\xi),$$

где  $\psi(\xi)$  и  $\varphi(\eta)$  — произвольные функции  $\xi$  и  $\eta$  соответственно.

Возвращаясь к старым переменным  $x$  и  $y$ , получим

$$u = \sqrt{xy} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi(xy).$$

**Пример 2.** Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0,$$

и найти его общее решение.

*Решение.* Определим тип уравнения. Имеем

$$A = x^2, \quad B = xy, \quad C = y^2 \Rightarrow \Delta = AC - B^2 = x^2 y^2 - x^2 y^2 = 0.$$

Следовательно, тип уравнения — параболический.

Составим характеристическое уравнение:

$$x^2 dy^2 - 2xy dx dy + y^2 dx^2 = 0 \Rightarrow (xdy - ydx)^2 = 0 \Rightarrow xdy - ydx = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим одно семейство характеристик

$$\frac{y}{x} = C.$$

Это — семейство прямых. Новые переменные вводим по формулам:

$$\xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = y.$$

Выбор второй функции сделан с учетом того, чтобы она была наиболее простой, но так, чтобы функциональный определитель Остроградского для преобразования переменных был отличен от нуля.

Находим теперь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{y}{x^3} \frac{\partial u}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -\frac{y}{x^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения производных в заданное уравнение, окончательно получим каноническую форму этого уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

Полученное уравнение легко интегрируется. Будем иметь

или 
$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\xi) \Rightarrow u = \int f(\xi) d\eta + \varphi(\xi)$$

$$u = f(\xi)\eta + \varphi(\xi),$$

где  $f$  и  $\varphi$  — произвольные функции.

Возвращаясь к старым переменным, получим общее решение заданного уравнения:

$$u = f\left(\frac{y}{x}\right)y + \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

**Пример 3.** Привести к каноническому виду уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

*Решение.* Определим тип уравнения. Имеем

$$A = 1; \quad B = -2; \quad C = 5 \Rightarrow \Delta = AC - B^2 = 5 - 4 = 1 > 0.$$

Следовательно, тип уравнения — эллиптический.

Составим характеристическое уравнение:

$$dy^2 + 4dx dy + 5dx^2 = 0.$$

Это уравнение распадается на два следующих уравнения

$$y' = -2 + i; \quad y' = -2 - i.$$

Интегрируя их, найдем два общих интеграла характеристического уравнения:

$$y = (-2 + i)x + C_1, \quad y = (-2 - i)x + C_2.$$

Введем обозначения

$$\varphi = y - (-2 + i)x; \quad \varphi^* = y + (2 + i)x;$$

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2} = y + 2x; \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i} = -x.$$

Согласно общей теории нужно ввести новые переменные  $\alpha$  и  $\beta$  по формулам:

$$\xi = \alpha + i\beta = y + 2x - ix, \quad \eta = \alpha - i\beta = y + 2x + ix.$$

Вычисляя производные по формулам (2.53)–(2.55), после всех преобразований окончательно получим канонический вид заданного уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

(Проверьте!)

**Пример 4.** Привести к каноническому виду уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 10 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - 3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

*Решение.* Воспользуемся для решения задачи системой аналитических вычислений Maple. Для ознакомления с этой системой можно рекомендовать книги [7], [9], [13], [21]. Будем рассматривать уравнение общего вида:

$$a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_4 \frac{\partial u}{\partial x} + a_5 \frac{\partial u}{\partial y} + a_6 u + a_7 = 0.$$

Зададим коэффициенты нашего уравнения

> a:=1,-6,10,1,-3,0,0;

a : 1, -6, 10, 1, -3, 0, 0

и само уравнение

> equ:=a[1]\*diff(u(x,y),x,x)+a[2]\*diff(u(x,y),x,y)+  
a[3]\*diff(u(x,y),y,y)+a[4]\*diff(u(x,y),x)+  
a[5]\*diff(u(x,y),y)+a[6]\*u(x,y)+a[7]=0;

$$equ := \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) \right) - 6 \left( \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u(x, y) \right) + 10 \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) \right) + \left( \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) \right) - 3 \left( \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) \right) = 0$$

Вычисляем матрицу старших коэффициентов и ее определитель

> eq:=lhs(equ);

$$eq := \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) \right) - 6 \left( \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u(x, y) \right) + 10 \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) \right) + \left( \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) \right) - 3 \left( \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) \right)$$

> A:=linalg[matrix](2,2,[coeff(eq,diff(u(x,y),x,x)),  
coeff(eq,diff(u(x,y),x,y))/2,coeff(eq,diff(u(x,y),x,y))/2,  
coeff(eq,diff(u(x,y),y,y))]);  
Delta:=simplify(linalg[det](A));

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\Delta := 1$$

Так как определитель матрицы старших коэффициентов  $\Delta > 0$ , то тип уравнения — эллиптический.

Формируем характеристическое уравнение и решаем его

> A[1,1]\*z^2-2\*A[1,2]\*z+A[2,2]=0;  
res1:=solve(A[1,1]\*z^2-2\*A[1,2]\*z+A[2,2],z);

$$z^2 + 6z + 10 = 0$$

$$res1 := -3 + I, -3 - I$$

> res2:={seq(dsolve(diff(y(x),x)=res1[i],y(x)),i=1..2)};

$$res2 := \{y(x) = -(3 - I)x + \_C1, y(x) = -(3 + I)x + \_C1\}$$

Таким образом мы получили две комплексные характеристики.

Выполняем замену переменных:

> res2:=subs(y(x)=y,res2);

$$res2 := \{y = -(3 - I)x + \_C1, y = -(3 + I)x + \_C1\}$$

> {seq(solve(res2[i],\\_C1),i=1..nops(res2))};

$$\{y + 3x + xI, y + 3x - xI\}$$

>itr:={xi=coeff(%[1],l),eta=%[1]-coeff(%[1],l)\*l};

$$itr:={\eta = y + 3x, \xi = x}$$

Теперь приводим заданное уравнение к канонической форме:

>tr:=solve(itr,{x,y});

PDEtools[dchange](tr,eq,itr,[eta,xi],simplify)=0;

$$tr := \{y = \eta - 3\xi, x = \xi\}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} u(\eta, \xi)\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(\eta, \xi)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial \xi} u(\eta, \xi)\right) = 0$$

**Пример 5.** Привести к каноническому виду уравнение

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

*Решение.* Решаем задачу в системе аналитических вычислений Maple. Задаем уравнение

>a:=4,4,1,0,-2,0,0;

$$a:=4, 4, 1, 0, -2, 0, 0$$

>equ:=a[1]\*diff(u(x,y),x,x)+a[2]\*diff(u(x,y),x,y)+

a[3]\*diff(u(x,y),y,y)+a[4]\*diff(u(x,y),x)+

a[5]\*diff(u(x,y),y)+a[6]\*u(x,y)+a[7]=0;

$$equ := 4 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) \right) + 4 \left( \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u(x, y) \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) \right) - 2 \left( \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) \right) = 0$$

Вычисляем матрицу старших коэффициентов и ее определитель:

>eq:=lhs(equ);

$$eq := 4 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) \right) + 4 \left( \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u(x, y) \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) \right) - 2 \left( \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) \right)$$

>A:=linalg[matrix](2,2,[coeff(eq,diff(u(x,y),x,x)),

coeff(eq,diff(u(x,y),x,y))/2,coeff(eq,diff(u(x,y),x,y))/2,

coeff(eq,diff(u(x,y),y,y))]);

Delta:=simplify(linalg[det](A));

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta := 0$$

Так как определитель матрицы старших коэффициентов  $\Delta = 0$ , то тип уравнения — параболический.

Формируем характеристическое уравнение и решаем его:

>A[1,1]\*z^2-2\*A[1,2]\*z+A[2,2]=0;

res1:=solve(A[1,1]\*z^2-2\*A[1,2]\*z+A[2,2],z);

$$4z^2 - 4z + 1 = 0$$

$$res1 := \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

>subs(y=y(x),res1[1]);res2:=dsolve(diff(y(x),x)=%,y(x));

$$\frac{1}{2}$$

$$res2 := y(x) = \frac{x}{2} + \_C1$$

Получили одно семейство характеристик. Вводим замену переменных:

>res2:=subs(y(x)=y,res2);

$$res2 := y = \frac{x}{2} + \_C1$$

>itr:={xi=solve(res2,\_C1),eta=y};

$$itr := \left\{ \xi = y - \frac{x}{2}, \eta = y \right\}$$

Приводим заданное уравнение к каноническому виду:

>tr:=solve(itr,{x,y});

PDEtools[dchange](tr,eq,itr,[eta,xi],simplify)=0;

$$tr := \{y = \eta, x = -2\xi + 2\eta\}$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} u(\eta, \xi) \right) - 2 \left( \frac{\partial}{\partial \xi} u(\eta, \xi) \right) - 2 \left( \frac{\partial}{\partial \eta} u(\eta, \xi) \right) = 0$$

Обратим внимание: если выбрать другую замену переменных

>itr:={xi=solve(res2,\_C1),eta=x};

$$itr := \left\{ \xi = y - \frac{x}{2}, \eta = x \right\},$$

то придем к уравнению вида

>tr:=solve(itr,{x,y});

PDEtools[dchange](tr,eq,itr,[eta,xi],simplify)=0;

$$tr := \left\{ x = \eta, y = \xi + \frac{\eta}{2} \right\}$$

$$4 \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} u(\eta, \xi) \right) - 2 \left( \frac{\partial}{\partial \xi} u(\eta, \xi) \right)$$

Приведем программу, автоматизирующую преобразования по приведению линейных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными к канонической форме. Программа приводит к канонической форме уравнение следующего общего вида:

$$a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_4 \frac{\partial u}{\partial x} + a_5 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Формальным параметром программы служит именно это уравнение, так как при замене переменных преобразовывается только та часть уравнения, которая содержит производные. Если уравнение содержит еще и члены с отличными от нуля коэффициентами  $a_6$  и  $a_7$ , то эти члены просто необходимо добавить в преобразованное уравнение (после окончания работы программы), конечно, с учетом преобразования независимых переменных.

Программа имеет два глобальных параметра: параметр `change_of_variables`, который содержит формулы замены переменных, и параметр `eq_can`, который содержит преобразованное уравнение. Эти переменные можно независимо использовать в последующей работе. Например, можно перейти к другой канонической форме гиперболического уравнения, содержащей смешанную вторую производную (программа преобразовывает квадратичную форму, соответствующую матрице старших коэффициентов, к сумме квадратов).

Еще одна особенность программы — классификация типов уравнений выполняется не по определителю квадратичной формы, он может зависеть от переменных, а по характеристикам, которые тоже однозначно определяют тип уравнения.

Алгоритм программы достаточно прозрачен. При необходимости ее можно легко модернизировать под те или иные нужды.

```

>canonical_form:=proc(equ)
global change_of_variables,eq_can;
local k,A,B,it,J,eq_n,r,tr,i,itr,eq_type,mu,eq,
characteristics;
eq:=lhs(equ);
A:=linalg[matrix](2,2,[coeff(eq,diff(u(x,y),x,x)),
coeff(eq,diff(u(x,y),x,y))/2,
coeff(eq,diff(u(x,y),x,y))/2,
coeff(eq,diff(u(x,y),y,y))]);
simplify({solve(A[1,1]*z^2-2*A[1,2]*z+A[2,2],z)});
simplify(%,power);simplify(%,power,symbolic);
subs(y=y(x),%);
if type(%[1],`*`) and has(%[1],y) and has(%[1],l) then
mu:=1/select(has,%[1],y);
{seq(int(expand((diff(y(x),x)+%[i])*mu),x)=_C1,
i=1..nops(%))});
else
{seq(dsolve(diff(y(x),x)=%[i],y(x)),i=1..nops(%))};
end if;
characteristics:=subs(y(x)=y,%);
print(`Характеристики:`);print(characteristics);
{seq(solve(characteristics[i],_C1),
i=1..nops(characteristics))};
if nops(%)=1 and not hastype(%,nonreal) then
itr:={xi=%[1],eta=x}; # либо eta=y
eq_type:=`параболический тип`;

```



```

elif not hastype(%,nonreal) then
itr:={xi=(%[1]+%[2])/2,eta=(%[2]-%[1])/2};
eq_type:=`гиперболический тип`;
else
itr:={xi=coeff(%[1],l),eta=%[1]-coeff(%[1],l)*l};
eq_type:=`эллиптический тип`;
end if;
itr:=simplify(itr);indets(itr);
select(has,%,[x,y]);
k:=solve(itr,%);
it:=convert(itr,list);
if has(%[1],eta) then it:=[%[2],%[1]] end if;
J:=jacobian([rhs(it[1]),rhs(it[2])],[x,y]);
B:=map(simplify,evalm(J&*A&*transpose(J)));
eq_n:=B[1,1]*Diff(u,xi,xi)+2*B[1,2]*Diff(u,xi,eta)+
B[2,2]*Diff(u,eta,eta)+
simplify(subs(u(x,y)=rhs(it[1]),eq))*Diff(u,xi)+
simplify(subs(u(x,y)=rhs(it[2]),eq))*Diff(u,eta);
eq_n:=expand(eq_n);
k union map(x->1/lhs(x)=1/rhs(x),k);
subs(% ,eq_n);
if eq_type=`параболический тип` then
simplify(solve(% ,Diff(u,eta,eta))):
r:=simplify(subs(k,numer(%))/subs(k,denom(%)));
if has(%,[x,y]) then
tr:=solve(itr,{x,y});
if has(% ,RootOf) then tr:=allvalues(%)[1] end if;
simplify(expand(subs(tr,r)));
end if;
eq_can:=Diff(u,eta,eta)-%=0;
end if;
if eq_type=`гиперболический тип` then
simplify(solve(eq_n,Diff(u,eta,eta))):
r:=simplify(subs(k,numer(%))/subs(k,denom(%)));
if has(%,[x,y]) then tr:=solve(itr,{x,y});
if has(% ,RootOf) then tr:=allvalues(%)[1] end if;
simplify(expand(subs(tr,r)));
end if;
eq_can:=Diff(u,eta,eta)-Diff(u,xi,xi)-
simplify(%-Diff(u,xi,xi))=0;
end if;
if eq_type=`эллиптический тип` then
simplify(solve(% ,Diff(u,xi,xi))):
r:=simplify(subs(k,numer(%))/subs(k,denom(%)));
if has(%,[x,y]) then tr:=solve(itr,{x,y});
if has(% ,RootOf) then tr:=allvalues(%)[1] end if;

```

```

map(simplify,subs(tr,r),trig,power,symbolic);
end if;
eq_can:= Diff(u,eta,eta)+Diff(u,xi,xi)-
simplify(%+Diff(u,eta,eta))=0;
end if;
change_of_variables:=itr;
print(eq_type);print(`Замена переменных:`);print(itr);
print(`Каноническая форма:`);
eq_can:= value(subs(u=u(eta,xi),eq_can));
RETURN(eq_can);
end proc;

```

При выборе замены переменных в случае уравнения параболического типа одна из переменных назначается произвольно:  $\eta = x$  либо  $\eta = y$  (лишь бы она была независима от  $\xi$  и дифференцируема нужное число раз). От этого выбора иногда зависит окончательный вид уравнения.

Рассмотрим применение этой программы к решению задач.

**Пример 6.** Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

*Решение.* Для решения задачи воспользуемся программой `canonical_form`.

```

>a:= x^2,-2*x,1,0,0;
equ:=a[1]*diff(u(x,y),x,x)+a[2]*diff(u(x,y),x,y)+
a[3]*diff(u(x,y),y,y)+a[4]*diff(u(x,y),x)+
a[5]*diff(u(x,y),y)=0;
canonical_form(equ);

```

$$a := x^2, -2x, 1, 0, 0$$

$$equ := x^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) \right) - 2x \left( \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u(x, y) \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) \right) = 0$$

*Характеристики:*

$$\{y = -\ln(x) + C1\}$$

параболический тип.

*Замена переменных:*

$$\{\eta = y, \xi = y + \ln(x)\}$$

*Каноническая форма:*

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} u(\eta, \xi) \right) - \left( \frac{\partial}{\partial \xi} u(\eta, \xi) \right) = 0$$

Тот же пример, но другая замена переменных:

```

>canonical_form(equ);

```

*Характеристики:*

$$\{y = -\ln(x) + C1\}$$

параболический тип.

*Замена переменных:*

$$\{\eta = x, \xi = y + \ln(x)\}$$

*Каноническая форма:*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} u(\eta, \xi)\right) - \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} u(\eta, \xi)}{\eta^2} = 0$$

**Пример 7.** В каждой области, где сохраняется тип уравнения, привести к каноническому виду уравнение

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

*Решение.* Для решения задачи воспользуемся программой `canonical_form`.  
Задаем уравнение

`>a:=y,0,-x,0,0;`

`a:= y, 0, -x, 0, 0`

`>equ:=a[1]*diff(u(x,y),x,x)+a[2]*diff(u(x,y),x,y)+  
a[3]*diff(u(x,y),y,y)+a[4]*diff(u(x,y),x)+  
a[5]*diff(u(x,y),y)=0;`

$$equ := y \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) \right) - x \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) \right) = 0$$

Рассматриваем уравнение в области  $x < 0, y < 0$ :

`>assume(x<0,y<0);canonical_form(equ);`

*Характеристики:*

$$\left\{ -\frac{2(-x \sim)^{3/2}}{3} + \frac{2(-y \sim)^{3/2}}{3} + C1 = 0, -\frac{2(-x \sim)^{3/2}}{3} - \frac{2(-y \sim)^{3/2}}{3} + C1 = 0 \right\}$$

гиперболический тип.

*Замена переменных:*

$$\left\{ \xi = -\frac{2x \sim \sqrt{-x \sim}}{3}, \eta = -\frac{2y \sim \sqrt{-y \sim}}{3} \right\}$$

*Каноническая форма:*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} u(\eta, \xi)\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(\eta, \xi)\right) - \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial \xi} u(\eta, \xi)\right) \eta - \left(\frac{\partial}{\partial \eta} u(\eta, \xi)\right) \xi}{\eta \xi} = 0$$

Рассматриваем уравнение в области  $x > 0, y > 0$ :

`>assume(x>0,y>0);canonical_form(equ);`

*Характеристики:*

$$\{y^{(3/2)} + x^{(3/2)} - C1 = 0, y^{(3/2)} - x^{(3/2)} - C1 = 0\}$$

гиперболический тип.

*Замена переменных:*

$$\{\xi = y^{(3/2)}, \eta = -x^{(3/2)}\}$$

*Каноническая форма:*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} u(\eta, \xi)\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(\eta, \xi)\right) - \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial \xi} u(\eta, \xi)\right) \eta - \left(\frac{\partial}{\partial \eta} u(\eta, \xi)\right) \xi}{\eta \xi} = 0$$

Рассматриваем уравнение в области  $x > 0, y < 0$ :

`>assume(x>0,y<0);canonical_form(equ);`

*Характеристики:*

$$\left\{\frac{2(-y)^{(3/2)}}{3} - \frac{2}{3} I x^{(3/2)} = -C1, \frac{2(-y)^{(3/2)}}{3} + \frac{2}{3} I x^{(3/2)} = -C1\right\}$$

эллиптический тип.

*Замена переменных:*

$$\left\{\xi = \frac{2x^{(3/2)}}{3}, \eta = -\frac{2y \sim \sqrt{-y}}{3}\right\}$$

*Каноническая форма:*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} u(\eta, \xi)\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(\eta, \xi)\right) + \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial \xi} u(\eta, \xi)\right) \eta - \left(\frac{\partial}{\partial \eta} u(\eta, \xi)\right) \xi}{\eta \xi} = 0$$

Рассматриваем уравнение в области  $x < 0, y > 0$ :

`>assume(x<0,y>0);canonical_form(equ);`

*Характеристики:*

$$\left\{\frac{2y^{(3/2)}}{3} - \frac{2}{3} I (-x)^{(3/2)} = -C1, \frac{2y^{(3/2)}}{3} + \frac{2}{3} I (-x)^{(3/2)} = -C1\right\}$$

эллиптический тип.

*Замена переменных:*

$$\left\{\eta = \frac{2y^{(3/2)}}{3}, \xi = -\frac{2x \sim \sqrt{-x}}{3}\right\}$$

*Каноническая форма:*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} u(\eta, \xi)\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(\eta, \xi)\right) + \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial \xi} u(\eta, \xi)\right) \eta + \left(\frac{\partial}{\partial \eta} u(\eta, \xi)\right) \xi}{\eta \xi} = 0$$

**Пример 8.** Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

*Решение.* Для решения задачи воспользуемся программой `canonical_form`.

Задаем уравнение

```
>a:=x^2,0,-y^2,0,0;
eq:=a[1]*diff(u(x,y),x,x)+a[2]*diff(u(x,y),x,y)+
a[3]*diff(u(x,y),y,y)+a[4]*diff(u(x,y),x)+
a[5]*diff(u(x,y),y)=0;
canonical_form(eq);
```

$$a := x^2, 0, -y^2, 0, 0$$

$$eq := x^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) \right) - y^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) \right) = 0$$

*Характеристики:*

$$\left\{ y = \frac{C1}{x}, y = -C1x \right\}$$

гиперболический тип.

*Замена переменных:*

$$\left\{ \xi = \frac{y(1+x^2)}{2x}, \eta = -\frac{y(-1+x^2)}{2x} \right\}$$

*Каноническая форма:*

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} u(\eta, \xi) \right) - \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(\eta, \xi) \right) + \frac{\left( \frac{\partial}{\partial \xi} u(\eta, \xi) \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} u(\eta, \xi) \right)}{-\eta + \xi} = 0$$

Иногда бывает удобнее другая форма канонического уравнения

>eq\_can;

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} u(\eta, \xi) \right) - \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(\eta, \xi) \right) + \frac{\left( \frac{\partial}{\partial \xi} u(\eta, \xi) \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} u(\eta, \xi) \right)}{-\eta + \xi} = 0$$

>tr:={xi=t+tau,eta=t-tau};

>itr:={t=(xi+eta)/2,tau=(xi-eta)/2};

$$tr := \{ \xi = t + \tau, \eta = t - \tau \}$$

$$itr := \left\{ t = \frac{\eta}{2} + \frac{\xi}{2}, \tau = -\frac{\eta}{2} + \frac{\xi}{2} \right\}$$

>PDEtools[dchange](tr,lhs(eq\_can),itr,[t,tau],simplify)=0;

$$-\frac{1}{2} \frac{2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial t} u(t, \tau) \right) \tau - \left( \frac{\partial}{\partial t} u(t, \tau) \right)}{\tau} = 0$$

Последнее уравнение легко интегрируется (как в примере 1). Впрочем, общие решения этих канонических уравнений можно найти и с помощью Maple

```
>pdsolve(%);
```

$$u(t, \tau) = \_F1(\tau) + \_F2(t)\sqrt{\tau}$$

```
>pdsolve(eq_can);
```

$$u(\eta, \xi) = \_F1(-\eta + \xi) + \_F2(\eta + \xi)\sqrt{-\eta + \xi}$$

**Пример 9.** Найти общее решение уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

*Решение.* Для решения задачи воспользуемся стандартными средствами Maple. Зададим уравнение

```
>eq:=
```

```
diff(u(x,y),x,x)-2*diff(u(x,y),x,y)-3*diff(u(x,y),y,y)=0;
```

$$eq := \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) \right) - 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u(x, y) \right) - 3 \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) \right) = 0$$

Воспользуемся стандартной программой Maple — `mapde(eq,canom)`. Эта программа преобразовывает исходное уравнение в возможно более простое, которое можно решить. Фактически, это еще один способ приведения заданного уравнения к каноническому виду. Разработчики системы, правда, предупреждают, что команда `mapde` всегда будет успешно выполнена, когда коэффициенты уравнения постоянны. С переменными коэффициентами команда успешно выполняется только иногда. Для того чтобы воспользоваться этой командой, надо подключить пакет `PDEtools`

```
>with(PDEtools):
```

```
mapde(eq,canom);
```

$$\sqrt{16} \left( \frac{\partial^2}{\partial \_ \xi 2 \partial \_ \xi 1} u(\_ \xi 1, \_ \xi 2) \right) \& \text{ where } \left\{ \_ \xi 1 = 3x + y, \_ \xi 2 = \frac{x}{4} - \frac{y}{4} \right\}$$

```
>op(%);
```

$$\sqrt{16} \left( \frac{\partial^2}{\partial \_ \xi 2 \partial \_ \xi 1} u(\_ \xi 1, \_ \xi 2) \right), \left\{ \_ \xi 1 = 3x + y, \_ \xi 2 = \frac{x}{4} - \frac{y}{4} \right\}$$

Найдем теперь общее решение полученного уравнения гиперболического типа с помощью команды `pdsolve`:

```
>pdsolve(%[1]);
```

$$u(\_ \xi 1, \_ \xi 2) = \_ F2(\_ \xi 1) + \_ F1(\_ \xi 2)$$

Вернемся к старым переменным:

>sol:=u(x,y)=subs(%%[2],rhs(%));

$$\text{sol} := u(x,y) = \_F2(3x + y) + \_F1\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{4}\right)$$

Проверим найденное решение:

>simplify(subs(sol,eq));

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\_F2(3x + y) + \_F1\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{4}\right)\right)\right) - 2\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\_F2(3x + y) + \_F1\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{4}\right)\right)\right) - 3\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\_F2(3x + y) + \_F1\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{4}\right)\right)\right) = 0$$

>simplify(%);

$$0 = 0$$

**Пример 10.** Найти общее решение уравнения с постоянными коэффициентами

$$3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5 \frac{\partial u}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2.$$

*Решение.* Зададим уравнение

>eq:=

3\*diff(u(x,y),x,x)-5\*diff(u(x,y),x,y)-

2\*diff(u(x,y),y,y)+3\*diff(u(x,y),x)+diff(u(x,y),y)=2;

$$\text{eq} := 3\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y)\right) - 5\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u(x, y)\right) - 2\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y)\right) + 3\left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, y)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, y)\right) = 2$$

Преобразуем к канонической форме:

>mapde(eq,canon);

$$\left(\frac{1}{98}(3\sqrt{49} - 21)\sqrt{49}\left(\frac{\partial}{\partial \_ \xi 2} u(\_ \xi 1, \_ \xi 2)\right) + \frac{1}{6}(3\sqrt{49} + 21)\left(\frac{\partial}{\partial \_ \xi 1} u(\_ \xi 1, \_ \xi 2)\right) - 2 + \sqrt{49}\left(\frac{\partial^2}{\partial \_ \xi 2 \partial \_ \xi 1} u(\_ \xi 1, \_ \xi 2)\right)\right) \& \text{ where } \left\{ \_ \xi 1 = 2x + y, \_ \xi 2 = \frac{x}{7} - \frac{3y}{7} \right\}$$

>op(%);

$$\left(\frac{1}{98}(3\sqrt{49} - 21)\sqrt{49}\left(\frac{\partial}{\partial \_ \xi 2} u(\_ \xi 1, \_ \xi 2)\right) + \frac{1}{6}(3\sqrt{49} + 21)\left(\frac{\partial}{\partial \_ \xi 1} u(\_ \xi 1, \_ \xi 2)\right) - 2 + \sqrt{49}\left(\frac{\partial^2}{\partial \_ \xi 2 \partial \_ \xi 1} u(\_ \xi 1, \_ \xi 2)\right)\right), \left\{ \_ \xi 1 = 2x + y, \_ \xi 2 = \frac{x}{7} - \frac{3y}{7} \right\}$$

Решим уравнение

>pdsolve(%[1]);

$$u(\xi_1, \xi_2) = \_F1(\xi_2) + e^{(-\xi_2)} \_F2(\xi_1) + \frac{2\xi_1}{7}$$

>sol:=u(x,y)=subs(%[2],rhs(%));

$$\text{sol} := u(x, y) = \_F1\left(\frac{x}{7} - \frac{3y}{7}\right) + e^{\left(-\frac{x}{7} + \frac{3y}{7}\right)} \_F2(2x + y) + \frac{4x}{7} + \frac{2y}{7}$$

Проверим полученное решение:

>simplify(subs(sol,eq));

$$\begin{aligned} & 3\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-F1\left(\frac{x}{7} - \frac{3y}{7}\right) + e^{\left(-\frac{x}{7} + \frac{3y}{7}\right)} \_F2(2x + y) + \frac{4x}{7} + \frac{2y}{7}\right)\right) - \\ & - 5\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(-F1\left(\frac{x}{7} - \frac{3y}{7}\right) + e^{\left(-\frac{x}{7} + \frac{3y}{7}\right)} \_F2(2x + y) + \frac{4x}{7} + \frac{2y}{7}\right)\right) - \\ & - 2\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(-F1\left(\frac{x}{7} - \frac{3y}{7}\right) + e^{\left(-\frac{x}{7} + \frac{3y}{7}\right)} \_F2(2x + y) + \frac{4x}{7} + \frac{2y}{7}\right)\right) + \\ & + 3\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-F1\left(\frac{x}{7} - \frac{3y}{7}\right) + e^{\left(-\frac{x}{7} + \frac{3y}{7}\right)} \_F2(2x + y) + \frac{4x}{7} + \frac{2y}{7}\right)\right) + \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(-F1\left(\frac{x}{7} - \frac{3y}{7}\right) + e^{\left(-\frac{x}{7} + \frac{3y}{7}\right)} \_F2(2x + y) + \frac{4x}{7} + \frac{2y}{7}\right)\right) = 2 \end{aligned}$$

>simplify(%);

$$2 = 2$$

**Пример 11.** Найти общее решение уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial u}{\partial x} - 3\frac{\partial u}{\partial y} + 6u = 2e^{x+y}.$$

**Решение.** Зададим уравнение

>eq:=

diff(u(x,y),x,y)-2\*diff(u(x,y),x)-

3\*diff(u(x,y),y)+6\*u(x,y)=2\*exp(x+y);

$$\text{eq} := \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u(x, y)\right) - 2\left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, y)\right) - 3\left(\frac{\partial}{\partial y} u(x, y)\right) + 6u(x, y) = 2e^{(x+y)}$$

>mapde(eq,canom);

$$(D_{1,2}(u)(x, y) - 2D_1(u)(x, y) - 3D_2(u)(x, y) + 6u(x, y) - 2e^{(x+y)}) \& \text{ where} \\ \text{the received pde is already in canom form}$$



Система Maple сообщает нам, что данное уравнение уже имеет канонический вид. Решаем это уравнение

>sol:=pdsolve(eq);

$$\text{sol} := u(x, y) = e^{(2y)} \_F1(x) + e^{(3x)} \_F2(y) + e^{(x+y)}$$

Выполним проверку найденного решения:

>simplify(subs(sol,eq));

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} (e^{(2y)} \_F1(x) + e^{(3x)} \_F2(y) + e^{(x+y)}) \right) - \\ & - 2 \left( \frac{\partial}{\partial x} (e^{(2y)} \_F1(x) + e^{(3x)} \_F2(y) + e^{(x+y)}) \right) - \\ & - 3 \left( \frac{\partial}{\partial y} (e^{(2y)} \_F1(x) + e^{(3x)} \_F2(y) + e^{(x+y)}) \right) + \\ & + 6e^{(2y)} \_F1(x) + 6e^{(3x)} \_F2(y) + 6e^{(x+y)} = 2e^{(x+y)} \end{aligned}$$

>simplify(%);

$$2e^{(x+y)} = 2e^{(x+y)}$$

**Пример 12 (обобщение формулы Даламбера).** Найти функцию  $u = u(x, t)$ , удовлетворяющую неоднородному одномерному волновому уравнению:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

и начальным условиям:

$$u(x, 0) = \Phi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \Psi(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

*Решение.* Решаем задачу в системе Maple. Для этого разобьем ее на две задачи:

1) найти функцию  $u = u(x, t)$ , удовлетворяющую однородному одномерному волновому уравнению

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

и неоднородным начальным условиям:

$$u(x, 0) = \Phi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \Psi(x), \quad -\infty < x < \infty;$$

2) найти функцию  $u = u(x, t)$ , удовлетворяющую неоднородному одномерному волновому уравнению:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

и однородным начальным условиям:

$$u(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Решаем первую задачу. Зададим уравнение и начальные условия:

```
>pde1:=1/v^2*diff(u(x,t),t,t)-diff(u(x,t),x,x)=0;
iv1:=u(x,0)=Phi(x),D[2](u)(x,0)=Psi(x);
```

$$\text{pde1} := \frac{\partial^2 u(x,t)}{v^2} - \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right) = 0$$

$$\text{iv1} := u(x,0) = \Phi(x), \quad D_2(u)(x,0) = \Psi(x)$$

Сформулированная задача может быть решена одной командой

```
>pdsolve([pde1,iv1]);
```

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \frac{1}{v} \left( \Phi(-tv+x)v + \Phi(tv+x)v - \left( \int_0^{-tv+x} \Psi(x_1) dx_1 \right) + \int_0^{tv+x} \Psi(x_1) dx_1 \right)$$

Упростим полученное решение, приведя его к формуле (2.91)

```
>IntegrationTools[Combine](%);IntegrationTools[Flip](%);
res1:=expand(%);
```

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \frac{- \left( \int_{tv+x}^{-tv+x} \Psi(x_1) dx_1 \right) + \Phi(-tv+x)v + \Phi(tv+x)v}{v}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \frac{\int_{-tv+x}^{tv+x} \Psi(x_1) dx_1 + \Phi(-tv+x)v + \Phi(tv+x)v}{v}$$

$$\text{res1} := u(x,t) = \frac{1}{2} \frac{\int_{-tv+x}^{tv+x} \Psi(x_1) dx_1}{v} + \frac{1}{2} \Phi(-tv+x) + \frac{1}{2} \Phi(tv+x)$$

Таким образом, мы получили формулу (2.91). Решаем теперь вторую задачу. Зададим уравнение, начальные условия и сразу же решим задачу с помощью команды

```
>pde2:=1/v^2*diff(u(x,t),t,t)-diff(u(x,t),x,x)=f(x,t);
iv2:=u(x,0)=0,D[2](u)(x,0)=0;
res2:=simplify(pdsolve([pde2,iv2]),symbolic);
```

$$\text{pde2} := \frac{\partial^2 u(x,t)}{v^2} - \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right) = f(x,t)$$

$$\text{iv2} := u(x,0) = 0, \quad D_2(u)(x,0) = 0$$

$$\text{res2} := u(x,t) = \frac{1}{2} v \left( \int_0^t \int_{-tv+v\tau_1+x}^{tv-v\tau_1+x} f(\zeta_1, \tau_1) d\zeta_1 d\tau_1 \right)$$

Итак, мы получили: решением задачи Коши

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

является функция

$$u(x, t) = \frac{v}{2} \int_0^{t-xv(t-\tau)} \int_{x-v(t-\tau)}^{x+v(t-\tau)} f(\zeta, \tau) d\zeta d\tau.$$

Очевидно, решением задачи Коши

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \Phi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \Psi(x), \quad -\infty < x < \infty$$

будет сумма решений первой и второй задач. Действительно, проверим это с помощью Maple. Сформулируем задачу:

```
>sys:=[1/v^2*diff('w'(x,t),t,t)-diff('w'(x,t),x,x)=f(x,t),
'w'(x,0)=Phi(x),D[2]('w')(x,0)=Psi(x)];
```

$$sys := \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, t) = f(x, t), \quad w(x, 0) = \Phi(x), \quad D_2(w)(x, 0) = \Psi(x) \right]$$

Образую функцию

```
>w:=unapply(rhs(res2)+rhs(res1),x,t);
```

$$w := (x, t) \rightarrow \frac{1}{2}v \left( \int_0^{t-v\tau_1+x} \int_{0-tv+v\tau_1+x}^{t-v\tau_1+x} f(\zeta_1, \tau_1) d\zeta_1 d\tau_1 \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\int_{-tv+x}^{tv+x} \Psi(x_1) dx_1}{v} + \frac{1}{2} \Phi(-tv+x) + \frac{1}{2} \Phi(tv+x)$$

Выполним проверку простой подстановкой:

```
>simplify(pdetest(w(x,t),sys));
```

[0, 0, 0]

Итак, решением задачи Коши для неоднородного одномерного волнового уравнения с неоднородными начальными условиями будет функция

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\Phi(x+vt) + \Phi(x-vt)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \Psi(\xi) d\xi + \frac{v}{2} \int_0^{t-xv(t-\tau)} \int_{x-v(t-\tau)}^{x+v(t-\tau)} f(\zeta, \tau) d\zeta d\tau.$$

**Пример 13.** В момент  $t = 0$  неограниченная струна возмущена начальным отклонением, имеющим форму, изображенную на рисунке 2.7. Построить (нарисовать) положение струны для моментов времени  $t_k = \frac{kl}{4v}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . Для построения графиков принять  $v = 1$ ,  $l = 1$ .

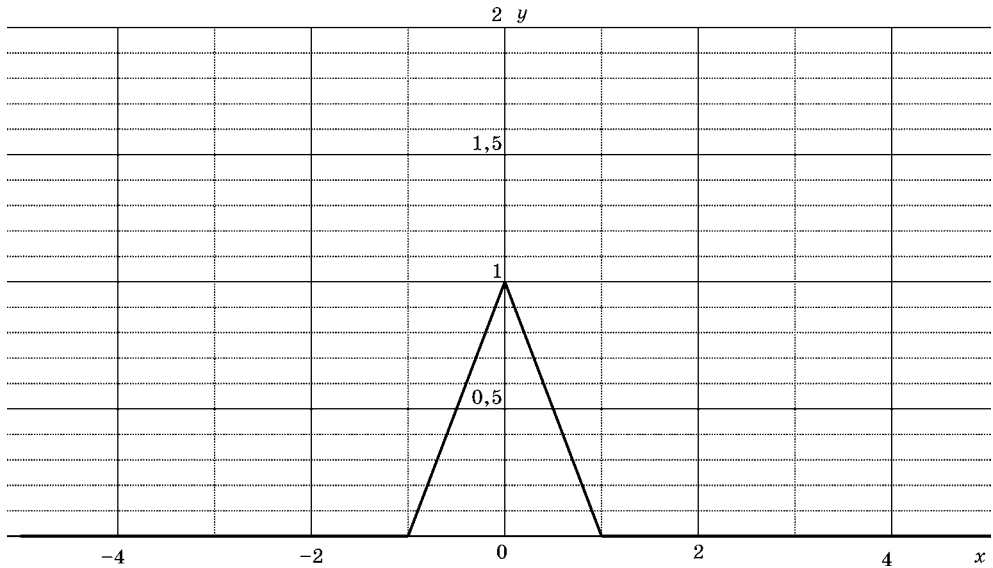


Рис. 2.7  
Начальное отклонение струны

*Решение.* Решаем задачу в системе Maple. Воспользуемся построенным в примере 12 решением для одномерного волнового уравнения. Определим функцию смещения по формуле Даламбера:

```
>u:=proc(t,x) options operator, arrow;
  1/2*(int(Psi(xi),xi=-t*v+x..t*v+x))/v+
  1/2*Phi(-t*v+x)+1/2*Phi(t*v+x)
end proc;
```

$$u := (t, x) \rightarrow \frac{1}{2} \frac{\int_{-tv+x}^{tv+x} \Psi(\xi) d\xi}{v} + \frac{1}{2} \Phi(-tv+x) + \frac{1}{2} \Phi(tv+x)$$

Определим функции  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$  в виде

```
>v:=1:L:=1:alpha:=1:
Phi:=x->
piecewise(x<-L,0,x<0,alpha*(1+x/L),x<L,alpha*(1-x/L),x>L,0):
'Phi(x)'=Phi(x);
Psi:=x->0;
```

Выведем график начального отклонения:

```
>plot(Phi(x),x=-5..5,y=0..2,numpoints=400,
color=black,thickness=3,symbolsize=12,
font=[Times,roman,12],labelfont=[Helvetica,roman,12],
gridlines=true);
```

(рис. 2.7)

Представим решение в виде двумерных графиков для нескольких моментов времени:

```
>N:=3;p:=Array(0..N):
for i from 0 to N do
p[i]:=plot(u(i/4,x),x=-5..5,y=0..2,thickness=3,
title=cat("Смещение u(t,x) при t=",convert(i/4,string)),
color=black,font=[COURIER,BOLD,12],symbolsize=12,
labelfont=[Helvetica,roman,12],gridlines=true):
end do:
>display(p);
```

(рис. 2.8)

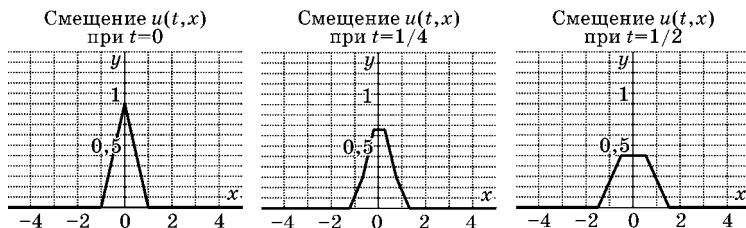


Рис. 2.8  
Смещение струны

```
>N:=3;p:=Array(N..N+2):
for i from N to N+2 do
p[i]:=plot(u(i/4,x),x=-5..5,y=0..2,thickness=3,
title=cat("Смещение u(t,x) при t=",convert(i/4,string)),
color=black,font=[COURIER,BOLD,12],symbolsize=12,
labelfont=[COURIER,BOLD,12],gridlines=true):
end do:
>display(p);
```

(рис. 2.9)

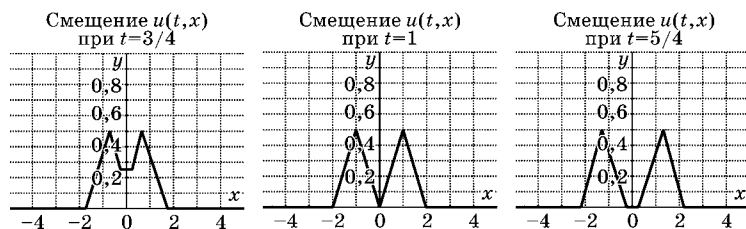


Рис. 2.9  
Смещение струны



# МЕТОД ФУРЬЕ

## ГЛАВА

**В** этой главе мы приступаем к изучению одного из основных аналитических методов решения краевых задач математической физики — метода Фурье. *Метод Фурье* или *метод разделения переменных* является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Применение метода Фурье будет иметь успех, если уравнение задачи является линейным и относится к классу дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Помимо метода Фурье, следует отметить и другие аналитические методы, базирующиеся на интегральных преобразованиях. Это методы преобразования Фурье, Лапласа и другие методы интегральных преобразований в бесконечных пределах, метод Гринберга интегральных преобразований в конечных пределах, метод функций Грина. Некоторые из этих методов мы также изучим в дальнейшем.

Все перечисленные методы относятся к аналитическим методам решения задач математической физики. Они позволяют получить точное решение задачи в формульном виде. Правда, не всегда такое точное решение бывает удобно для исследования. Следует также иметь в виду, что не всегда точное решение может быть получено, и поэтому на практике часто бывает необходимо использовать приближенные методы решения краевых задач математической физики. В этих случаях могут быть использованы асимптотические или численные методы.

### 3.1. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Как мы отметили выше, метод Фурье основан на разделении переменных и применяется для решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Именно последние уравнения занимают особое место в общей теории дифференциальных уравнений с частными производными. Это объясняется тем, что, с одной стороны, они составляют наиболее разработанную часть этой теории, а с другой стороны, описывая реальные физические процессы, линейные дифференциальные уравнения в частных производных находят многочисленные применения в физике и технике. Решения этих уравнений обладают рядом замечательных свойств, напоминающих соответствующие свойства решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Напомним, что дифференциальное уравнение называется *линейным*, если неизвестная функция и все ее производные входят в это уравнение в первой

степени и если оно не содержит членов с произведениями этих величин. Так, например, дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, линейное и *однородное* относительно неизвестной функции и ее производных, имеет вид

$$L(u) \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = 0, \quad (3.1)$$

где  $L$  — линейный дифференциальный оператор;  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — искомая функция, коэффициенты этого уравнения — заданные функции от  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Если правая часть уравнения отлична от нуля, т. е.

$$L(u) = F(x),$$

где  $F(x)$  — известная функция от  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , то линейное уравнение называется *неоднородным*.

В основе важнейших методов интегрирования линейных уравнений в частных производных лежит общая для всех таких уравнений идея. Она заключается в свойстве решений, которое называется *принципом суперпозиции (наложения)*. Этот принцип можно высказать в виде следующей теоремы.

**Принцип суперпозиции.** Если каждая из функций

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$$

является решением однородного линейного дифференциального уравнения  $L(u) = 0$ , то и их линейная комбинация

$$u(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + \dots + C_n u_n(x),$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  — произвольные постоянные, также является решением этого уравнения.

Действительно, достаточно проверить, что  $L(u) = 0$ , если

$$L(u_1) = 0, L(u_2) = 0, \dots, L(u_n) = 0.$$

Используя правила дифференцирования, легко получаем цепочку равенств

$$L(u) = C_1 L(u_1) + C_2 L(u_2) + \dots + C_n L(u_n) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Принцип суперпозиции допускает следующее важное обобщение на случай бесконечных рядов.

**Обобщенный принцип суперпозиции.** Если каждая из функций

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$$

является решением однородного линейного дифференциального уравнения  $L(u) = 0$ , то ряд

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x)$$

также является решением этого уравнения, если он сходится к некоторой функции  $u(x)$  и допускает почленное дифференцирование.

В самом деле, если все производные функции  $u$ , фигурирующие в уравнении  $L(u) = 0$ , вычисляются почленным дифференцированием ряда, то в силу линейности уравнения

$$L(u) = L\left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n L(u_n) = 0,$$

так как сходящиеся ряды можно складывать почленно. Тем самым доказано, что функция  $u$  удовлетворяет уравнению. В качестве достаточного условия для возможности почленного дифференцирования ряда мы постоянно будем пользоваться условием равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n L(u_n),$$

получаемого после дифференцирования.

Как известно, принцип суперпозиции, аналогичный сформулированному выше принципу для уравнения (3.1), имеет место и для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Из теории этих уравнений известно также, что линейное уравнение  $n$ -го порядка имеет не более  $n$  линейно независимых решений. Поэтому в этом случае имеет смысл говорить лишь о линейной комбинации этих решений в числе не более  $n$ .

В случае же линейного уравнения в частных производных можно выбрать бесконечное множество линейно независимых частных решений\*. Это обстоятельство совместно с обобщенным принципом суперпозиции играет чрезвычайно важную роль в образовании решения уравнения в частных производных. Именно большой набор частных решений такого уравнения даст возможность выделить из общего решения то, которое должно удовлетворять, вообще говоря, произвольным дополнительным условиям.

Обобщение принципа суперпозиции идет еще дальше. Может оказаться, что решение уравнения в частных производных  $L(u) = 0$  имеет вид  $u(x, \xi)$ , т. е. зависит от некоторого параметра, изменяющегося в конечном или бесконечном промежутке  $(a, b)$ . Эта зависимость понимается так, что при всех значениях  $\xi \in (a, b)$  функция  $u(x, \xi)$  является решением уравнения, т. е.  $L(u(x, \xi)) \equiv 0$ . Из предыдущего следует, что, в свою очередь, функция  $v(\xi)u(x, \xi)$ , где  $v(\xi)$  — произвольная функция, будет также решением уравнения  $L(u) = 0$ . Как и ранее, интерес представляет бесконечная сумма выписанных решений. Но так как  $v(\xi)$  зависит от непрерывно меняющегося параметра  $\xi$ , то это суммирование должно осуществляться при помощи интеграла. Таким образом, мы приходим к рассмотрению интеграла

$$\int_a^b v(\xi)u(x, \xi)d\xi.$$

Нетрудно убедиться, что этот интеграл является решением уравнения в частных производных  $L(u) = 0$ , конечно, при условиях его существования и

---

\* Бесконечное множество функций называется линейно независимым, если любое конечное множество этих функций будет линейно независимым.



законности выполнения операции дифференцирования по  $x$  под знаком интеграла.

Рассмотрим однородное линейное уравнение (3.1):  $L(u) = 0$ . Мы скажем, что это уравнение относится к классу уравнений с разделяющимися переменными, если оно допускает бесконечное множество решений в виде

$$u = \prod_{i=1}^n X_i(x_i), \quad (3.2)$$

причем все решения  $X_i(x_i)$  получаются из обыкновенных дифференциальных уравнений подстановкой (3.2) в (3.1).

Для того чтобы переменные в уравнении (3.1) разделялись, необходимо, чтобы оператор  $L$  имел определенную структуру. В частности, переменные разделяются, если уравнение имеет вид

$$L(u) = L_1(u) + L_2(u) + \dots + L_n(u) = 0,$$

где  $L_1$  — зависит только от  $x_1$ ;  $L_2$  — зависит только от  $x_2$ ;  $L_n$  — зависит только от  $x_n$ . Например, если  $n = 2$ , то будем иметь

$$L(u) = L_1(u) + L_2(u) = 0. \quad (3.3)$$

Переменные разделяются, если оператор  $L$  имеет такой вид (в случае  $n = 3$ )

$$L(u) = L_1(u) + L_2(u) + g(x_2)L_3(u) = 0. \quad (3.4)$$

Рассмотрим подробнее методику разделения переменных на конкретных примерах. Если дано уравнение (3.1) с разделяющимися переменными, то все решения  $X_i(x_i)$  в формуле (3.2) мы получим из обыкновенных дифференциальных уравнений путем подстановки (3.2) в (3.1). Пусть, например, уравнение имеет вид (3.3). Тогда это уравнение должно иметь решения вида  $u(x_1, x_2) = X_1(x_1)X_2(x_2)$ . Подставим это представление решения в уравнение (3.3), получим

$$X_2L_1(X_1) + X_1L_2(X_2) = 0 \Rightarrow \frac{L_1(X_1)}{X_1} + \frac{L_2(X_2)}{X_2} = 0. \quad (3.5)$$

В последнем уравнении одно слагаемое зависит только от  $x_1$ , а другое — только от  $x_2$ . Равенство (3.5) возможно лишь в случае, когда

$$\frac{L_1(X_1)}{X_1} = -\lambda, \quad \frac{L_2(X_2)}{X_2} = \lambda,$$

где  $\lambda = \text{const}$ . Таким образом, будем иметь обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$L_1(X_1) + \lambda X_1 = 0, \quad L_2(X_2) - \lambda X_2 = 0, \quad (3.6)$$

и разделение переменных осуществлено (число  $\lambda$  называется *параметром разделения*). Интегралы уравнений (3.6) зависят от параметра  $\lambda$  и постоянных интегрирования, т. е. получаем бесконечную совокупность частных решений.

Рассмотрим уравнение (3.4). Покажем, что это уравнение допускает решение в виде  $u(x_1, x_2) = X_1(x_1)X_2(x_2)X_3(x_3)$ . После подстановки этого представления в (3.5) получим

$$X_2X_3L_1(X_1) + X_1X_3L_2(X_2) + g(x_2)X_1X_2L_3(X_3) = 0$$

или

$$\frac{L_1(X_1)}{X_1} + \frac{L_2(X_2)}{X_2} + \frac{g(x_2)L_3(X_3)}{X_3} = 0. \quad (3.7)$$

Равенство (3.7) возможно лишь в случае

$$\frac{L_1(X_1)}{X_1} = -\lambda, \quad \frac{L_2(X_2)}{X_2} + \frac{g(x_2)L_3(X_3)}{X_3} = \lambda.$$

Таким образом, получаем одно обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$L_1(X_1) + \lambda X_1 = 0.$$

Имеем далее:

$$\frac{L_2(X_2)}{g(x_2)X_2} - \frac{\lambda}{g(x_2)} + \frac{L_3(X_3)}{X_3} = 0. \quad (3.8)$$

Равенство (3.8) возможно лишь в случае, когда

$$\frac{L_3(X_3)}{X_3} = -\mu, \quad \frac{L_2(X_2)}{g(x_2)X_2} - \frac{\lambda}{g(x_2)} = \mu.$$

Откуда получаем еще два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$L_3(X_3) + \mu X_3 = 0, \quad L_2(X_2) - [\mu g(x_2) + \lambda]X_2 = 0.$$

Иногда, чтобы добиться разделения переменных в некотором заданном уравнении, можно положить  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)w$ . После подстановки такого выражения в уравнение  $L(u) = 0$  с не разделяющимися переменными можно получить новое уравнение вида  $M(w) = 0$ , у которого переменные разделяются.

В задачах математической физики часто приходится сталкиваться с оператором Лапласа. Помимо уравнения Лапласа, как мы знаем, оператор Лапласа входит в волновое уравнение, в уравнение теплопроводности и ряд других уравнений. Поэтому, если в некоторой системе криволинейных координат переменные могут быть разделены в уравнении Лапласа, есть основания надеяться на то, что и ряд более общих краевых задач (в которые входит оператор Лапласа) может быть решен методом Фурье. Самой простой и наиболее распространенной системой координат, в которой переменные в операторе Лапласа разделяются, является декартова прямоугольная система координат. В цилиндрической и сферической системах координат переменные в уравнении Лапласа также разделяются (читателю мы рекомендуем убедиться в этом самостоятельно). Существует одиннадцать координатных систем, в которых возможно разделение переменных в операторе Лапласа. Использование специальных координатных систем может оказаться удобным в том случае, если граничные условия заданы на поверхностях, являющихся координатными поверхностями в соответствующей системе ортогональных координат. Так, например, если граничные условия заданы на сфере, удобно использовать сферические координаты, если границами являются цилиндрические и плоские области, следует перейти к цилиндрическим координатам, а если границей является сфероид, полезно использовать сфероидальную систему координат.

## 3.2. ЗАДАЧА ОБ ОХЛАЖДЕНИИ ПЛАСТИНЫ

Прежде чем начать систематическое изложение теории метода Фурье и общего алгоритма применения этого метода к решению краевых задач математической физики, рассмотрим пример, иллюстрирующий основные идеи, положенные в его основу.

Дана пластина толщиной  $a$  и бесконечной протяженности в двух других направлениях (рис. 3.1). Пусть задано некоторое начальное распределение температуры, зависящее только от координаты  $x$ . Требуется определить дальнейшее распределение температуры в пластине при условии, что стенки поддерживаются при нулевой температуре.

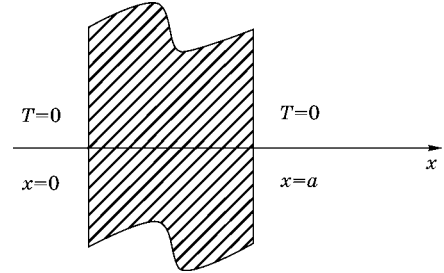


Рис. 3.1  
Бесконечная пластина

**Математическая постановка задачи.** Процесс, очевидно, описывается следующим уравнением теплопроводности:

$$\Delta T - \frac{c\rho}{k} \frac{\partial T}{\partial t} = 0,$$

которое рассматривается в области  $0 < x < a, t > 0$ .

Обозначим лишь для простоты записи  $\tau = kt/(c\rho)$  (напомним, что здесь  $\rho$  — плотность,  $c$  — удельная теплоемкость,  $k$  — коэффициент теплопроводности). Тогда уравнение теплопроводности переписется в виде

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0, \quad 0 < x < a, \tau > 0. \quad (3.9)$$

Сформулируем граничные и начальные условия. Граничные условия:

$$T|_{x=0} = 0, \quad T|_{x=a} = 0. \quad (3.10)$$

Начальное условие:

$$T|_{\tau=0} = \Phi(x). \quad (3.11)$$

В нашем случае уравнение (3.9) является уравнением с разделяющимися переменными, так как оператор этого уравнения имеет вид

$$L(T) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial \tau} = L_x(T) + L_\tau(T); \quad L_x(T) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad L_\tau(T) = -\frac{\partial T}{\partial \tau}.$$

Будем строить частное решение уравнения (3.9) в виде

$$T = X(x)Y(\tau). \quad (3.12)$$

Подставим (3.12) в (3.9), получим

$$YX'' - XY' = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{Y'}{Y} = -\lambda.$$

Здесь штрих означает дифференцирование по соответствующей координате. Таким образом, получили два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$X'' + \lambda X = 0; \quad Y' + \lambda Y = 0. \quad (3.13)$$

В силу граничных условий (3.10) будем иметь также

$$X(0) = 0; \quad X(a) = 0.$$

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$X'' + \lambda X = 0; \quad X(0) = 0; \quad X(a) = 0. \quad (3.14)$$

Особенностью этой задачи является то, что дифференциальное уравнение и граничные условия — однородные. Поэтому такая задача всегда имеет нулевое решение  $X(x) = 0$ . Это решение называется *тривиальным* решением. Очевидно, нас будут интересовать нетривиальные решения, не равные тождественно нулю  $X(x) \neq 0$ . Такие нетривиальные решения называются *собственными функциями* рассматриваемой краевой задачи (3.14). Нетривиальные решения существуют при определенных значениях параметра  $\lambda$ . Значения  $\lambda$ , при которых существуют нетривиальные решения задачи, называются *собственными значениями* этой задачи.

Найдем собственные значения и собственные функции задачи (3.14). Общее решение уравнения (3.14), очевидно, имеет вид

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad A, B = \text{const.}$$

Из граничных условий находим

$$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0; \quad X(a) = 0 \Rightarrow B \sin(\sqrt{\lambda}a) = 0.$$

Нас интересует нетривиальное решение, поэтому считаем, что  $B \neq 0$ . Тогда будем иметь

$$\sin(\sqrt{\lambda}a) = 0.$$

Откуда находим собственные значения задачи (3.14)

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (n \in \mathbb{N}),$$

где  $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел. Собственными функциями задачи (3.14) будут следующие функции, которые определяются с точностью до постоянного множителя

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отдельно следует рассмотреть случай  $\lambda = 0$ . В этом случае общее решение уравнения (3.14) дается формулой

$$X(x) = A + Bx.$$

Из граничных условий теперь будем иметь  $A = 0, B = 0$ . Таким образом, при  $\lambda = 0$  получаем только тривиальное решение. Значит,  $\lambda = 0$  не является собственным значением задачи (3.14).

Рассмотрим теперь второе уравнение (3.13):

$$Y' + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y = 0. \quad (3.15)$$

Общий интеграл уравнения (3.15) имеет вид

$$Y_n(\tau) = C_n e^{\left(-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\tau\right)}.$$

Таким образом, мы получили бесконечное множество частных решений исходного уравнения (3.9):

$$T = T_n = M_n e^{\left(-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\tau\right)} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Каждое из этих решений удовлетворяет исходному уравнению (3.9) и граничным условиям (3.10), но не удовлетворяет начальному условию (3.11). Чтобы удовлетворить этому начальному условию, воспользуемся принципом суперпозиции и составим формальный ряд. Решение задачи запишем в виде

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} M_n e^{\left(-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\tau\right)} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right). \quad (3.16)$$

Мы постулируем «достаточно хорошую» сходимости ряда (3.16), которая означает, что возможно почленное дифференцирование по  $x$  и  $\tau$  под знаком суммы. Можно утверждать, что полученное решение удовлетворяет граничным условиям (3.10) при условии, что можно переходить к пределу под знаком суммы при  $x \rightarrow 0$  и  $x \rightarrow a$ . Будем также предполагать, что под знаком суммы возможен предельный переход при  $\tau \rightarrow 0$ . Имеем тогда

$$T|_{\tau=0} = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad 0 < x < a. \quad (3.17)$$

Основываясь на теории рядов Фурье и допуская, что функция  $\Phi(x)$  разлагается в ряд Фурье, можно записать

$$M_n = \frac{2}{a} \int_0^a \Phi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx.$$

Формально задача решена, при некоторых допущениях. Сделаем обоснование всех этих допущений. Проведем обоснование в предположении, что

$$\Phi(x) \in C^{(1)}([0, a]), \quad \Phi(0) = 0, \quad \Phi(a) = 0. \quad (3.18)$$

Простота обоснования определяется тем фактом, что при выполнении условий (3.18) функция  $\Phi(x)$  разлагается в ряд Фурье, т. е.

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right); \quad M_n = \frac{2}{a} \int_0^a \Phi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx, \quad x \in [0, a].$$

При этом сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |M_n|. \quad (3.19)$$

Опираясь на эти факты, докажем, что (3.16) есть решение нашей задачи. Будем рассматривать область  $0 \leq x \leq a$ ,  $\tau \geq 0$ . Легко видеть, что ряд (3.16) мажорируется сходящимся рядом. Действительно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| M_n e^{\left(-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\tau\right)} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |M_n|$$

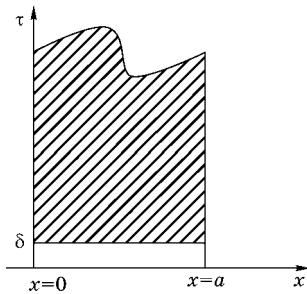
для всех  $x$  и  $\tau$ :  $0 \leq x \leq a$ ,  $\tau \geq 0$ . Ряд (3.19) сходится, сходится и ряд (3.16). Так как мажорирующий ряд является числовым, то ряд (3.16) сходится равномерно по Вейерштрассу относительно  $x$  и  $\tau$ :  $0 \leq x \leq a$ ,  $\tau \geq 0$ . В силу этого законны предельные переходы при  $x \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow a$ ,  $\tau \rightarrow 0$ , т. е. можно записать

$$\lim_{x \rightarrow 0} T = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} M_n e^{\left(-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\tau\right)} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n e^{\left(-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\tau\right)} \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \equiv 0.$$

Аналогично устанавливается, что

$$\lim_{x \rightarrow a} T = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} T = \Phi(x).$$

Покажем, что (3.16) удовлетворяет уравнению (3.9). Для этого рассмотрим ряды, полученные формальным дифференцированием по  $x$  и  $\tau$ :



$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \sum_{n=1}^{\infty} M_n e^{\left(-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\tau\right)} \frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right); \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= -\sum_{n=1}^{\infty} M_n e^{\left(-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\tau\right)} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right); \\ \frac{\partial T}{\partial \tau} &= -\sum_{n=1}^{\infty} M_n e^{\left(-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\tau\right)} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Рис. 3.2  
К обоснованию решения

Покажем, что дифференцирование возможно. Выделим небольшую полоску (рис. 3.2) шириной  $\delta$  и рассмотрим область  $D^*$ :  $0 \leq x \leq a$ ,  $\tau \geq \delta > 0$ .

В этой области ряды (3.20) мажорируются числовыми рядами

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |M_n| \left| e^{\left(-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\delta\right)} \left(\frac{n\pi}{a}\right) \right| &\leq A \sum_{n=1}^{\infty} |M_n|, \quad \left| e^{\left(-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\delta\right)} \left(\frac{n\pi}{a}\right) \right| \leq A, \\ \sum_{n=1}^{\infty} |M_n| \left| e^{\left(-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\delta\right)} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \right| &\leq B \sum_{n=1}^{\infty} |M_n|, \quad \left| e^{\left(-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\delta\right)} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \right| \leq B. \end{aligned}$$

Значит, ряды (3.20) сходятся, причем сходимость равномерная в области  $D^*$ . Следовательно, почленное дифференцирование законно и полученные выражения (3.20) действительно являются производными функции (3.16). Таким образом, будем иметь в области  $D^*$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0.$$

Величина  $\delta$  произвольно мала, следовательно, последнее равенство справедливо в открытой области  $D$ :  $0 < x < a$ ,  $\tau > 0$ . Таким образом, все условия задачи проверены. Кроме того, мы можем утверждать, что  $T \in C^{(2)}(D)$ .

### 3.3. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ КРУГА

Рассмотрим еще один пример. Решим первую краевую задачу для уравнения Лапласа в круге: найти функцию  $u$ , удовлетворяющую уравнению Лапласа внутри круга радиуса  $a$ :

$$\Delta u = 0$$

и граничному условию на границе круга:

$$u|_{\Gamma} = f,$$

где  $f$  — заданная функция.

Мы предположим сначала, что функция  $f$  непрерывна и дифференцируема и решение  $u$  непрерывно в замкнутой области.

Введем полярную систему координат  $(r, \varphi)$  с началом в центре круга. Уравнение Лапласа в полярных координатах имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad -\pi < \varphi \leq \pi. \quad (3.21)$$

Граничные условия:

$$u|_{r \rightarrow 0} = O(1), \quad u|_{r=a} = f(\varphi). \quad (3.22)$$

Кроме того, мы должны поставить дополнительные условия, вытекающие из характера задачи — условия периодичности:

$$u|_{\varphi=-\pi} = u|_{\varphi=\pi}; \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=-\pi} = \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\pi}. \quad (3.23)$$

Уравнение (3.21) допускает разделение переменных. Будем искать решение в виде

$$u = R(r)\Phi(\varphi). \quad (3.24)$$

После подстановки (3.24) в (3.21) и разделения переменных получим

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0; \quad (3.25)$$

$$r(rR'(r))' - \lambda R(r) = 0. \quad (3.26)$$

В силу условий периодичности (3.23) будем иметь

$$\Phi|_{\varphi=-\pi} = \Phi|_{\varphi=\pi}, \quad \Phi'|_{\varphi=-\pi} = \Phi'|_{\varphi=\pi}. \quad (3.27)$$

Найдем собственные значения и собственные функции краевой задачи (3.25) и (3.27). Общее решение уравнения (3.25) имеет вид

$$\Phi(\varphi) = A \cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + B \sin(\sqrt{\lambda}\varphi), \quad \lambda \neq 0.$$

Из граничных условий (3.27) находим

$$2B \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0, \quad 2A\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0.$$

Если  $\sin(\sqrt{\lambda}\pi) \neq 0$ , то  $A = B = 0$  и мы имеем только тривиальное решение. Следовательно,

$$\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Собственные функции будут

$$\Phi_n(\varphi) = B_n \sin(n\varphi) + A_n \cos(n\varphi).$$

Нетрудно убедиться (читателю рекомендуем это проверить!), что  $\lambda = 0$  есть собственное число, которому отвечает собственная функция  $\Phi_0(\varphi) = A_0 = \text{const}$ , определяемая с точностью до постоянного множителя.

Рассмотрим теперь уравнение (3.26) при  $\lambda = \lambda_n = n^2$ . Это уравнение типа Эйлера. Будем искать решение уравнения (3.26) в виде  $R(r) = r^s$ . Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид  $s^2 - n^2 = 0$ . Откуда  $s = \pm n$ . Следовательно, общее решение уравнения (3.26) будет

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В случае, когда  $\lambda = 0$ , будем иметь

$$R_0(r) = C_0 + D_0 \ln(r).$$

Итак,

$$u_n = (C_n r^n + D_n r^{-n})(B_n \sin(n\varphi) + A_n \cos(n\varphi)), \quad n \in \mathbb{N}, \quad u_0 = (C_0 + D_0 \ln(r))A_0, \quad n = 0.$$

Так как функция  $u$  должна оставаться конечной (при  $r \rightarrow 0$ ), то необходимо положить  $D_0 = 0$ ,  $D_n = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Таким образом, окончательно получаем

$$u_n = (N_n \sin(n\varphi) + M_n \cos(n\varphi))r^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad u_0 = M_0, \quad n = 0.$$

Построенные частные решения отвечают всем условиям задачи, кроме второго граничного условия (3.22). Чтобы удовлетворить этому условию, воспользуемся принципом суперпозиции и составим формальный ряд:

$$u = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (N_n \sin(n\varphi) + M_n \cos(n\varphi))r^n. \quad (3.28)$$

Будем постулировать «хорошую» сходимость ряда (3.28). Из второго граничного условия (3.22) находим (предполагается, что в (3.28) возможен предельный переход при  $r \rightarrow a$  под знаком суммы)

$$u|_{r=a} = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (N_n \sin(n\varphi) + M_n \cos(n\varphi))a^n = f(\varphi). \quad (3.29)$$



Равенство (3.29) должно быть верно для всего интервала изменения  $\varphi$ . Если функция  $f(\varphi)$  удовлетворяет условиям разложения в ряд Фурье, то можно написать:

$$\begin{aligned} a^n M_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi; \\ a^n N_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi; \\ M_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Таким образом, получено формальное решение задачи.

Сейчас следовало бы доказать, что все наши рассуждения законны и ряд (3.28) действительно сходится к функции  $u(r, \varphi)$ , удовлетворяющей уравнению (3.21) и краевому условию (3.22). Оставляя в стороне эти доказательства, укажем лишь, что если функция  $f(\varphi)$  будет непрерывна и дифференцируема, то ряд (3.28) дает непрерывное решение рассматриваемой краевой задачи.

#### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КРУГА. ИНТЕГРАЛ ПУАССОНА

Решение задачи Дирихле для круга может быть записано в другой форме. Получим соответствующую формулу. С этой целью подставим выражения для коэффициентов Фурье (3.30) в формулу (3.28). Меняя порядок суммирования и интегрирования, можно записать

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) d\psi + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \left[ \cos(n\varphi) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos(n\psi) d\psi + \sin(n\varphi) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin(n\psi) d\psi \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) d\psi \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n(\psi - \varphi)) \right\}. \end{aligned}$$

Для удобства введем обозначения  $r/a = \rho$ ,  $\psi - \varphi = \alpha$ ; найдем сумму

$$S = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos(n\alpha), \quad 0 < \rho < 1.$$

Можно записать, используя формулу геометрической прогрессии со знаменателем  $|\rho e^{i\alpha}| = \rho < 1$ :

$$S = 1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (\rho e^{i\alpha})^n = 1 + 2 \operatorname{Re} \frac{\rho e^{i\alpha}}{1 - \rho e^{i\alpha}} = \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\alpha)}.$$

Решение задачи Дирихле для круга теперь можно записать в форме

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2 - 2\frac{r}{a} \cos(\psi - \varphi)} f(\psi) d\psi$$

или

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2 - r^2}{[a^2 - 2ar \cos(\psi - \varphi) + r^2]} f(\psi) d\psi. \quad (3.31)$$

Формула (3.31) называется *интегралом Пуассона*. Решение в форме (3.31) легче обосновать и для этого требуется меньше ограничений, накладываемых на функцию  $f(\varphi)$ . Функция  $f(\varphi)$  может быть только непрерывной или даже кусочно-непрерывной.

**Замечание об обосновании формулы (3.31).** Обозначим

$$K(r, \varphi, \psi) = \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\psi - \varphi)}. \quad (3.32)$$

Тогда

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(r, \varphi, \psi) f(\psi) d\psi. \quad (3.33)$$

Нетрудно видеть, что функция (3.32) непрерывна и дифференцируема, пока  $r < a$ . Функция  $u(r, \varphi)$  — непрерывная и дифференцируемая функция своих аргументов. Можно показать, что

$$\Delta K \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial K}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 K}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Следовательно,  $\Delta u = 0$  при  $r < a$ . Более сложно проверить граничное условие:  $u \rightarrow f(\varphi)$  при  $r \rightarrow a$ . Из-за расходимости интеграла при  $\psi = \varphi$  предельный переход недопустим. Перепишем (3.33) в виде

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(r, \varphi, \psi) [f(\psi) - f(\varphi)] d\psi + f(\varphi) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(r, \varphi, \psi) d\psi. \quad (3.34)$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(r, \varphi, \psi) [f(\psi) - f(\varphi)] d\psi \xrightarrow{r \rightarrow a} 0,$$

а второй интеграл в формуле (3.34) можно вычислить

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(r, \varphi, \psi) d\psi = 1.$$

Таким образом, будем иметь

$$\lim_{r \rightarrow a} u(r, \varphi) = f(\varphi).$$

Интеграла Пуассона может быть использован для решения задачи Дирихле для произвольной плоской области. Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

найти функцию  $u \in C^{(2)}(D)$ ,  $u \in C(\bar{D})$ , удовлетворяющую уравнению Лапласа в области  $D$  (рис. 3.3) и принимающую заданные значения на границе этой области  $\Gamma$ , т. е.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u|_{\Gamma} = f(P), \quad P \in \Gamma. \quad (3.35)$$

Будем рассматривать плоскость  $Oxy$  как комплексную плоскость  $z = x + iy$ . Предположим, что известна функция  $z = F(\zeta)$ ,  $\zeta = \xi + i\eta$ , осуществляющая конформное отображение области  $D$  на круг  $D^*$  (рис. 3.4).

При этом предполагается однозначность отображения. Функция  $z = F(\zeta)$  равносильна замене переменных

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta).$$

Произведем эту замену

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = |dz|^2 = |F'(\zeta)d\zeta|^2 = |F'(\zeta)|^2 (d\xi^2 + d\eta^2) = H_{\xi}^2 d\xi^2 + H_{\eta}^2 d\eta^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{H_{\xi}H_{\eta}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{H_{\eta}}{H_{\xi}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{H_{\xi}}{H_{\eta}} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\} = \\ &= \frac{1}{|F'(\zeta)|^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) = \frac{1}{|F'(\zeta)|^2} \Delta u, \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (3.35) в области  $D^*$  примет вид

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0,$$

т. е. уравнение Лапласа инвариантно по отношению к конформному преобразованию. Кроме того, имеем

$$u|_{\Gamma^*} = f(P^*), \quad P^* \in \Gamma^*.$$

При конформном отображении области  $D$  на круг  $D^*$  задача Дирихле для области  $D$  переходит в задачу Дирихле для круга  $D^*$ . Для круга  $D^*$  мы имеем интеграл Пуассона. После решения задачи Дирихле для круга  $D^*$  результат можно перевести на исходную область  $D$ .

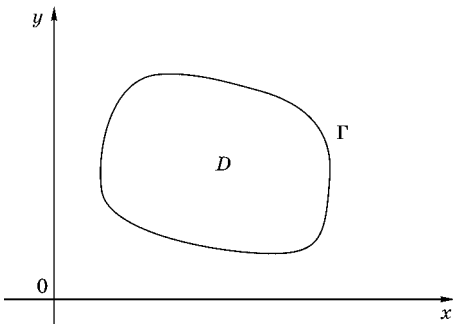


Рис. 3.3  
Произвольная плоская область

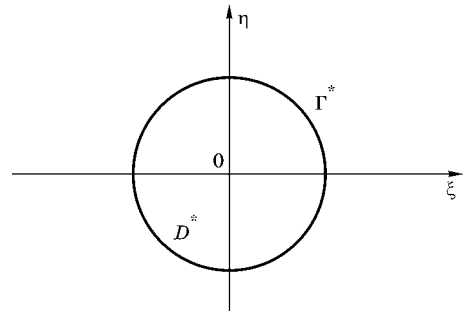


Рис. 3.4  
Круг

В заключение отметим, что приведенные здесь рассуждения могут быть с успехом применены и для решения других краевых задач для уравнения Лапласа, как двумерного, так и трехмерного. При этом метод разделения переменных даст опять должный эффект, если область, на границе которой будет задаваться краевое условие, является достаточно «хорошей»: граница ее должна совпадать с координатными линиями или поверхностями системы координат, в которой задается уравнение Лапласа. К таким областям можно отнести прямоугольник, цилиндр, параллелепипед, шар и др.

### 3.4. ЗАДАЧА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

В математической физике, как мы видели на рассмотренных выше примерах, важны методы, при которых решение задачи получается в форме ряда (или, как мы увидим дальше, интеграла), т. е. в виде разложения по некоторой системе функций. Такие разложения хорошо изучены, когда каждая из функций, по которым осуществляется разложение, зависит только от одной из переменных, встречающихся в задаче. Чтобы найти естественную систему функций, по которой можно осуществить разложение, обычно необходимо найти решение некоторой граничной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, получившей название *задачи Штурма — Лиувилля*. Здесь и далее мы рассмотрим элементы теории задачи Штурма — Лиувилля и сформулируем соответствующие *теоремы разложения*. При этом, опуская доказательства, будем стремиться к изложению результатов в виде, диктуемом практическими потребностями\*.

Рассмотрим обыкновенное однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$[p(x)X'(x)]' + [\lambda r(x) - q(x)]X(x) = 0, \quad a < x < b, \quad (3.36)$$

где  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $r(x)$  — вещественные функции от  $x$ . Будем предполагать, что  $p(x)$ ,  $p'(x)$ ,  $q(x)$ ,  $r(x)$  непрерывны в  $(a, b)$ ;  $p(x)$  и  $r(x)$  — положительны в  $(a, b)$ ;  $\lambda$  — параметр, принимающий любые значения. Уравнение (3.36) можно записать в виде

$$p(x)X''(x) + p'(x)X'(x) + [\lambda r(x) - q(x)]X(x) = 0 \quad (3.37)$$

или в виде

$$X''(x) + \frac{p'(x)}{p(x)}X'(x) + \left[ \lambda \frac{r(x)}{p(x)} - \frac{q(x)}{p(x)} \right]X(x) = 0.$$

Коэффициенты уравнения (3.37) в силу сделанных предположений непрерывны в интервале  $(a, b)$ . Каждая внутренняя точка интервала  $(a, b)$  — обыкновенная точка уравнения (3.37). Концы интервала  $(a, b)$  могут быть как обык-

\* Полную теорию можно найти в книгах: 1) *Коддингтон, Э. А. Левинсон, Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — ИЛ, 1958; 2) *Курант, Р. Гильберт, Д.* Методы математической физики. Т. 1–2. — Гостехиздат, 1957; 3) *Титчмарш, Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанным с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 1–2. — ИЛ, 1960, 1961.

новенными точками, так и особыми (сингулярными). Напомним, что если при некотором  $x$  хотя бы один из коэффициентов уравнения (3.37) имеет бесконечный разрыв или  $p(x) = 0$ , то говорят, что *коэффициенты уравнения имеют особенность* в точке  $x$ .

Нас будут интересовать решения уравнения (3.36), удовлетворяющие *однородным линейным граничным условиям с вещественными коэффициентами*. Граничную задачу с такими условиями называют *задачей Штурма — Лиувилля*. Таким образом, под задачей Штурма — Лиувилля понимается следующая задача: найти решения уравнения (3.36), принадлежащие классу  $C^{(2)}((a, b))$  и удовлетворяющие некоторым однородным граничным условиям, заданным на концах интервала  $(a, b)$ . Примером таких условий могут быть условия:

$$X|_{x \rightarrow a+0} = 0, \quad X|_{x \rightarrow b-0} = 0.$$

Различают задачи двух типов — *регулярную* и *сингулярную*. Задача Штурма — Лиувилля называется регулярной, если интервал  $(a, b)$  конечен, концы интервала  $(a, b)$  — обыкновенные точки рассматриваемого уравнения. Задача называется сингулярной, если хотя бы одно из этих условий не выполнено. Сингулярная задача может быть с одним или двумя сингулярными концами. Характер однородных граничных условий регулярной и сингулярной задач разный.

Сформулируем типовые граничные условия. В случае регулярной задачи различают: *граничные условия первого рода*:

$$X(a) = 0, \quad X(b) = 0; \tag{I}$$

граничные условия второго рода:

$$X'(a) = 0, \quad X'(b) = 0; \tag{II}$$

граничные условия третьего рода:

$$X'(a) - h_a X(a) = 0, \quad X'(b) + h_b X(b) = 0, \quad h_a, h_b \geq 0; \tag{III}$$

граничные условия четвертого рода:

$$X(a) = X(b); \quad X'(a) = X'(b); \quad p(a) = p(b). \tag{IV}$$

Граничные условия четвертого рода называются *условиями периодичности*. Точный смысл сформулированных условий таков

$$X(a) = \lim_{x \rightarrow a+0} X(x); \quad X(b) = \lim_{x \rightarrow b-0} X(x); \quad X'(a) = \lim_{x \rightarrow a+0} X'(x)$$

и т. д. Поэтому они иногда называются предельными условиями.

Все перечисленные условия — *однородные*.

В случае сингулярной задачи различают два варианта задач в зависимости от того, один или два конца сингулярны. Пусть  $x = a$  — сингулярный конец,  $x = b$  — регулярный конец. Тогда на сингулярном конце ставится условие ограниченности функции

$$X|_{x \rightarrow a+0} = O(1), \tag{V}$$

а на регулярном конце могут быть условия первого, второго или третьего рода, например

$$X'(b) + h_b X(b) = 0, \quad h_b \geq 0.$$

Если оба конца сингулярны, то ставятся условия ограниченности функции

$$X|_{x \rightarrow a+0} = O(1); \quad X|_{x \rightarrow b-0} = O(1). \quad (\text{VI})$$

Иногда указывают порядок роста функции на сингулярном конце. В частности, это можно реализовать так

$$\int_a^b r(x) |X(x)|^2 dx = O(1).$$

Перечисленные условия V и VI также однородны.

Задача Штурма — Лиувилля всегда имеет не представляющее интереса решение  $X \equiv 0$ , называемое *тривиальным*. Нас будут интересовать *нетривиальные* решения задачи. Однако нетривиальных решений при данном произвольном  $\lambda$  может и не быть. Поэтому содержанием задачи Штурма — Лиувилля является не только отыскание решений при данном  $\lambda$ , но и определение совокупности значений  $\lambda$ , при которых существуют нетривиальные решения. Всякое нетривиальное решение задачи Штурма — Лиувилля называется *собственной функцией* данной задачи. При этом параметр  $\lambda$  должен принимать некоторые определенные значения, которые называются *собственными значениями* (или *числами*) задачи. Собственные функции по определению находятся с точностью до произвольной константы. Иногда накладывается условие

$$\int_a^b r(x) |X(x)|^2 dx = 1,$$

тогда мы имеем дело с нормированными собственными функциями. Данному собственному значению могут соответствовать одна или две (не более) собственные функции. Множество всех собственных значений называется *спектром* данной задачи.

### 3.5. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ РЕГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Рассмотрим регулярную задачу Штурма — Лиувилля с граничными условиями первого, второго, третьего или четвертого рода.

Уравнение Штурма — Лиувилля:

$$[p(x)X'(x)]' + [\lambda r(x) - q(x)]X(x) = 0, \quad a < x < b, \quad (3.38)$$

где  $p(x)$ ,  $p'(x)$ ,  $q(x)$ ,  $r(x)$  непрерывны в  $[a, b]$ ;  $p(x)$  и  $r(x)$  — положительны в  $[a, b]$ .

Граничные условия: либо

$$X(a) = 0, \quad X(b) = 0, \quad (\text{I})$$

либо

$$X'(a) = 0, \quad X'(b) = 0, \quad (\text{II})$$

либо

$$X'(a) - h_a X(a) = 0, \quad X'(b) + h_b X(b) = 0, \quad h_a, h_b \geq 0, \quad (\text{III})$$

либо

$$X(a) = X(b), \quad X'(a) = X'(b), \quad p(a) = p(b). \quad (\text{IV})$$

**Теорема 1.** Все собственные значения регулярной задачи Штурма — Лиувилля вещественны.

*Доказательство.* Рассуждаем от противного. Допустим, имеется комплексное собственное значение  $\lambda = \alpha + i\beta$ . Этому значению отвечает собственная функция  $X(x) = A(x) + iB(x)$ . Вследствие того, что все коэффициенты уравнения и граничных условий вещественны, можно утверждать, что существует комплексно сопряженное собственное значение  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  и соответствующая ему собственная функция  $\bar{X}(x) = A(x) - iB(x)$ . Запишем тождества:

$$\begin{aligned} [p(x)X'(x)]' + [\lambda r(x) - q(x)]X(x) &\equiv 0, \quad a < x < b; \\ [p(x)\bar{X}'(x)]' + [\bar{\lambda} r(x) - q(x)]\bar{X}(x) &\equiv 0, \quad a < x < b. \end{aligned}$$

Первое из этих тождеств умножим на  $\bar{X}(x)$ , а второе — на  $X(x)$ . После вычитания получим

$$\bar{X}[p(x)X'(x)]' - X[p(x)\bar{X}'(x)]' + (\lambda - \bar{\lambda})r(x)X(x)\bar{X}(x) \equiv 0.$$

Проинтегрируем последнее тождество по  $(a, b)$ . При этом учтем легко проверяемое соотношение

$$\frac{d}{dx} \{p(x)[\bar{X}(x)X'(x) - X(x)\bar{X}'(x)]\} = \bar{X}[p(x)X'(x)]' - X[p(x)\bar{X}'(x)]'.$$

Получим

$$p(X'\bar{X} - X\bar{X}') \Big|_{x=a}^{x=b} + (\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b r(x)X(x)\bar{X}(x)dx \equiv 0.$$

Нетрудно убедиться, что слагаемое вне интеграла в последней формуле для всех типов условий (первого, второго, третьего или четвертого рода) обращается в нуль. А тогда будем иметь

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b r(x)X(x)\bar{X}(x)dx \equiv 0.$$

После подстановки выражений  $\lambda = \alpha + i\beta$ ,  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ ,  $X(x) = A(x) + iB(x)$ ,  $\bar{X}(x) = A(x) - iB(x)$ , получим

$$2i\beta \int_a^b r(x)[A^2(x) + B^2(x)]dx \equiv 0.$$

Так как  $[A^2(x) + B^2(x)] \neq 0$  тождественно в  $[a, b]$ , то последнее тождество означает, что  $\beta = 0$  и, следовательно,  $\lambda = \alpha$  — вещественное число. Теорема доказана.

**Примечание.**

Из вещественности собственных значений нельзя сделать заключение о вещественности собственных функций, так как собственная функция определяется с точностью до произвольной постоянной. Однако, не умаляя общности, можно ограничиться рассмотрением вещественных собственных функций.

**Теорема 2.** Все собственные значения регулярной задачи Штурма — Лиувилля ограничены снизу.

*Доказательство.* Пусть  $\lambda$  — собственное значение (вещественное число),  $X(x)$  — соответствующая собственная функция (вещественная функция). Эта функция удовлетворяет уравнению (3.38). Умножим (3.38) на  $X(x)$  и проинтегрируем по  $(a, b)$ :

$$\begin{aligned} & \int_a^b X(pX')' dx + \lambda \int_a^b rX^2 dx - \int_a^b qX^2 dx = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow pXX'|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b pX'^2 dx + \lambda \int_a^b rX^2 dx - \int_a^b qX^2 dx = 0 \Rightarrow \quad (3.39) \\ & \Rightarrow \lambda \int_a^b rX^2 dx = -pXX'|_{x=a}^{x=b} + \int_a^b pX'^2 dx + \int_a^b qX^2 dx. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что в случае условий первого, второго и четвертого рода

$$-pXX'|_{x=a}^{x=b} = 0.$$

В случае условий третьего рода

$$-pXX'|_{x=a}^{x=b} = p(b)h_b X^2(b) + p(a)h_a X^2(a) > 0.$$

Далее

$$\int_a^b pX'^2 dx > 0.$$

Равенство (3.39) превращается в неравенство, если выбросить неотрицательные слагаемые справа

$$\lambda \int_a^b rX^2 dx \geq \int_a^b qX^2 dx = \int_a^b \frac{q}{r} rX^2 dx. \quad (3.40)$$

Функция  $q/r$  непрерывна на  $[a, b]$ , следовательно, она имеет нижнюю грань, т. е.  $q/r \geq m$  при  $x \in [a, b]$ . Неравенство (3.40) превращается в следующее:

$$\lambda \int_a^b rX^2 dx \geq m \int_a^b rX^2 dx.$$



Откуда  $\lambda \geq m$ , т. е. все собственные значения расположены справа от  $m$ . В частности, если  $q \geq 0$ , то  $m \geq 0$  и, следовательно, все собственные значения неотрицательны. Теорема доказана.

### 3.6. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Рассмотрим регулярную задачу Штурма — Лиувилля для уравнения

$$[p(x)X'(x)]' + [\lambda r(x) - q(x)]X(x) = 0, \quad a < x < b, \quad (3.41)$$

где  $p(x)$ ,  $p'(x)$ ,  $q(x)$ ,  $r(x)$  — вещественны и непрерывны в  $[a, b]$ ;  $p(x)$  и  $r(x)$  — положительны в  $[a, b]$ ; каждая точка  $[a, b]$  — обыкновенная точка уравнения.

В соответствии с общей теоремой Коши можно утверждать, что существует интеграл  $X(x) \in C^{(2)}$  уравнения (3.41), удовлетворяющий условиям  $X(c) = \alpha$ ,  $X'(c) = \beta$ ,  $\alpha, \beta$  — любые числа,  $c \in (a, b)$ . Если числа  $\alpha, \beta$  не зависят от параметра  $\lambda$ , то решение  $X(x)$  при фиксированном  $x$  является *целой функцией* от  $\lambda$ .

Напомним, что под *целой функцией* комплексного переменного  $\lambda$  подразумевается такая функция, которая разлагается в ряд Тейлора во всей плоскости (радиус сходимости равен  $\infty$ ), т. е.  $f(\lambda)$  — целая функция, если

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n, \quad |\lambda| < \infty.$$

Целыми функциями, например, являются следующие функции:  $f(\lambda) = (1 + \lambda)$ ;  $f(\lambda) = P_n(\lambda)$  — произвольный полином степени  $n$ ;  $f(\lambda) = e^\lambda$ ,  $f(\lambda) = \cos(\lambda)$ ,  $f(\lambda) = \sin(\lambda)$  и другие. Примеры нецелых функций:  $f(\lambda) = \operatorname{tg}(\lambda)$ ,  $f(\lambda) = 1/(1 - \lambda)$ .

В качестве точки  $x = c$  возьмем граничную точку  $x = a$ . Тогда существуют два интеграла  $\varphi(x, \lambda)$  и  $\psi(x, \lambda)$ , удовлетворяющие условиям:

$$\varphi(x, \lambda): X(a) = 1, X'(a) = 0;$$

$$\psi(x, \lambda): X(a) = 0, X'(a) = 1.$$

Можно записать:

$$\varphi(a, \lambda) = 1, \quad \varphi'(a, \lambda) = 0;$$

$$\psi(a, \lambda) = 0, \quad \psi'(a, \lambda) = 1. \quad (3.42)$$

При этом интегралы  $\varphi(x, \lambda)$ ,  $\psi(x, \lambda) \in C^{(2)}((a, b))$  и являются, при фиксированном  $x$ , целыми функциями от  $\lambda$ . Про такую систему функций  $\{\varphi(x), \psi(x)\}$  иногда говорят, что она обладает единичной матрицей в точке  $x = a$  или что она нормирована в точке  $x = a$ .

Докажем, что эти интегралы линейно независимы. Для этого рассмотрим определитель Вронского:

$$W\{\varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda)\} = \begin{vmatrix} \varphi(x, \lambda) & \psi(x, \lambda) \\ \varphi'(x, \lambda) & \psi'(x, \lambda) \end{vmatrix}. \quad (3.43)$$

Можно записать:

$$[p(x)\varphi'(x, \lambda)]' + [\lambda r(x) - q(x)]\varphi(x, \lambda) \equiv 0;$$

$$[p(x)\psi'(x, \lambda)]' + [\lambda r(x) - q(x)]\psi(x, \lambda) \equiv 0.$$

Умножим первое тождество на  $\psi(x, \lambda)$ , а второе — на  $\varphi(x, \lambda)$  и вычтем одно из другого, получим

$$\begin{aligned} \psi(x, \lambda)[p(x)\varphi'(x, \lambda)]' - \varphi(x, \lambda)[p(x)\psi'(x, \lambda)]' &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow [p(x)\{\psi(x, \lambda)\varphi'(x, \lambda) - \varphi(x, \lambda)\psi'(x, \lambda)\}]' &= 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(pW) = 0 \Rightarrow pW = C (= \text{const}). \end{aligned}$$

Для определения константы  $C$  примем  $x = a$ , тогда

$$p(a)W|_{x=a} = p(a) \begin{vmatrix} \varphi(a, \lambda) & \psi(a, \lambda) \\ \varphi'(a, \lambda) & \psi'(a, \lambda) \end{vmatrix} = p(a) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = p(a) = C.$$

Таким образом, можно записать

$$W\{\varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda)\} = \frac{p(a)}{p(x)}. \quad (3.44)$$

У нас  $p(a) \neq 0$ , так как точка  $x = a$  — обыкновенная, следовательно,  $W \neq 0$ , а значит,  $\varphi(x, \lambda)$  и  $\psi(x, \lambda)$  — линейно независимы. Эти функции называются *фундаментальной системой решений Штурма — Лиувилля*.

Общий интеграл уравнения Штурма — Лиувилля (3.41) можно представить в виде

$$X(x, \lambda) = A\varphi(x, \lambda) + B\psi(x, \lambda), \quad A, B = \text{const}. \quad (3.45)$$

Покажем, что всегда можно построить систему функций, удовлетворяющих условиям (3.42). Пусть  $\tilde{\varphi}(x, \lambda)$  и  $\tilde{\psi}(x, \lambda)$  — некоторые линейно независимые решения уравнения (3.41). Тогда можно записать

$$\varphi(x, \lambda) = M\tilde{\varphi}(x, \lambda) + N\tilde{\psi}(x, \lambda).$$

Выберем  $M$  и  $N$  так, чтобы были удовлетворены условия (3.42), т. е.

$$\begin{aligned} M\tilde{\varphi}(a, \lambda) + N\tilde{\psi}(a, \lambda) &= 1; \\ M\tilde{\varphi}'(a, \lambda) + N\tilde{\psi}'(a, \lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Определитель системы (3.46) есть определитель Вронского

$$\Delta = \begin{vmatrix} \tilde{\varphi}(a, \lambda) & \tilde{\psi}(a, \lambda) \\ \tilde{\varphi}'(a, \lambda) & \tilde{\psi}'(a, \lambda) \end{vmatrix} = W\{\tilde{\varphi}(a, \lambda), \tilde{\psi}(a, \lambda)\}|_{x=a} \neq 0$$

(определитель отличен от нуля, так как решения  $\tilde{\varphi}(x, \lambda)$  и  $\tilde{\psi}(x, \lambda)$  линейно независимы). Значит, система (3.46) разрешима и можно всегда построить систему функций, удовлетворяющих условиям (3.42).

Если невозможно записать решение уравнения (3.41) через известные функции, то для определения функций  $\varphi(x, \lambda)$  и  $\psi(x, \lambda)$  остается какой-нибудь приближенный метод, например метод последовательных приближений.

**Пример.** Нетрудно построить фундаментальную систему решений Штурма — Лиувилля для уравнения

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l.$$

Эта система решений будет, очевидно, такой

$$\varphi(x, \lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}x); \quad \psi(x, \lambda) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}},$$

причем функции  $\varphi(x, \lambda)$  и  $\psi(x, \lambda)$  разлагаются в ряды Тейлора

$$\varphi(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} \lambda^n}{(2n)!}; \quad \psi(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1} \lambda^n}{(2n+1)!}, \quad |\lambda| < \infty,$$

т. е. это целые функции от  $\lambda$  при всяком фиксированном  $x$ .

### 3.7. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ ПРИ $\lambda \rightarrow +\infty$

Будем считать, что  $p(x) = r(x) = 1$ , тогда уравнение Штурма — Лиувилля принимает вид

$$X''(x) + (\lambda - q(x))X(x) = 0, \quad a < x < b. \quad (3.47)$$

Пусть  $\varphi(x, \lambda)$  и  $\psi(x, \lambda)$  — интегралы уравнения (3.47), удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} \varphi(a, \lambda) &= 1, \quad \varphi'(a, \lambda) = 0; \\ \psi(a, \lambda) &= 0, \quad \psi'(a, \lambda) = 1. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Изучим поведение функций  $\varphi(x, \lambda)$  и  $\psi(x, \lambda)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

При исследовании асимптотического поведения, как и при изучении других свойств, особенно полезным оказывается метод Стеклова — Лиувилля — Фубини [32], [33]; он состоит в «сравнении» заданного дифференциального уравнения с помощью интегрального уравнения типа Вольтерры с подходящим «приближающим» уравнением, которое можно проинтегрировать явно или для которого известны некоторые специальные свойства решений.

Запишем (3.47) в виде

$$X''(x) + \lambda X(x) = q(x)X(x) (= f(x)). \quad (3.49)$$

Здесь мы обозначили правую часть уравнения (3.49) через  $f(x)$ . Будем формально считать, что  $f(x)$  — известная функция, и применим к уравнению (3.49) метод Лагранжа вариации произвольных постоянных. Тогда можно записать

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}(x-a)) + B \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-a))}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_a^x f(y) \sin(\sqrt{\lambda}(x-y)) dy. \quad (3.50)$$

Подберем теперь константы  $A$  и  $B$  так, чтобы удовлетворялись начальные условия (3.48). Потребуем, например, чтобы выполнялись условия:

$$X(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda): \varphi(a, \lambda) = 1, \varphi'(a, \lambda) = 0$$

получим  $A = 1, B = 0$ . Аналогично, для функции  $\psi(x, \lambda)$  получим  $A = 0, B = 1$ . Равенство (3.50) можно записать в виде

$$\varphi(x, \lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}(x-a)) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_a^x q(y) \varphi(y, \lambda) \sin(\sqrt{\lambda}(x-y)) dy. \quad (3.51)$$

Аналогично для функции  $\psi(x, \lambda)$  будем иметь

$$\psi(x, \lambda) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-a))}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_a^x q(y) \psi(y, \lambda) \sin(\sqrt{\lambda}(x-y)) dy. \quad (3.52)$$

Уравнения (3.51) и (3.52) — интегральные уравнения Вольтерры второго рода.

Пусть  $x \in [a, b]$ . Функция  $\varphi(x, \lambda) \in C^{(2)}([a, b])$  как интеграл уравнения (3.47). Следовательно, так как функция  $\varphi(x, \lambda)$  непрерывна в  $[a, b]$ , можно записать

$$|\varphi(x, \lambda)| \leq M_\lambda, \quad x \in [a, b]. \quad (3.53)$$

Здесь  $M_\lambda$ , вообще говоря, какая-то функция от  $\lambda$ . Из уравнения (3.51) можно записать для всех  $x \in [a, b]$  и  $\lambda > 0, \lambda \rightarrow +\infty$ :

$$|\varphi(x, \lambda)| \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_a^x |q(y)| |\varphi(y, \lambda)| dy \leq 1 + \frac{M_\lambda}{\sqrt{\lambda}} \int_a^x |q(y)| dy \leq 1 + \frac{M_\lambda}{\sqrt{\lambda}} \int_a^b |q(y)| dy.$$

Пусть  $|\varphi(c, \lambda)| = M_\lambda, c \in [a, b]$ . Тогда

$$M_\lambda \leq 1 + \frac{M_\lambda}{\sqrt{\lambda}} \int_a^b |q(y)| dy. \quad (3.54)$$

Решая (3.54) относительно  $M_\lambda$ , получим

$$M_\lambda \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_a^b |q(y)| dy}.$$

Это верно при всех достаточно больших  $\lambda$  ( $\lambda \rightarrow +\infty$ ). Следовательно,  $M_\lambda \leq M$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Константа  $M$  уже не зависит от  $\lambda$ . Таким образом, можно записать  $|\varphi(x, \lambda)| \leq M, x \in [a, b]$ . Тогда второе слагаемое справа в формуле (3.51) можно оценить так

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_a^x q(y) \varphi(y, \lambda) \sin(\sqrt{\lambda}(x-y)) dy \right| \leq \frac{M}{\sqrt{\lambda}} \int_a^b |q(y)| dy, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Поэтому (3.51) можно записать в виде

$$\varphi(x, \lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}(x-a)) + O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}\right), \lambda \rightarrow +\infty, x \in [a, b].$$

Дифференцируя уравнение (3.51), получим

$$\varphi'(x, \lambda) = -\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}(x-a)) + \int_a^x q(y) \varphi(y, \lambda) \cos(\sqrt{\lambda}(x-y)) dy,$$

причем

$$\left| \int_a^x q(y) \varphi(y, \lambda) \cos(\sqrt{\lambda}(x-y)) dy \right| \leq M \int_a^b |q(y)| dy, \lambda \rightarrow \infty.$$

В последнем неравенстве справа стоит некоторое постоянное число. Таким образом,

$$\varphi'(x, \lambda) = -\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}(x-a)) + O(1), \lambda \rightarrow +\infty, x \in [a, b].$$

Аналогично, для функции  $\psi(x, \lambda)$  получим:

$$\psi(x, \lambda) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-a))}{\sqrt{\lambda}} + O(\lambda^{-1}), \lambda \rightarrow +\infty, x \in [a, b];$$

$$\psi'(x, \lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}(x-a)) + O(\lambda^{-\frac{1}{2}}), \lambda \rightarrow +\infty, x \in [a, b].$$

Читателю мы рекомендуем доказать эти формулы самостоятельно.

Рассмотрим теперь общий случай:

$$[p(x)X'(x)]' + [\lambda r(x) - q(x)]X(x) = 0, \quad a < x < b, \quad (3.55)$$

где  $p(x)$ ,  $p'(x)$ ,  $q(x)$ ,  $r(x)$  — вещественные и непрерывные функции в  $[a, b]$ ;  $p(x)$  и  $r(x)$  положительные в  $[a, b]$ .

Пусть  $\varphi(x, \lambda)$  и  $\psi(x, \lambda)$  — интегралы уравнения (3.55), удовлетворяющие условиям (3.48). Путем надлежащей замены переменных уравнение (3.55) можно превратить в уравнение рассмотренного случая\*. Например, в случае, когда  $p(x) = r(x)$ , формула преобразования имеет вид

$$X(x) = \sqrt{\frac{p(a)}{p(x)}} Y(x).$$

Уравнение (3.55) переходит в уравнение

$$Y''(x) + (\lambda - q^*(x))Y(x) = 0, \quad a < x < b,$$

причем

$$q^* = \frac{q}{p} + \frac{p''}{2p} - \frac{p'^2}{4p^2}.$$

---

\* Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Физматгиз, 1961.

В этом случае для функций  $\varphi(x, \lambda)$  и  $\psi(x, \lambda)$  будем иметь следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned}\varphi(x, \lambda) &= \sqrt{\frac{p(a)}{p(x)}} \cos(\sqrt{\lambda}(x-a)) + O(\lambda^{-\frac{1}{2}}), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad x \in [a, b]; \\ \psi(x, \lambda) &= \sqrt{\frac{p(a)}{p(x)}} \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-a))}{\sqrt{\lambda}} + O(\lambda^{-1}), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad x \in [a, b].\end{aligned}$$

### 3.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ РЕГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Рассмотрим регулярную задачу Штурма — Лиувилля для уравнения

$$[p(x)X'(x)]' + [\lambda r(x) - q(x)]X(x) = 0, \quad a < x < b, \quad (3.56)$$

где  $p(x)$ ,  $p'(x)$ ,  $q(x)$ ,  $r(x)$  — вещественные и непрерывные функции в  $[a, b]$ ; кроме того,  $p(x)$  и  $r(x)$  положительные в  $[a, b]$ ; каждая точка  $[a, b]$  — обыкновенная точка уравнения.

Будем рассматривать граничные условия трех типов:

$$X(a) = 0, \quad X(b) = 0; \quad (I)$$

$$X'(a) = 0, \quad X'(b) = 0; \quad (II)$$

$$X'(a) - h_a X(a) = 0, \quad X'(b) + h_b X(b) = 0, \quad h_a, h_b \geq 0. \quad (III)$$

Найдем собственные значения и собственные функции этой задачи. Пусть  $\varphi(x, \lambda)$  и  $\psi(x, \lambda)$  — фундаментальные решения уравнения (3.56), удовлетворяющие условиям:

$$\varphi(a, \lambda) = 1, \quad \varphi'(a, \lambda) = 0;$$

$$\psi(a, \lambda) = 0, \quad \psi'(a, \lambda) = 1.$$

Такие решения существуют, причем  $\varphi(x, \lambda) \in C^{(2)}([a, b])$ ,  $\psi(x, \lambda) \in C^{(2)}([a, b])$ ,  $\varphi(x, \lambda)$ ,  $\psi(x, \lambda)$  — целые функции от  $\lambda$  при фиксированном  $x \in [a, b]$ . Будем считать  $\varphi(x, \lambda)$ ,  $\psi(x, \lambda)$  известными функциями. Запишем общий интеграл уравнения (3.56):

$$X(x, \lambda) = A\varphi(x, \lambda) + B\psi(x, \lambda), \quad A, B = \text{const}.$$

Ясно, что  $X(x, \lambda) \in C^{(2)}([a, b])$ . Задача заключается в том, чтобы выбрать числа  $A, B, \lambda$  так, чтобы полученное решение отвечало граничным условиям. В случае условий первого рода (I)

$$A\varphi(a, \lambda) + B\psi(a, \lambda) = 0;$$

$$A\varphi(b, \lambda) + B\psi(b, \lambda) = 0$$

или

$$A = 0, \quad B\psi(b, \lambda) = 0, \quad B \neq 0 \Rightarrow \psi(b, \lambda) = 0. \quad (3.57)$$

Уравнение (3.57) — уравнение для определения  $\lambda$ .

В случае условий второго рода (II)

$$A\varphi'(a, \lambda) + B\psi'(a, \lambda) = 0;$$

$$A\varphi'(b, \lambda) + B\psi'(b, \lambda) = 0$$

или

$$B = 0, \quad A\varphi'(b, \lambda) = 0, \quad A \neq 0 \Rightarrow \varphi'(b, \lambda) = 0. \quad (3.58)$$

Уравнение (3.58) — уравнение для определения  $\lambda$ .

В случае условий третьего рода (III)

$$A[\varphi'(a, \lambda) - h_a\varphi(a, \lambda)] + B[\psi'(a, \lambda) - h_a\psi(a, \lambda)] = 0;$$

$$A[\varphi'(b, \lambda) + h_b\varphi(b, \lambda)] + B[\psi'(b, \lambda) + h_b\psi(b, \lambda)] = 0$$

или

$$-Ah_a + B = 0, \quad A[\varphi'(b, \lambda) + h_b\varphi(b, \lambda) + h_a\psi'(b, \lambda) + h_a h_b\psi(b, \lambda)] = 0;$$

$$A \neq 0 \Rightarrow \varphi'(b, \lambda) + h_b\varphi(b, \lambda) + h_a\psi'(b, \lambda) + h_a h_b\psi(b, \lambda) = 0. \quad (3.59)$$

Уравнение (3.59) — уравнение для определения  $\lambda$ .

Заранее неизвестно, имеют ли уравнения (3.57)–(3.59) решения. Покажем, что эти уравнения имеют бесчисленное множество решений. Доказательство проведем для случая, когда  $p(x) = r(x) = 1$ . Воспользуемся асимптотическими формулами. В случае условий первого рода

$$\psi(b, \lambda) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(b-a))}{\sqrt{\lambda}} + O(\lambda^{-1}), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Видим, что функция  $\psi(b, \lambda)$  имеет колебательный характер при достаточно больших  $\lambda$ . Следовательно, она бесчисленное множество раз проходит через нуль, т. е. существует бесчисленное множество решений уравнения (3.57).

В случае условий второго рода

$$\varphi'(b, \lambda) = -\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}(b-a)) + O(1), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

При  $\lambda \rightarrow \infty$  функция  $\varphi'(b, \lambda)$  — непрерывная функция, которая бесчисленное множество раз меняет свой знак, т. е. проходит через нуль. Следовательно, уравнение (3.58) имеет бесчисленное множество решений.

В случае условий третьего рода

$$\begin{aligned} & \varphi'(b, \lambda) + h_b\varphi(b, \lambda) + h_a\psi'(b, \lambda) + h_a h_b\psi(b, \lambda) = \\ & = -\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}(b-a)) + O(1) + h_b \left[ \cos(\sqrt{\lambda}(b-a)) + O(\lambda^{-\frac{1}{2}}) \right] + \\ & + h_a \left[ \cos(\sqrt{\lambda}(b-a)) + O(\lambda^{-\frac{1}{2}}) \right] + h_a h_b \left[ \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(b-a))}{\sqrt{\lambda}} + O(\lambda^{-1}) \right] = \\ & = -\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}(b-a)) + O(1), \quad \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Видим, что этот случай эквивалентен случаю условий второго рода.

Рассмотрим теперь вопрос о распределении собственных значений и о природе спектра собственных значений регулярной задачи Штурма — Лиувилля.

Ранее было доказано, что все собственные значения вещественны и имеют левую грань  $m$ .

Справедлива следующая теорема\*.

**Теорема.** Если целая функция комплексного переменного не равна тождественно нулю, то ее нули есть изолированные точки.

У нас функции, стоящие в левых частях уравнений (3.57)–(3.59), — целые функции от  $\lambda$  и не равны нулю тождественно. Следовательно, спектр регулярной задачи Штурма — Лиувилля состоит из множества собственных значений, отделенных друг от друга, и не имеет точек сгущения (рис. 3.5).

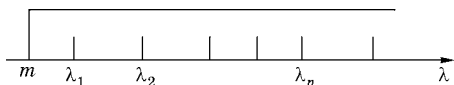


Рис. 3.5  
Дискретный спектр

Такой спектр называется *дискретным*:  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$  — последовательность собственных значений.

Противоположность дискретному спектру представляет *непрерывный* спектр или *смешанный спектр*. Таким образом, спектр регулярной задачи Штурма — Лиувилля — счетное множество вещественных чисел без точек сгущения.

Рассмотрим теперь вопрос о построении собственных функций регулярной задачи Штурма — Лиувилля. Пусть  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$  — последовательность собственных значений. Найдем собственные функции. В случае условий первого рода будем иметь

$$X_n(x) = B_n \psi(x, \lambda_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

В случае условий второго рода будем иметь

$$X_n(x) = A_n \varphi(x, \lambda_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

В случае условий третьего рода будем иметь

$$X_n(x) = A_n [\varphi(x, \lambda_n) + h_a \psi(x, \lambda_n)], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Мы видим, что каждому собственному значению соответствует одна собственная функция, определенная с точностью до произвольного постоянного множителя. Таким образом, можно построить бесконечную последовательность собственных функций  $X_1(x), X_2(x), X_3(x), \dots, X_n(x), \dots$

### 3.9. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ РЕГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Предварительно установим одно важное свойство собственных функций задачи Штурма — Лиувилля. Пусть дана система функций  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ . Будем предполагать, что все функции  $\varphi_n(x)$  этой системы вещественны и непрерывны на  $[a, b]$ . Мы скажем, что рассматриваемая система функ-

\* См., например: *Титчмарш, Е.* Теория функций. — М.: Наука, 1980; *Фукс, Б. А.* Функции комплексного переменного и некоторые их приложения / Б. А. Фукс, Б. Б. Шабат. — М.: Физматгиз, 1959.



ций ортогональна на  $[a, b]$  с весом  $\rho(x)$ , если существует такая функция  $\rho(x) \geq 0$ , что

$$\int_a^b \rho(x) \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

Если  $m = n$ , то величина

$$\|\varphi_n\| = \sqrt{\int_a^b \rho(x) \varphi_n^2(x) dx} \geq 0$$

называется *нормой* для данной системы функций. Таким образом, для данной системы функций

$$\int_a^b \rho(x) \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \|\varphi_n\|^2, & m = n. \end{cases}$$

Система функций  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{n=\infty}$  называется *ортонормированной*, если

$$\int_a^b \rho(x) \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Хорошо известным примером ортогональной системы функций на отрезке  $[0, a]$  является система синусов

$$\left\{ \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right\}_{n=1}^{n=\infty},$$

причем

$$\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \frac{a}{2}, & m = n. \end{cases}$$

Соответствующая ей ортонормированная система функций будет такой

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right\}_{n=1}^{n=\infty}.$$

Рассмотрим регулярную задачу Штурма — Лиувилля для уравнения

$$[p(x)X'(x)]' + [\lambda r(x) - q(x)]X(x) = 0, \quad a < x < b.$$

Относительно коэффициентов этого уравнения принимаем те же предположения, что и ранее: функции  $p(x)$ ,  $p'(x)$ ,  $q(x)$ ,  $r(x)$  будем считать вещественными и непрерывными в  $[a, b]$ ; кроме того,  $p(x)$  и  $r(x)$  положительные в  $[a, b]$ ; каждая точка  $[a, b]$  — обыкновенная точка уравнения.

Будем рассматривать граничные условия трех типов:

$$X(a) = 0, \quad X(b) = 0; \quad (\text{I})$$

$$X'(a) = 0, \quad X'(b) = 0; \quad (\text{II})$$

$$X'(a) - h_a X(a) = 0, \quad X'(b) + h_b X(b) = 0, \quad h_a, h_b \geq 0. \quad (\text{III})$$

Пусть  $\{X_n(x)\}_{n=1}^{n=\infty}$  — система собственных функций данной задачи,  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{n=\infty}$  — соответствующие собственные значения.

**Теорема.** Система собственных функций регулярной задачи Штурма — Лиувилля ортогональна на  $[a, b]$  с весом  $\rho(x) = r(x)$ , т. е.

$$\int_a^b r(x) X_m(x) X_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \|X_n\|^2, & m = n. \end{cases}$$

*Доказательство.* Имеем:

$$[p(x)X'_m(x)]' + [\lambda_m r(x) - q(x)]X_m(x) = 0; \quad (3.60)$$

$$[p(x)X'_n(x)]' + [\lambda_n r(x) - q(x)]X_n(x) = 0. \quad (3.61)$$

Умножим уравнение (3.60) на  $X_n(x)$ , а уравнение (3.61) — на  $X_m(x)$  и вычтем одно из другого, получим

$$X_n(x)[p(x)X'_m(x)]' - X_m(x)[p(x)X'_n(x)]' + (\lambda_m - \lambda_n)r(x)X_m(x)X_n(x) = 0.$$

Последнее равенство можно переписать так

$$\frac{d}{dx} \{p(x)[X_n(x)X'_m(x) - X_m(x)X'_n(x)]\} + (\lambda_m - \lambda_n)r(x)X_m(x)X_n(x) = 0.$$

Проинтегрируем теперь полученное равенство по  $[a, b]$ :

$$p(x)[X_n(x)X'_m(x) - X_m(x)X'_n(x)] \Big|_{x=a}^{x=b} + (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b r(x)X_m(x)X_n(x) dx = 0. \quad (3.62)$$

Нетрудно убедиться, что для условий первого, второго и третьего рода будем иметь

$$p(x)(X_n(x)X'_m(x) - X_m(x)X'_n(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} = 0.$$

Таким образом, для этих условий из (3.62) получаем

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b r(x)X_m(x)X_n(x) dx = 0,$$

а следовательно,

$$\int_a^b r(x)X_m(x)X_n(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

Теорема доказана.

Таким образом, если  $\{X_n(x)\}_{n=1}^{n=\infty}$  — система собственных функций регулярной задачи Штурма — Лиувилля, отвечающих граничным условиям первого, второго или третьего рода, то

$$\int_a^b r(x)X_m(x)X_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \|X_n\|^2, & m = n. \end{cases} \quad (3.63)$$

Пусть  $f(x)$  определена на  $[a, b]$ . Будем предполагать, что эта функция удовлетворяет некоторым условиям, которые мы уточним в дальнейшем. Поставим задачу: представить функцию  $f(x)$  в виде ряда

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x). \quad (3.64)$$

Если предположить, что такое разложение существует и ряд (3.64) сходится так, что он допускает почленное интегрирование, то можно найти коэффициенты разложения  $C_n$ . Действительно, умножим (3.64) на  $r(x)X_m(x)$  и проинтегрируем по  $[a, b]$ :

$$\int_a^b f(x)r(x)X_m(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_a^b r(x)X_m(x)X_n(x)dx.$$

В силу (3.63) будем иметь

$$\int_a^b f(x)r(x)X_m(x)dx = C_m \|X_m(x)\|^2 \Rightarrow C_m = \frac{\int_a^b f(x)r(x)X_m(x)dx}{\|X_m(x)\|^2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Таким образом, окончательно получаем

$$C_n = \frac{\int_a^b f(x)r(x)X_n(x)dx}{\|X_n(x)\|^2}.$$

Итак, мы формально получили следующее разложение:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x), \quad C_n = \frac{\int_a^b f(x)r(x)X_n(x)dx}{\|X_n(x)\|^2}. \quad (3.65)$$

Для обоснования этого разложения наложим на функцию  $f(x)$  определенные условия. Справедлива следующая теорема разложения.

**Теорема.** Пусть функция  $f(x)$  определена на  $[a, b]$  и удовлетворяет там условиям Дирихле:

- 1)  $f(x)$  кусочно-непрерывна на  $[a, b]$ ;
- 2)  $f(x)$  имеет конечное число максимумов и минимумов на  $[a, b]$ .

Тогда ряд (3.65) сходится к значению функции  $f(x)$  во всех точках  $x \in [a, b]$ , где функция непрерывна. В точке разрыва ряд (3.65) сходится, его сумма равна

$$\frac{f(c+0) + f(c-0)}{2},$$

где  $x = c$  — точка разрыва первого рода.

**Пример.** Разложить функцию  $f(x)$  по собственным функциям следующей задачи Штурма — Лиувилля:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l; \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Собственными функциями данной задачи, очевидно, будут функции

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

а собственными значениями:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Мы знаем, что

$$\int_0^l \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \frac{l}{2}, & m = n. \end{cases}$$

Таким образом, разложение будет иметь вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right); \quad C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx.$$

### 3.10. РЕГУЛЯРНАЯ ЗАДАЧА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ЧЕТВЕРТОГО РОДА

Рассмотрим регулярную задачу Штурма — Лиувилля для уравнения

$$[p(x)X'(x)]' + [\lambda r(x) - q(x)]X(x) = 0, \quad a < x < b, \quad (3.66)$$

где функции  $p(x)$ ,  $p'(x)$ ,  $q(x)$ ,  $r(x)$  — вещественные и непрерывные в  $[a, b]$ ;  $p(x)$  и  $r(x)$  — положительные в  $[a, b]$ ; каждая точка  $[a, b]$  — обыкновенная точка уравнения.

Будем предполагать, что  $p(a) = p(b)$  и будем рассматривать следующие граничные условия (условия четвертого рода или условия периодичности):

$$X(a) = X(b); \quad X'(a) = X'(b). \quad (3.67)$$

Пусть  $\varphi(x, \lambda)$ ,  $\psi(x, \lambda)$  — фундаментальная система решений Штурма — Лиувилля, удовлетворяющая условиям:

$$\varphi(a, \lambda) = 1, \quad \varphi'(a, \lambda) = 0; \quad \psi(a, \lambda) = 0, \quad \psi'(a, \lambda) = 1.$$

Общий интеграл уравнения (3.66) запишем в виде

$$X(x, \lambda) = A\varphi(x, \lambda) + B\psi(x, \lambda).$$

Из граничных условий (3.67) будем иметь:

$$\begin{aligned} A[\varphi(a, \lambda) - \varphi(b, \lambda)] + B[\psi(a, \lambda) - \psi(b, \lambda)] &= 0; \\ A[\varphi'(a, \lambda) - \varphi'(b, \lambda)] + B[\psi'(a, \lambda) - \psi'(b, \lambda)] &= 0 \end{aligned}$$

или

$$A[1 - \varphi(b, \lambda)] - B\psi(b, \lambda) = 0, \quad -A\varphi'(b, \lambda) + B[1 - \psi'(b, \lambda)] = 0. \quad (3.68)$$

Система (3.68) — однородная алгебраическая система относительно констант  $A$  и  $B$ . Эта система всегда имеет тривиальное решение  $A = B = 0$ , которое соответствует решению  $X(x) \equiv 0$  уравнения (3.66). Поэтому собственные значения задачи (3.66)–(3.67) совпадают с решениями уравнения

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \varphi(b, \lambda) & -\psi(b, \lambda) \\ -\varphi'(b, \lambda) & 1 - \psi'(b, \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель и учитывая, что, с одной стороны,

$$W\{\varphi, \psi\} = \frac{p(a)}{p(x)} \Big|_{x=b} = \frac{p(a)}{p(b)} = 1,$$

а с другой стороны,

$$W\{\varphi, \psi\} \Big|_{x=b} = \varphi(b, \lambda)\psi'(b, \lambda) - \psi(b, \lambda)\varphi'(b, \lambda),$$

будем иметь

$$\Delta(\lambda) = 2 - \varphi(b, \lambda) - \psi'(b, \lambda) = 0. \quad (3.69)$$

Уравнение (3.69) — уравнение для определения собственных значений. Можно показать, что при  $\lambda \rightarrow \infty$  это уравнение имеет бесконечное множество решений. Все собственные значения расположены на оси  $\lambda$  правее некоторого числа  $m$ . Соседние собственные значения разделены конечными интервалами, т. е. спектр задачи — дискретный.

Пусть  $\lambda = \lambda_n$  — собственное значение, тогда из системы (3.68) получим

$$A[1 - \varphi(b, \lambda_n)] - B\psi(b, \lambda_n) = 0. \quad (3.70)$$

Могут реализоваться следующие случаи.

1.  $\psi(b, \lambda_n) \neq 0$ , тогда

$$B = \frac{[1 - \varphi(b, \lambda_n)]}{\psi(b, \lambda_n)} A,$$

следовательно, собственные функции будут

$$X_n(x) = A_n \left[ \varphi(x, \lambda_n) + \frac{1 - \varphi(b, \lambda_n)}{\psi(b, \lambda_n)} \psi(x, \lambda_n) \right].$$

2.  $\psi(b, \lambda_n) = 0$ ,  $\varphi(b, \lambda_n) \neq 1$ ; тогда из (3.70) находим  $A = 0$ . Собственные функции будут иметь вид

$$X_n(x) = B_n \psi(x, \lambda_n).$$

3.  $\psi(b, \lambda_n) = 0$ ,  $\varphi(b, \lambda_n) = 1$ ; тогда собственные функции будут

$$X_n(x) = A_n \varphi(x, \lambda_n) + B_n \psi(x, \lambda_n).$$

Каждая из функций  $\varphi(x, \lambda_n)$ ,  $\psi(x, \lambda_n)$  здесь сама является собственной функцией;  $\lambda = \lambda_n$  — кратное собственное значение. В дальнейшем собственные функции будем обозначать

$$X_n(x) = A_n X_n^{(1)}(x) + B_n X_n^{(2)}(x).$$

Рассмотрим вопрос об ортогональности собственных функций регулярной задачи Штурма — Лиувилля при граничных условиях четвертого рода. Пусть  $\lambda = \lambda_n$  — собственное значение, которому соответствует собственная функция  $X_n(x)$ ,  $\lambda = \lambda_m$  собственное значение, которому соответствует собственная функция  $X_m(x)$ . Будем иметь:

$$\begin{aligned} [p(x)X_m'(x)]' + [\lambda_m r(x) - q(x)]X_m(x) &= 0; \\ [p(x)X_n'(x)]' + [\lambda_n r(x) - q(x)]X_n(x) &= 0. \end{aligned}$$

Умножим первое уравнение на  $X_n(x)$ , а второе уравнение на  $X_m(x)$  и вычтем одно из другого; затем проинтегрируем полученное равенство по  $[a, b]$ . В результате получим

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b r(x) X_m(x) X_n(x) dx = 0.$$

Следовательно,

$$\int_a^b r(x) X_m(x) X_n(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

Значит, собственные функции ортогональны с весом  $r(x)$  на  $[a, b]$ .

Сформулируем соответствующую теорему.

**Теорема.** Собственные функции регулярной задачи Штурма — Лиувилля с условиями четвертого рода, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны друг другу на  $[a, b]$  с весом  $r(x)$ .

Собственные функции, соответствующие одному и тому же (кратному) собственному значению, вообще говоря, не ортогональны, но могут быть ортогонализированы с помощью следующего процесса ортогонализации. Пусть  $\lambda = \lambda_n$  — кратное собственное значение, которому соответствуют собственные функции  $X_n^{(1)}(x)$  и  $X_n^{(2)}(x)$ . Тогда, вообще говоря,

$$\int_a^b r(x) X_n^{(1)}(x) X_n^{(2)}(x) dx \neq 0.$$

Образует две новые функции:

$$\tilde{X}_n^{(1)}(x) = X_n^{(1)}(x), \quad \tilde{X}_n^{(2)}(x) = X_n^{(2)}(x) - \gamma X_n^{(1)}(x), \quad \gamma = \text{const.}$$

Ясно, что эти функции будут тоже собственными функциями. Покажем, что  $\gamma$  всегда можно выбрать так, что функции  $\tilde{X}_n^{(1)}(x)$ ,  $\tilde{X}_n^{(2)}(x)$  будут ортогональны. Действительно, потребуем чтобы

$$\int_a^b r(x) \tilde{X}_n^{(1)}(x) \tilde{X}_n^{(2)}(x) dx = 0 \Rightarrow \int_a^b r(x) X_n^{(1)}(x) X_n^{(2)}(x) dx - \gamma \int_a^b r(x) [X_n^{(1)}(x)]^2 dx = 0.$$

Откуда

$$\gamma = \frac{\int_a^b r(x) X_n^{(1)}(x) X_n^{(2)}(x) dx}{\int_a^b r(x) [X_n^{(1)}(x)]^2 dx}.$$

Это всегда можно сделать, так как знаменатель в последней формуле отличен от нуля. Таким образом, не умаляя общности, можно всегда считать собственные функции ортогональными.

Сформулируем теперь теорему разложения произвольной функции в ряд по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля. Существо теоремы остается прежним: *всякая функция  $f(x)$ , удовлетворяющая условиям Дирихле в замкнутом интервале, разложима по собственным функциям*. Коэффициенты разложения определяются из условий ортогональности собственных функций.

**Пример.** Рассмотрим следующую задачу Штурма — Лиувилля:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < 2\pi;$$

$$X(0) = X(2\pi), \quad X'(0) = X'(2\pi).$$

Фундаментальная система решений, очевидно, будет такой

$$\varphi(x, \lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}x); \quad \psi(x, \lambda) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}.$$

Общий интеграл уравнения Штурма — Лиувилля:

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}.$$

Подставив этот интеграл в граничные условия, получим:

$$A[1 - \cos(\sqrt{\lambda}2\pi)] - B \frac{\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)}{\sqrt{\lambda}} = 0;$$

$$A\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}2\pi) + B[1 - \cos(\sqrt{\lambda}2\pi)] = 0.$$

Собственные значения находим из условия разрешимости однородной системы

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) & -\frac{\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)}{\sqrt{\lambda}} \\ \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}2\pi) & 1 - \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \Delta(\lambda) = 2(1 - \cos(\sqrt{\lambda}2\pi)) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) = 1 \Rightarrow \lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Собственные функции будут иметь вид

$$X_n(x) = A_n \cos(nx) + B_n \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Отдельно надо проверить случай  $\lambda = 0$ . Предоставим это читателю. Окончательно можно записать:

$$X_0(x) = 1; X_n^{(1)}(x) = \cos(nx); X_n^{(2)}(x) = \sin(nx), n = 1, 2, \dots$$

Таким образом,  $\lambda_0 = 0$  — простое собственное значение, все остальные собственные значения имеют кратность два.

Разложение произвольной функции  $f(x)$ , удовлетворяющей условиям Дирихле в замкнутом промежутке  $[0, 2\pi]$ , имеет вид

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)];$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx; a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx; b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

### 3.11. СИНГУЛЯРНАЯ ЗАДАЧА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Подробно эта задача будет изучена в главе 5. Здесь мы ограничимся только рассмотрением ряда примеров.

**Пример 1.** Рассмотрим задачу

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 < x < \infty; X(0) = 0, X|_{x \rightarrow \infty} = O(1).$$

Общий интеграл уравнения Штурма — Лиувилля

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Из первого граничного условия находим:  $X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$ . Таким образом,

$$X(x) = B \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Из второго граничного условия  $X|_{x \rightarrow \infty} = O(1)$  следует, что  $\sqrt{\lambda}$  — вещественное число, значит,  $\lambda > 0$ . Отдельно проверим значение  $\lambda = 0$ . В этом случае общий интеграл уравнения имеет вид  $X(x) = A + Bx$ ; из граничных условий находим  $A = 0, B = 0$ , следовательно,  $\lambda = 0$  не есть собственное число задачи.

Таким образом,  $\lambda \in (0, +\infty)$ . Данная задача имеет непрерывный спектр собственных значений. Удобно принять  $\lambda = \lambda_\nu = \nu^2, 0 < \nu < \infty$ ; тогда собственные функции будут  $X_\nu(x) = \sin(\nu x)$ .

**Пример 2.** Рассмотрим задачу

$$(r^2 R'(r))' + \lambda r^2 R(r) = 0, 0 < r < a; R|_{r \rightarrow 0} = O(1), R(a) = 0.$$

Прежде чем записать общий интеграл заданного уравнения Штурма — Лиувилля, преобразуем это уравнение следующим образом:

$$r^2 R'' + 2rR' + \lambda r^2 R = 0 \Rightarrow rR'' + 2R' + \lambda rR = 0.$$



Легко проверяется формула

$$(rR)'' = rR'' + 2R'.$$

С учетом этой формулы наше уравнение преобразовывается в следующее:

$$(rR)'' + \lambda rR = 0.$$

Общий интеграл последнего уравнения имеет вид

$$rR(r) = A \cos(\sqrt{\lambda}r) + B \sin(\sqrt{\lambda}r).$$

Таким образом, общий интеграл исходного уравнения имеет вид

$$R(r) = A \frac{\cos(\sqrt{\lambda}r)}{r} + B \frac{\sin(\sqrt{\lambda}r)}{r}.$$

Из граничных условий находим

$$R|_{r \rightarrow 0} = O(1) \Rightarrow A = 0,$$

$$R(a) = 0 \Rightarrow B \frac{\sin(\sqrt{\lambda}a)}{a} = 0 \Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}a) = 0 \quad (B \neq 0).$$

Таким образом, собственные значения будут

$$\sqrt{\lambda}a = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Соответствующие собственные функции будут

$$R_n(r) = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{a}r\right)}{r}.$$

Если  $\lambda = 0$ , то общий интеграл имеет вид  $R(r) = A/r + B$ ; из граничных условий находим  $A = 0$ ,  $B = 0$ , следовательно,  $\lambda = 0$  не есть собственное число задачи. Данная задача имеет дискретный спектр.

**Пример 3.** Рассмотрим задачу

$$(rR'(r))' + \frac{\lambda}{r}R(r) = 0, \quad 0 < r < a; \quad R|_{r \rightarrow 0} = O(1), \quad R(a) = 0.$$

Преобразуем уравнение задачи следующим образом:

$$rR'' + R' + \frac{\lambda}{r}R = 0 \Rightarrow r^2R'' + rR' + \lambda R = 0.$$

Последнее уравнение есть уравнение Эйлера; решение его ищем в виде  $R = r^s$ . После подстановки в уравнение получим характеристическое уравнение для определения  $s$

$$s(s-1) + s + \lambda = 0 \Rightarrow s = \pm i\sqrt{\lambda}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad \lambda > 0.$$

Таким образом, решение имеет вид

$$R(r) = r^{\pm i\sqrt{\lambda}} = e^{\pm i\sqrt{\lambda} \ln(r)}.$$

Удобно взять фундаментальные решения в виде  $\cos(\sqrt{\lambda} \ln(r))$  и  $\sin(\sqrt{\lambda} \ln(r))$ . Тогда общий интеграл уравнения можно записать так

$$R(r) = A \cos\left(\sqrt{\lambda} \ln\left(\frac{r}{a}\right)\right) + B \sin\left(\sqrt{\lambda} \ln\left(\frac{r}{a}\right)\right).$$

Из граничного условия  $R(a) = 0$  находим  $A = 0$ ; из условия  $R(0) = O(1)$  вытекает, что  $\sqrt{\lambda}$  — вещественное число, следовательно,  $\lambda > 0$ . Полагая  $\lambda = \lambda_\nu = \nu^2$ ,  $0 < \nu < \infty$ , получим собственные функции в виде

$$R_\nu(r) = \sin\left(\nu \ln\left(\frac{r}{a}\right)\right).$$

Если  $\lambda = 0$ , то общий интеграл имеет вид  $R(r) = A \ln(r) + B$ ; из граничных условий находим  $A = 0$ ,  $B = 0$ , следовательно,  $\lambda = 0$  не есть собственное число задачи. Данная задача имеет непрерывный спектр  $\lambda \in (0, +\infty)$ .

**Пример 4.** Рассмотрим еще одну задачу

$$X''(x) + (\lambda - x^2)X(x) = 0, \quad -\infty < x < +\infty; \quad X|_{x \rightarrow \pm\infty} = O(1).$$

Можно показать, что собственными значениями этой задачи будут  $\lambda = \lambda_n = 2n + 1$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , а собственными функциями будут функции

$$X_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x),$$

где

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

— полиномы Эрмита. Спектр задачи — дискретный.

Подведем некоторые итоги рассмотренным примерам. Характер спектра сингулярной задачи зависит от граничных условий на концах интервала. Если спектр задачи оказывается дискретным, то можно перенести теорию регулярной задачи на случай сингулярной задачи. Если же спектр оказывается непрерывным или смешанным, то теория регулярной задачи неверна для сингулярной задачи.

### 3.12. ОБЩЕЕ ИЗЛОЖЕНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Сформулируем задачу. Пусть требуется найти функцию  $u = u(x, y)$ , которая удовлетворяет следующим условиям: линейному дифференциальному уравнению

$$L_x(u) + M_y(u) = 0, \quad a < x < b, \quad c < y < d, \quad (3.71)$$

где

$$L_x(u) = \frac{1}{r(x)} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x)u \right], \quad M_y(u) = A \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + B \frac{\partial u}{\partial y} + Cu.$$

Функции  $p, q, r$  — вещественные функции от  $x$ ;  $A, B, C$  — вещественные функции от  $y$ . Предполагается, что  $p, p', q, r$  — непрерывны на  $[a, b]$ ;  $p > 0$ ,

$r > 0$ ;  $A, B, C$  — непрерывны на  $(c, d)$  (интервал  $(c, d)$  может быть и бесконечным).

По переменной  $x$  выполняется одно из условий первого, второго или третьего рода, т. е.

$$u|_{x=a} = 0, \quad u|_{x=b} = 0, \quad (3.72-I)$$

либо

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=a} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=b} = 0, \quad (3.72-II)$$

либо

$$\frac{\partial u}{\partial x} - h_a u\bigg|_{x=a} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + h_b u\bigg|_{x=b} = 0, \quad h_a > 0, \quad h_b > 0. \quad (3.72-III)$$

По переменной  $y$  выполняются определенные условия, которые зависят от типа уравнения (3.71). Квадратичная форма, связанная с уравнением (3.71), имеет вид

$$G = \frac{p}{r} X^2 + AY^2.$$

Тип уравнения определяется знаком  $A$ . Если  $A > 0$ , то уравнение (3.71) эллиптического типа и условия на концах интервала  $(c, d)$  имеют характер условий первого, второго или третьего рода, например

$$u|_{y=c} = f_c(x), \quad u|_{y=d} = f_d(x).$$

Если  $A < 0$ , то уравнение (3.71) гиперболического типа. Этот тип встречается в случае, когда переменная  $y$  — время,  $y \in (c, +\infty)$ . Условия имеют вид

$$u|_{y=c} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=c} = \psi(x).$$

Если  $A = 0$ , то уравнение (3.71) параболического типа; переменная  $y$  — время,  $y \in (c, +\infty)$ . Условия имеют вид

$$u|_{y=c} = \varphi(x).$$

Таким образом, уравнение (3.71) должно быть однородным и допускать разделение переменных; условия по переменной  $x$  — однородные, по переменной  $y$  — не обязательно.

Будем искать решение задачи в виде

$$u = X(x)Y(y). \quad (3.73)$$

После подстановки (3.73) в (3.71) получим

$$YL_x(X) + XM_y(Y) = 0 \Rightarrow \frac{L_x(X)}{X} = -\frac{M_y(Y)}{Y} = -\lambda.$$

Таким образом, уравнение (3.71) распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$L_x(X) + \lambda X = 0; \quad (3.74)$$

$$M_y(Y) - \lambda Y = 0. \quad (3.75)$$

Уравнение (3.74) в явном виде записывается так

$$(pX') + (\lambda r - q)X = 0. \quad (3.76)$$

Это — уравнение Штурма — Лиувилля. В соответствии с граничными условиями (3.72) для функции  $X(x)$  должно выполняться одно из трех условий:

$$X|_{x=a} = 0, \quad X|_{x=b} = 0, \quad (3.77-I)$$

либо

$$\left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=a} = 0, \quad \left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=b} = 0, \quad (3.77-II)$$

либо

$$\left. \frac{dX}{dx} - h_a X \right|_{x=a} = 0, \quad \left. \frac{dX}{dx} + h_b X \right|_{x=b} = 0, \quad h_a > 0, \quad h_b > 0. \quad (3.77-III)$$

Таким образом, мы имеем дело с регулярной задачей Штурма — Лиувилля. Согласно рассмотренной ранее теории задача имеет дискретный спектр собственных значений  $\lambda = \lambda_n$ , причем  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Каждому собственному значению соответствует собственная функция  $X = X_n(x)$ . Эти собственные функции ортогональны на  $[a, b]$  с весом  $r(x)$ , т. е.

$$\int_a^b r(x) X_m(x) X_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \|X_n\|^2, & m = n. \end{cases} \quad (3.78)$$

Подставляя собственные значения  $\lambda = \lambda_n$  в уравнение (3.75), получим

$$M_y(Y) - \lambda_n Y = 0. \quad (3.79)$$

Для определенности будем считать, что мы имеем дело с гиперболическим случаем ( $A < 0$ ). Тогда общий интеграл уравнения (3.79) имеет вид

$$Y_n(y) = C_n Y_n^{(1)}(y) + D_n Y_n^{(2)}(y),$$

где  $Y_n^{(1)}(y), Y_n^{(2)}(y)$  — линейно независимые решения уравнения (3.79), т. е. их определитель Вронского отличен от нуля:

$$W\{Y_n^{(1)}, Y_n^{(2)}\} \neq 0.$$

Таким образом, мы получили бесконечную совокупность частных решений уравнения (3.79):

$$u = u_n = [M_n Y_n^{(1)}(y) + N_n Y_n^{(2)}(y)] X_n(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Каждое из этих решений удовлетворяет уравнению (3.79) и однородным граничным условиям по переменной  $x$ . Для того чтобы удовлетворить неоднородным условиям по переменной  $y$ , мы применяем принцип суперпозиции и составляем решение в виде ряда

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} [M_n Y_n^{(1)}(y) + N_n Y_n^{(2)}(y)] X_n(x). \quad (3.80)$$

Мы постулируем здесь сходимость ряда (3.80), допускающую предельный переход и дифференцирование под знаком суммы. Таким образом, можно написать:

$$u|_{y=c} = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [M_n Y_n^{(1)}(c) + N_n Y_n^{(2)}(c)] X_n(x), \quad a < x < b, \quad (3.81)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=c} = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [M_n Y_n^{(1)'}(c) + N_n Y_n^{(2)'}(c)] X_n(x), \quad a < x < b. \quad (3.82)$$

Равенства (3.81) и (3.82) означают разложения функций  $\varphi$  и  $\psi$  по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля (3.76), (3.77). Если имеет место такое разложение, то можно написать:

$$M_n Y_n^{(1)}(c) + N_n Y_n^{(2)}(c) = \frac{\int_a^b r(x) \varphi(x) X_n(x) dx}{\|X_n\|^2} = \varphi_n; \quad (3.83)$$

$$M_n Y_n^{(1)'}(c) + N_n Y_n^{(2)'}(c) = \frac{\int_a^b r(x) \psi(x) X_n(x) dx}{\|X_n\|^2} = \psi_n. \quad (3.84)$$

Таким образом, мы имеем систему уравнений (3.83) и (3.84) для определения неизвестных констант  $M_n, N_n$ . Определитель этой системы есть определитель Вронского, который отличен от нуля в силу линейной независимости функций  $Y_n^{(1)}(y), Y_n^{(2)}(y)$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} Y_n^{(1)}(c) & Y_n^{(2)}(c) \\ Y_n^{(1)'}(c) & Y_n^{(2)'}(c) \end{vmatrix} = W\{Y_n^{(1)}, Y_n^{(2)}\} \neq 0.$$

Следовательно, система разрешима относительно  $M_n, N_n$  и формула (3.80) дает формальное решение задачи.

В заключение укажем кратко схему решения задачи методом Фурье.

1. Произвести разделение переменных и свести задачу к интегрированию двух обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Сформулировать задачу Штурма — Лиувилля и найти совокупность собственных значений и собственных функций рассматриваемой задачи.
3. Проинтегрировать второе уравнение и построить совокупность частных решений задачи, удовлетворяющих однородным граничным условиям.
4. Составить формальный ряд из частных решений и, пользуясь теоремой разложения по собственным функциям, найти коэффициенты разложения.
5. Дать строгое обоснование полученному формальному решению для определенного класса функций.

Данная схема остается в силе для случая условий четвертого рода регулярной задачи Штурма — Лиувилля. Схема также переносится и на сингулярный случай, если спектр задачи оказывается дискретным. Если спектр задачи будет непрерывным или смешанным, то возникают некоторые изменения в схеме.

### 3.13. ЗАДАЧА ОБ ОХЛАЖДЕНИИ ПЛАСТИНЫ, ИЗЛУЧАЮЩЕЙ ТЕПЛО

Завершим изложение метода Фурье рассмотрением еще одного примера. Рассмотрим тонкую однородную пластинку толщины  $a$  и бесконечных размеров в двух других измерениях. Будем предполагать, что задано начальное распределение температуры  $\varphi(x)$ ; левая стенка ( $x = 0$ ) теплоизолирована, а правая ( $x = a$ ) излучает тепло в окружающую среду, температура которой равна нулю. Требуется определить температуру пластинки в любой момент времени  $t > 0$ .

Математическая формулировка задачи:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0, \quad 0 < x < a, \quad \tau > 0, \quad \tau = \frac{kt}{c\rho}; \quad (3.85)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} + hT \right|_{x=a} = 0; \quad (3.86)$$

$$T|_{\tau=0} = \varphi(x). \quad (3.87)$$

Будем искать решение в виде

$$T(x, \tau) = X(x)Y(\tau).$$

После подстановки в (3.85) получим

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y'(\tau)}{Y(\tau)} = -\lambda.$$

Откуда находим

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(a) + hX(a) = 0; \quad (3.88)$$

$$Y'(\tau) + \lambda Y(\tau) = 0. \quad (3.89)$$

Общее решение уравнения (3.88) имеет вид

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad \lambda \neq 0.$$

Из граничных условий находим  $B = 0$ :

$$\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}a) = \frac{\sqrt{\lambda}a}{ha}, \quad A \neq 0.$$

Обозначим  $\gamma = \sqrt{\lambda}a$ , тогда последнее соотношение принимает вид

$$\operatorname{ctg}(\gamma) = \frac{\gamma}{ha}. \quad (3.90)$$

На основании общей теории можно утверждать, что все собственные значения вещественны и положительны.

Пусть  $\gamma = \gamma_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  — положительные корни уравнения (3.90). Тогда собственные значения будут

$$\lambda = \lambda_n = \frac{\gamma_n^2}{a^2}.$$

Соответствующие собственные функции будут

$$X(x) = X_n(x) = \cos\left(\gamma_n \frac{x}{a}\right).$$

Если  $\lambda = 0$ , то общее решение уравнения (3.88) имеет вид  $X(x) = A + Bx$ . Из граничных условий находим  $B = 0$ ;  $A = 0$ . Следовательно,  $\lambda = 0$  не есть собственное значение задачи (3.88).

Рассмотрим теперь уравнение (3.89), оно принимает вид

$$Y'(\tau) + \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2 Y(\tau) = 0 \Rightarrow Y = Y_n(\tau) = M_n e^{-\frac{\gamma_n^2}{a^2} \tau}.$$

Совокупность частных решений исходного уравнения (3.85) имеет вид

$$T = T_n = M_n e^{-\frac{\gamma_n^2}{a^2} \tau} \cos\left(\gamma_n \frac{x}{a}\right).$$

Каждое такое решение удовлетворяет однородным граничным условиям (3.86) и однородному уравнению (3.85) и не удовлетворяет начальному условию (3.87). Чтобы удовлетворить этому начальному условию, мы в соответствии с принципом суперпозиции составляем сумму

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} M_n e^{-\frac{\gamma_n^2}{a^2} \tau} \cos\left(\gamma_n \frac{x}{a}\right).$$

Откуда, постулируя «хорошую» сходимости написанного ряда, находим

$$T|_{\tau=0} = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos\left(\gamma_n \frac{x}{a}\right).$$

Последнее соотношение — разложение функции  $\varphi(x)$  по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля (3.88). Следовательно,

$$M_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^a \varphi(x) \cos\left(\gamma_n \frac{x}{a}\right) dx,$$

причем

$$\|X_n\|^2 = \int_0^a \cos^2\left(\gamma_n \frac{x}{a}\right) dx = \frac{a}{2} \left[1 + \frac{\sin(2\gamma_n)}{2\gamma_n}\right].$$

Окончательно формальное решение задачи будет иметь вид

$$T = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^a \varphi(x) \cos\left(\gamma_n \frac{x}{a}\right) dx}{\left[1 + \frac{\sin(2\gamma_n)}{2\gamma_n}\right]} e^{-\frac{\gamma_n^2}{a^2} \tau} \cos\left(\gamma_n \frac{x}{a}\right).$$

Например, в частном случае, когда  $\varphi(x) = T_0 = \text{const}$ , будем иметь

$$\int_0^a \varphi(x) \cos\left(\gamma_n \frac{x}{a}\right) dx = T_0 \int_0^a \cos\left(\gamma_n \frac{x}{a}\right) dx = T_0 a \frac{\sin(\gamma_n)}{\gamma_n},$$

и тогда

$$T = 4T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\gamma_n)}{[2\gamma_n + \sin(2\gamma_n)]} e^{-\frac{\gamma_n^2}{a^2} \tau} \cos\left(\gamma_n \frac{x}{a}\right).$$

## ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 3

1. Какое уравнение называется однородным линейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка? Приведите примеры таких уравнений.
2. Перечислите свойства решений линейного уравнения в частных производных (принцип суперпозиции).
3. Какое уравнение в частных производных называется уравнением с разделяющимися переменными? Приведите примеры.
4. Выполните процесс разделения переменных в случае уравнения с двумя независимыми переменными. Что такое параметр разделения?
5. Выполните процесс разделения переменных в случае уравнения с тремя независимыми переменными. Сколько параметров разделения мы будем иметь в этом случае?
6. Выполните процесс разделения переменных в случае уравнения Лапласа в декартовых координатах.
7. Выполните процесс разделения переменных в случае уравнения Лапласа в цилиндрических координатах.
8. Выполните процесс разделения переменных в случае уравнения Лапласа в сферических координатах.
9. Выполните процесс разделения переменных в случае одномерного волнового уравнения с двумя независимыми переменными.
10. Выполните процесс разделения переменных в случае одномерного уравнения теплопроводности с двумя независимыми переменными.
11. Дайте решение задачи об охлаждении пластины методом разделения переменных.
12. Сформулируйте задачу Дирихле для круга. Получите решение этой задачи методом разделения переменных.
13. Напишите интеграл Пуассона. В чем преимущества такого представления решения задачи Дирихле для круга?
14. Как можно использовать интеграл Пуассона для решения задачи Дирихле для произвольной плоской области?
15. Сформулируйте задачу Штурма — Лиувилля.
16. Что называется собственной функцией задачи? Что такое собственное значение задачи?
17. Какая задача Штурма — Лиувилля называется регулярной, сингулярной?
18. Что называется спектром задачи Штурма — Лиувилля? Какие спектры возможны?
19. Сколько собственных функций могут отвечать данному собственному значению?
20. Приведите примеры граничных условий для регулярной задачи Штурма — Лиувилля.
21. Какие граничные условия ставятся в случае сингулярной задачи Штурма — Лиувилля?
22. Перечислите свойства собственных значений регулярной задачи Штурма — Лиувилля.
23. Докажите теорему об ограниченности снизу множества собственных значений регулярной задачи Штурма — Лиувилля.
24. Докажите теорему о вещественности собственных значений регулярной задачи Штурма — Лиувилля.
25. Что называется фундаментальной системой решений Штурма — Лиувилля? Приведите пример.
26. Какими свойствами обладают фундаментальные решения задачи Штурма — Лиувилля?
27. Докажите свойство линейной независимости фундаментальных решений Штурма — Лиувилля.
28. Получите асимптотические формулы фундаментальных решений Штурма — Лиувилля при  $\lambda \rightarrow \infty$ .
29. В чем заключается основная идея метода Стеклова — Лиувилля — Фубини?
30. Изложите в общем виде вопрос об определении собственных значений и собственных функций регулярной задачи Штурма — Лиувилля.
31. Сколько собственных функций могут отвечать данному собственному значению в случае регулярной задачи Штурма — Лиувилля с граничными условиями первого, второго или третьего рода?
32. Какие функции называются ортогональными? Приведите примеры ортогональных систем функций.



33. Что называется нормой для данной системы функций?
34. Сформулируйте и докажите теорему об ортогональности собственных функций регулярной задачи Штурма — Лиувилля.
35. Сформулируйте условия Дирихле.
36. Сформулируйте теорему о разложении функции в ряд по собственным функциям регулярной задачи Штурма — Лиувилля. Приведите пример.
37. Сформулируйте регулярную задачу Штурма — Лиувилля с граничными условиями четвертого рода. Приведите пример.
38. Изложите в общем виде вопрос об определении собственных значений и собственных функций регулярной задачи Штурма — Лиувилля с граничными условиями четвертого рода. В чем особенность этой задачи?
39. Сформулируйте и докажите теорему об ортогональности собственных функций регулярной задачи Штурма — Лиувилля с граничными условиями четвертого рода.
40. В чем особенность собственных функций, отвечающих граничным условиям четвертого рода? Сколько собственных функций могут отвечать данному собственному значению?
41. В чем состоит процесс ортогонализации?
42. Приведите пример задачи Штурма — Лиувилля с граничными условиями четвертого рода.
43. Приведите примеры сингулярных задач Штурма — Лиувилля с дискретным спектром.
44. Приведите примеры сингулярных задач Штурма — Лиувилля с непрерывным спектром.
45. Дайте общее изложение метода Фурье для случая двух независимых переменных.
46. Дайте решение задачи об охлаждении пластины, излучающей тепло, методом Фурье.
47. Приведите краткую схему применения метода Фурье.

### ЗАДАЧИ С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ

#### 1. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи

- 1)  $y'' + \lambda y = 0, y(0) = 0, y(l) = 0, x \in [0, l]$ ;
- 2)  $y'' + \lambda y = 0, y(0) = 0, y'(l) + hy(l) = 0, x \in [0, l], h > 0$ ;
- 3)  $y'' + \lambda y = 0, y(l) = 0, -y'(0) + hy(0) = 0, x \in [0, l], h > 0$ ;
- 4)  $y'' + \lambda y = 0, y(0) = 0, y'(l) = 0, x \in [0, l]$ ;
- 5)  $y'' + \lambda y = 0, y'(0) = 0, y(l) = 0, x \in [0, l]$ ;
- 6)  $y'' + \lambda y = 0, y'(0) = 0, y'(l) = 0, x \in [0, l]$ ;
- 7)  $y'' + \lambda y = 0, y'(0) = 0, y'(l) + hy(l) = 0, x \in [0, l], h > 0$ ;
- 8)  $y'' + \lambda y = 0, y'(l) = 0, -y'(0) + hy(0) = 0, x \in [0, l], h > 0$ ;
- 9)  $y'' + \lambda y = 0, -y'(0) + hy(0) = 0, y'(l) + hy(l) = 0, x \in [0, l], h > 0$ ;
- 10)  $\frac{d}{dx}\left(x \frac{dy}{dx}\right) + \frac{\lambda}{x}y = 0, y(a) = 0, y(b) = 0, x \in [a, b], a \neq 0, b \neq 0$ ;
- 11)  $\frac{d}{dx}\left(x^2 \frac{dy}{dx}\right) + \lambda x^2 y = 0, y(a) = 0, y(b) = 0, x \in [a, b], a \neq 0, b \neq 0$ ;
- 12)  $y'' + \lambda y = 0, y(-l) = 0, y(l) = 0, x \in [-l, l]$ ;
- 13)  $y'' + \lambda y = 0, y'(-l) = 0, y'(l) = 0, x \in [-l, l]$ ;
- 14)  $y'' + \lambda y = 0, -y'(-l) + hy(-l) = 0, y'(l) + hy(l) = 0, x \in [-l, l], h > 0$ ;
- 15)  $\frac{d}{dx}\left(x \frac{dy}{dx}\right) + \frac{\lambda}{x}y = 0, y'(a) = 0, y'(b) = 0, x \in [a, b], a \neq 0, b \neq 0$ .

#### 2. Разложить функцию $f(x) = x^2$ в ряд по собственным функциям задачи

$$y'' + \lambda y = 0, y(-l) = 0, y(l) = 0, y'(-l) = 0, y'(l) = 0, x \in [-l, l].$$

### 3. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -l \leq x \leq 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

в ряд по собственным функциям задачи

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(-l) = 0, \quad y(l) = 0, \quad y'(-l) = 0, \quad y'(l) = 0, \quad x \in [-l, l].$$

### 4. Разложить функцию $f(x) = x^2$ в ряд по собственным функциям задачи

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad x \in [0, l].$$

### 5. Разложить функцию $f(x) = 1$ в ряд по собственным функциям задачи 1.10.

### 6. Разложить функцию $f(x) = x^2$ в ряд по собственным функциям задачи

$$\frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{dy}{dx} \right) + \lambda x^2 y = 0, \quad y(0) = O(1), \quad y'(a) = 0, \quad x \in [0, a].$$

### 7. Разложить функцию $f(x) = c^2 - x^2$ в ряд по собственным функциям задачи

$$\frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{dy}{dx} \right) + \lambda x^2 y = 0, \quad y(0) = O(1), \quad y'(a) + hy(a) = 0, \quad x \in [0, a], \quad h > 0.$$

### 8. Разложить функцию $f(x) = 1 + cx$ в ряд по собственным функциям задачи

$$y'' + \lambda y = 0, \quad -y'(0) + hy(0) = 0, \quad y(a) = 0, \quad x \in [0, a], \quad h > 0.$$

### 9. Разложить функцию $f(x) = x$ в ряд по собственным функциям задачи 1.10.

### 10. Решить сингулярные задачи Штурма — Лиувилля для уравнения

$$\frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{dy}{dx} \right) + \lambda x^2 y = 0, \quad x \in (0, a)$$

при условиях

1)  $y|_{x=a} = 0, \quad y|_{x=0} = O(1);$

2)  $y'|_{x=a} = 0, \quad y|_{x=0} = O(1);$

3)  $y' + hy|_{x=a} = 0, \quad y|_{x=0} = O(1), \quad h > 0.$

11. Струна  $0 \leq x \leq l$  с жестко закрепленными концами до момента  $t = 0$  находилась в состоянии равновесия под действием поперечной силы  $F_0 = \text{const}$ , приложенной к точке  $x_0$  струны перпендикулярно к невозмущенному положению струны. В начальный момент времени  $t = 0$  действие силы  $F_0$  мгновенно прекращается. Найти колебания струны при  $t > 0$ .

12. Концы струны закреплены жестко, а начальное отклонение имеет форму квадратичной параболы, симметричной относительно перпендикуляра к середине струны. Найти колебания струны, если начальные скорости равны нулю, а начальное максимальное смещение равно  $h$ .

13. Струна с жестко закрепленными концами возбуждается ударом жесткого плоского молоточка, сообщаящего ей следующее начальное распределение скоростей:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_0 - \delta; \\ v_0, & x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta; \\ 0, & x_0 + \delta \leq x \leq l. \end{cases}$$

Найти колебания струны, если начальное отклонение равно нулю.

14. Струна с жестко закрепленными концами возбуждается ударом жесткого выпуклого молоточка, сообщаящего ей следующее начальное распределение скоростей:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_0 - \delta; \\ v_0 \cos\left(\frac{\pi(x-x_0)}{2\delta}\right), & x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta; \\ 0, & x_0 + \delta \leq x \leq l. \end{cases}$$

Найти колебания струны, если начальное отклонение равно нулю.

15. Струна с жестко закрепленными концами возбуждается ударом острого молоточка, передающего ей импульс  $I$  в точке  $x_0$ . Найти колебания струны, если начальное отклонение равно нулю.

16. Найти продольные колебания стержня, один конец которого ( $x = 0$ ) закреплен жестко, а другой ( $x = l$ ) свободен, при начальных условиях:

$$u(x, 0) = kx, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

17. Стержень длины  $l$ , закрепленный в точке ( $x = 0$ ), растянут силой  $F_0 = \text{const}$ , приложенной на его другом конце. В момент  $t = 0$  действие силы  $F_0$  мгновенно прекращается. Найти колебания стержня, если начальные скорости равны нулю.

18. Найти колебания упругого стержня со свободными концами, если начальные скорости и начальные смещения в продольном направлении произвольны.

19. Найти колебания упругого стержня со свободными концами, получившего в начальный момент времени продольный импульс  $I$  в один из концов.

20. Найти колебания упругого стержня, один конец которого жестко закреплен, а другой конец свободен и получает в начальный момент времени продольный импульс  $I$ .

21. Найти распределение температуры в стержне  $0 \leq x \leq l$  с теплоизолированной боковой поверхностью, если температура его концов поддерживается равной нулю, а начальная температура равна  $T_0 = \text{const}$ .

22. Дать решение первой краевой задачи для уравнения Лапласа вне круга.

23. Дать решение второй краевой задачи для уравнения Лапласа вне круга.

24. Дать решение второй краевой задачи для уравнения Лапласа внутри круга.

25. Дать решение третьей внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в круге, если граничное условие записывается в виде

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} - hu \right|_{r=a} = -f.$$

26. Дать решение третьей внешней краевой задачи для уравнения Лапласа для круга.

27. Дать решение внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа, если на границе круга задано условие

$$u|_{r=a} = A \sin \varphi.$$

28. Дать решение внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа, если на границе круга задано условие

$$u|_{r=a} = A \sin^3 \varphi + B.$$

29. Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса  $R$  с центром в начале координат и такую, что

1)  $\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = A \cos(\varphi);$

2)  $\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = A \cos(2\varphi);$

3)  $\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = \sin^3(\varphi).$

30. Найти стационарное распределение температуры  $u(r, \varphi)$  внутри бесконечного цилиндра радиуса  $R$ , если на его поверхности поддерживается температура  $u|_{r=R} = A \sin \varphi$ .

31. Найти функцию, гармоническую внутри единичного круга с центром в начале координат и такую, что

1)  $u|_{r=1} = \cos^2(\varphi);$

2)  $u|_{r=1} = \cos^4(\varphi);$

3)  $u|_{r=1} = \sin^3(\varphi);$

4)  $u|_{r=1} = \cos^6(\varphi) + \sin^6(\varphi).$

32. Решить задачу о колебаниях струны  $0 < x < l$  с закрепленными концами, если начальные скорости точек струны равны нулю, а начальное отклонение имеет форму синусоиды

$$u|_{t=0} = A \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \quad (n — \text{целое}).$$

33. Найти закон выравнивания заданного начального распределения температуры  $f(x)$  в пластине, грани которой  $x = 0$  и  $x = a$  не пропускают тепла.

34. Дать общее решение задачи об охлаждении шара радиуса  $a$  при условии, что начальное распределение температуры задано  $u(r, t)|_{t=0} = f(r)$ , а температура поверхности равна нулю. Рассмотреть случай  $f(r) = T_0 = \text{const}$ .

35. Найти распределение температуры в шаре радиуса  $a$ , поверхность которого, начиная с момента времени  $t = 0$ , излучает тепло по закону Ньютона, а начальная температура равна  $T_0 = \text{const}$ .

36. Пластина толщины  $2a$  ( $-a \leq x \leq a$ ) с заданным начальным распределением температуры  $u(x, 0) = f(x)$ , начиная с момента времени  $t = 0$ , излучает тепло в окружающую среду, температура которой принимается равной нулю. Считается, что излучение подчиняется закону Ньютона. Найти распределение температуры в пластине в произвольный момент времени.

37. Найти закон колебаний струны длиной  $l$ , расположенной на отрезке  $[0, l]$  и закрепленной на концах, если в начальный момент струне придана форма кривой  $f(x) = x(l - x)/(8l)$ , а затем струна отпущена без начальной скорости.

38. Однородная струна длиной  $l$  натянута между точками  $x = 0$  и  $x = l$ . В точке  $x = c$  струна оттягивается на небольшое расстояние  $h$  от положения равновесия и в момент времени  $t = 0$  отпускается без начальной скорости. Определить отклонение  $u(x, t)$  струны для любого момента времени.

39. Решить задачу:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$u(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad u(x, 0) = T_0.$$

40. Решить задачу:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad u(x, 0) = x(l-x); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

41. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в квадрате

$$D = \{0 \leq x \leq l; 0 \leq y \leq l\}$$

при краевых условиях:  $u(x, 0) = u(x, l) = x(l-x)$ ,  $u(0, y) = u(l, y) = 0$ .

#### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

**Пример 1.** Разложить функцию  $f(x) = x^2$  в обобщенный ряд Фурье по собственным функциям сингулярной задачи Штурма — Лиувилля

$$\frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{dy}{dx} \right) + \lambda x^2 y = 0, \quad y(0) = O(1), \quad y'(a) = 0, \quad x \in [0, a].$$

*Решение.* Воспользуемся системой аналитических вычислений Maple. Зададим уравнение. При этом, рассмотрим два случая  $\lambda \neq 0$  и  $\lambda = 0$ :

```
>eq:=diff(x^2*diff(y(x),x),x)+lambda*x^2*y(x)=0;
lambda:=0;eq0:=subs(y(x)=y0(x),eq);
lambda:= 'lambda' ;
```

$$eq := 2x \left( \frac{d}{dx} y(x) \right) + x^2 \left( \frac{d^2}{dx^2} y(x) \right) + \lambda x^2 y(x) = 0$$

$$\lambda := 0$$

$$eq0 := 2x \left( \frac{d}{dx} y0(x) \right) + x^2 \left( \frac{d^2}{dx^2} y0(x) \right) = 0$$

$$\lambda := \lambda$$

Рассматриваем случай, когда  $\lambda \neq 0$ . Находим общее решение заданного уравнения:

```
>dsol:=dsolve(eq,y(x)) assuming lambda>0;assign(dsol);
```

$$dsol := y(x) = -\frac{C1 \sin(\sqrt{\lambda} x)}{x} + \frac{C2 \cos(\sqrt{\lambda} x)}{x}$$

Проверяем правильность этого решения:

```
>simplify(value(eq));
```

$$0 = 0$$

Видим, что решение будет ограниченным в нуле, если положить константу при косинусе равной нулю. Таким образом, запишем решение так

$$y := x \rightarrow C \sin(\sqrt{\lambda} x) / x;$$

$$y := x \rightarrow \frac{C \sin(\sqrt{\lambda} x)}{x}$$

Находим производную:

$$y1 := \text{simplify}(\text{diff}(y, x));$$

$$y1 := \frac{C(\cos(\sqrt{\lambda} x) \sqrt{\lambda} x - \sin(\sqrt{\lambda} x))}{x^2}$$

Получим уравнение для определения собственных значений задачи:

$$eq1 := \text{expand}(\text{subs}(x=a, y1) / C * a^2) = 0;$$

$$eq1 := \text{expand}(\text{lhs}(eq1) / \cos(\lambda^{1/2} * a)) = 0;$$

$$eq1 := \cos(\sqrt{\lambda} a) \sqrt{\lambda} a - \sin(\sqrt{\lambda} a) = 0$$

$$eq1 := \sqrt{\lambda} a - \frac{\sin(\sqrt{\lambda} a)}{\cos(\sqrt{\lambda} a)} = 0$$

Преобразовываем полученное уравнение и определяем функцию, нулями которой задаются собственные значения:

$$eq1 := \text{convert}(eq1, \tan);$$

$$f := \text{subs}(\lambda^{1/2} * a = \mu, \text{lhs}(eq1)) = 0;$$

$$eq1 := \sqrt{\lambda} a - \tan(\sqrt{\lambda} a) = 0$$

$$f := \mu - \tan(\mu) = 0$$

Здесь мы ввели обозначение  $f = \mu - \text{tg}(\mu)$ , причем  $\mu = \sqrt{\lambda} a$ .

Пусть  $\mu_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  — положительные корни уравнения  $f = 0$ . Тогда собственные значения задачи определяются по формуле  $\lambda_k = (\mu_k / a)^2$ . Собственные функции будут  $\sin(\mu_k x / a) / x$ . Определяем эти функции:

$$y := (x, n) \rightarrow \sin((\mu[n] / a) * x) / x;$$

$$y := (x, n) \rightarrow \frac{\sin\left(\frac{\mu_n x}{a}\right)}{x}$$

Согласно общей теории эти функции ортогональны на  $[0, a]$  с весом  $x^2$ . Проверим это:

$$\text{>Int}(x^2 * y(x, n) * y(x, m), x=0..a); \text{res} := \text{value}(\%);$$

$$\text{simplify}(\text{res}, \{\sin(\mu[m]) = \mu[m] * \cos(\mu[m]),$$

$$\sin(\mu[n]) = \mu[n] * \cos(\mu[n])\});$$

$$\int_0^a \sin\left(\frac{\mu_n x}{a}\right) \sin\left(\frac{\mu_m x}{a}\right) dx$$

$$\text{res} := - \frac{a(\mu_m \sin(\mu_n) \cos(\mu_m) - \mu_n \cos(\mu_n) \sin(\mu_m))}{\mu_m^2 - \mu_n^2}$$

$$0$$

Вычисляем квадрат нормы:

>Int(x^2\*y(x,n)^2,x=0..a);Norma2:=simplify(value(%));

$$\int_0^a \sin\left(\frac{\mu_n x}{a}\right)^2 dx$$

$$Norma2 := -\frac{1}{2} \frac{a(\cos(\mu_n) \sin(\mu_n) - \mu_n)}{\mu_n}$$

Упростим полученный результат:

>Norma2:=subs(sin(mu[n])=mu[n]\*cos(mu[n]),Norma2);  
Norma2:=simplify(Norma2,{cos(mu[n])^2=-sin(mu[n])^2+1});

$$Norma2 := -\frac{1}{2} \frac{a(\cos(\mu_n)^2 \mu_n - \mu_n)}{\mu_n}$$

$$Norma2 := -\frac{1}{2} a \sin(\mu_n)^2$$

таким образом, искомое разложение имеет вид

$$x^2 \sim C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\sin\left(\frac{\mu_n x}{a}\right)}{x}. \quad (3.91)$$

Необходимость нулевого члена  $C_0$  мы установим далее.

Вычислим коэффициенты разложения  $C_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

>c:=Int(x^2\*x^2\*y(x,n),x=0..a);

$$c := \int_0^a x^3 \sin\left(\frac{\mu_n x}{a}\right) dx$$

>c:=value(c);

c:=subs(sin(mu[n])=mu[n]\*cos(mu[n]),c);

$$c := \frac{a^4(-\cos(\mu_n)\mu_n^3 + 3\sin(\mu_n)\mu_n^2 + 6\mu_n \cos(\mu_n) - 6\sin(\mu_n))}{\mu_n^4}$$

$$c := \frac{2a^4 \cos(\mu_n)}{\mu_n}$$

>C:=simplify(subs(sin(mu[n])=mu[n]\*cos(mu[n]),c/Norma2));

$$C := \frac{4a^3}{\mu_n^3 \cos(\mu_n)}$$

>C:=unapply(C,n);

$$C := n \rightarrow \frac{4a^3}{\mu_n^3 \cos(\mu_n)}$$

Итак, мы получили  $C_n = 4a^3/[\mu_n^3 \cos(\mu_n)]$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Отдельно проверим, будет ли  $\lambda = 0$  собственным значением задачи:

```
>sol0:=dsolve(eq0,y0(x));assign(sol0);
simplify(value(eq0));
```

$$\begin{aligned} \text{sol0} := y_0(x) &= C_1 + \frac{C_2}{x} \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Мы получили общее решение уравнения при  $\lambda = 0$  в виде  $y_0(x) = C_1 + C_2/x$ . Видим, что это решение будет ограниченным в нуле, если  $C_2 = 0$ , а тогда оно удовлетворяет второму краевому условию при любом  $C_1$ . Таким образом, получаем, что  $\lambda = 0$  является собственным значением задачи, которому отвечает собственная функция, равная единице. Отсюда и вытекает необходимость нулевого члена  $C_0$  в формуле (3.91).

Вычисляем теперь коэффициент  $C_0$  искомого разложения. Для этого мы интегрируем выражение (3.91) на  $[0, a]$  с весом  $x^2$ :

```
>Int(x^2*y(x,n),x=0..a);value(%);
simplify(subs(sin(mu[n])=mu[n]*cos(mu[n]),%));
```

$$\begin{aligned} &\int_0^a x \sin\left(\frac{\mu_n x}{a}\right) dx \\ &\frac{a^2(\sin(\mu_n) - \mu_n \cos(\mu_n))}{\mu_n^2} \\ &0 \end{aligned}$$

```
>C0:=Int(x^4,x=0..a)/Int(x^2,x=0..a);C0:=value(C0);
```

$$\begin{aligned} C0 &:= \frac{\int_0^a x^4 dx}{\int_0^a x^2 dx} \\ C0 &:= \frac{3}{5} a^2 \end{aligned}$$

Таким образом, искомое разложение имеет вид

$$x^2 \sim \frac{3a^2}{5} + \frac{4a^3}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\mu_n x}{a}\right)}{\mu_n^3 \cos(\mu_n)}. \quad (3.92)$$

Выполним теперь некоторые численные расчеты для конкретного интервала  $[0, a]$ . Определим функцию, стоящую в правой части (3.92), в Maple:

```
>g:=(x,K)->C0+sum(C(k)*y(x,k),k=1..K);g(x,K);
```

$$\begin{aligned} g &:= (x, K) \rightarrow C_0 + \sum_{k=1}^K C(k)y(x, k) \\ &\frac{3}{5} a^2 + \sum_{k=1}^K \frac{4a^3 \sin\left(\frac{\mu_k x}{a}\right)}{\mu_k^3 \cos(\mu_k) x} \end{aligned}$$



Найдем, например, первые сто корней характеристического уравнения:

```
>K:=100:mu:=array(1..K):
for i from 1 to K do
mu[i]:=fsolve(f=0,mu,mu=i*Pi..(i+1)*Pi):
end do;
```

$$\begin{aligned}\mu_1 &:= 4,493409458 \\ \mu_2 &:= 7,725251837 \\ \mu_3 &:= 10,90412166 \\ \mu_4 &:= 14,06619391 \\ \mu_5 &:= 17,22075527 \\ \mu_6 &:= 20,37130296 \\ \mu_7 &:= 23,52945250 \\ \mu_8 &:= 26,66605426 \\ \mu_9 &:= 29,81159879 \\ \mu_{10} &:= 32,95638904\end{aligned}$$

и т. д. Все последующие значения корней мы по понятным причинам напечатать не можем. Но мы можем посмотреть, скажем, на 87-й или 100-й корни:

```
>mu[87];mu[100];
```

$$\begin{aligned}274,8857193 \\ 315,7268944\end{aligned}$$

Зададим теперь конкретный интервал, на котором мы хотим разложить функцию  $x^2$ ; пусть, например,

```
>a:=3;
```

$$a:=3$$

Построим график заданной функции  $x^2$ :

```
>pt:=plot(x^2,x=0..a,legend=`Заданная функция`,color=black):
plots[display]({pt},symbolsize=14,font=[Times,roman,14],
labelfont=[Helvetica,roman,14],gridlines=true,
legendstyle=[font=["HELVETICA",12],location=right]);
```

(рис. 3.6)

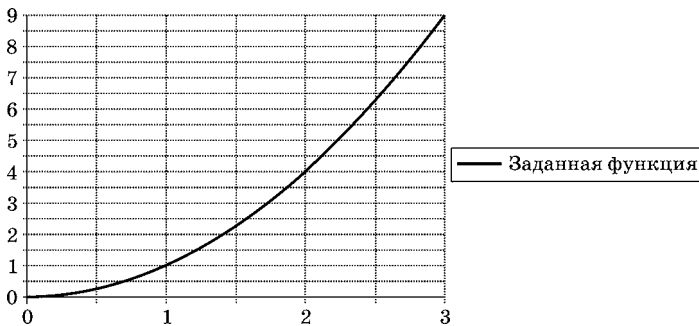


Рис. 3.6  
Заданная функция

Посмотрим, как аппроксимируют эту функцию частичные суммы ряда (3.92):

```
>p21:=
plot(g(x,21),x=0..a,linestyle=3,color=blue,legend=`K=21`):
plots[display]({pt,p21},symbolsize=14,
font=[Times,roman,14],labelfont=[Helvetica,roman,14],
gridlines=true,legendstyle=[font=["HELVETICA",12],
location=right]);
```

(рис. 3.7)

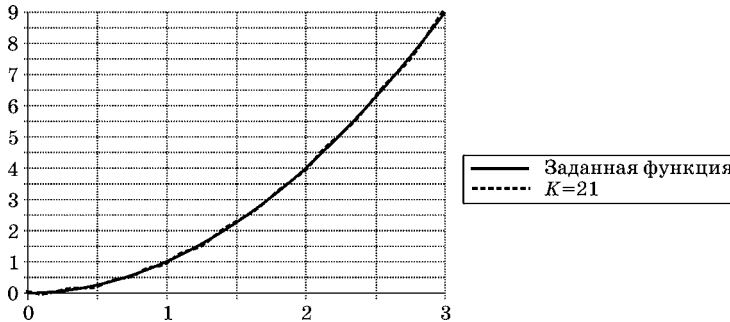


Рис. 3.7  
Заданная функция и отрезок ряда  
при  $K = 21$

Видим, что сходимость ряда хорошая, однако она ухудшается вблизи сингулярной границы:

```
>p_21:=
plot(g(x,21),x=0..a/5,linestyle=3,color=blue,
legend=`K=21`):
p_20:=
plot(g(x,20),x=0..a/5,linestyle=4,color=brown,
legend=`K=20`):
p_19:=
plot(g(x,19),x=0..a/5,linestyle=5,color=black,
legend=`K=19`):
pt_:=plot(x^2,x=0..a/5,legend=`Заданная функция`):
>plots[display]({pt_,p_19,p_20,p_21},symbolsize=14,
font=[Times,roman,14],labelfont=[Helvetica,roman,14],
gridlines=true,legendstyle=[font=["HELVETICA",12],
location=right]);
```

(рис. 3.8)

С увеличением числа удерживаемых членов ряда аппроксимация улучшается. Предоставляем читателю убедиться в этом самостоятельно.

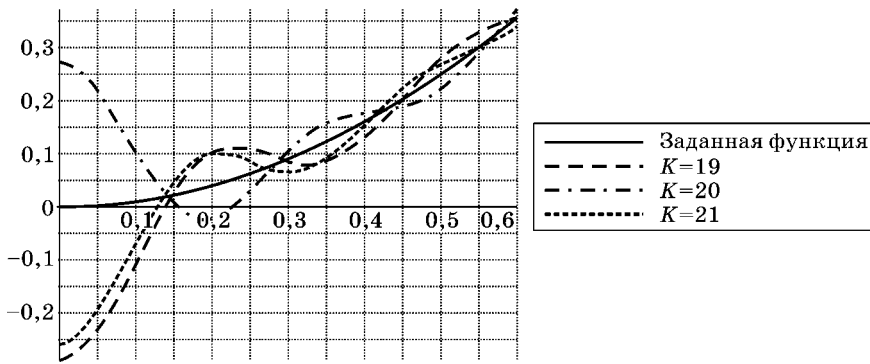


Рис. 3.8  
Ухудшение сходимости вблизи сингулярной границы

**Пример 2.** Решить задачу о колебаниях струны  $0 < x < l$  с закрепленными концами, если начальные скорости точек струны равны нулю, а начальное отклонение имеет форму синусоиды  $u|_{t=0} = A \sin(\pi x/l)$ .

*Решение.* Эта задача может быть решена методом Фурье. Мы рекомендуем читателю построить решение задачи этим методом. Можно, однако, использовать для решения данной задачи и формулу Даламбера. Покажем, как это сделать.

Нам необходимо проинтегрировать уравнение колебаний струны при начальных данных:

$$u|_{t=0} = \varphi(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x) = 0,$$

и при краевых условиях

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0.$$

Продолжим функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  на отрезок  $[-l, 0]$  нечетным образом, а затем периодически на всю ось. В результате получим функции

$$\Phi(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad \Psi(x) = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

совпадающие на отрезке  $[0, l]$  с функциями  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ .

Подставляя функции  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$  в формулу Даламбера (2.91), находим решение уравнения колебаний в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ A \sin\left[\frac{\pi}{l}(x - at)\right] + A \sin\left[\frac{\pi}{l}(x + at)\right] \right\}$$

или

$$u(x, t) = A \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi at}{l}\right).$$

**Пример 3.** Решить задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

с начальными:

$$u(x, 0) = f(x)$$

и граничными условиями:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0.$$

*Решение.* Эта задача может быть решена методом Фурье. Мы воспользуемся для ее решения системой Maple.

Определяем задачу в Maple:

>restart;

>pde:=diff(u(x,t),t)/v^2-diff(u(x,t),x,x)=0;

$$pde := \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \frac{1}{v^2} - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right) = 0$$

>init\_c:=u(x,0)=f(x);

$$init\_c := u(x, 0) = f(x)$$

>bound\_c:=u(0,t)=0,u(L,t)=0;

$$bound\_c : u(0, t) = 0, u(L, t) = 0$$

Выполняем разделение переменных:

>sol:=pdsolve(pde,HINT=X(x)\*T(t));

$$sol := (u(x, t) = X(x)T(t)) \& \text{ where } \left[ \left\{ \frac{d}{dt} T(t) = -c_1 T(t)v^2, \frac{d^2}{dx^2} X(x) = -c_1 X(x) \right\} \right]$$

>de2:=op(1,(op(1,op(2,sol))));

de1:=op(2,(op(1,op(2,sol))));

$$de2 := \frac{d}{dt} T(t) = -c_1 T(t)v^2$$

$$de1 := \frac{d^2}{dx^2} X(x) = -c_1 X(x)$$

>de1:=subs(\_c[1]=-lambda,de1);de2:=subs(\_c[1]=-lambda,de2);

$$de1 := \frac{d^2}{dx^2} X(x) = -\lambda X(x)$$

$$de2 := \frac{d}{dt} T(t) = -\lambda T(t)v^2$$

Таким образом, мы получили два обыкновенных дифференциальных уравнения. Сформулируем теперь соответствующую задачу Штурма — Лиувилля. Мы имеем однородные условия по переменной  $x$ :

$$s1 := X(0) = 0, X(L) = 0;$$

$$s1 := X(0) = 0, x(L) = 0$$

Находим общее решение уравнения de1 и формируем систему однородных уравнений по граничным условиям:

$$> dsolve(de1, X(x));$$

$$X(x) = \_C1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + \_C2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

$$> X := unapply(rhs(%), x);$$

$$X := x \rightarrow \_C1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + \_C2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

$$> s1;$$

$$\_C2 = 0, \_C1 \sin(\sqrt{\lambda}L) + \_C2 \cos(\sqrt{\lambda}L) = 0$$

Видим, одна константа сразу определилась, присвоим ей найденное значение:

$$> assign(%[1]): X(x);$$

$$\_C1 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Из второго уравнения системы s1 получаем уравнение для определения собственных значений; решаем полученное уравнение и находим собственные значения задачи:

$$> chl := s1[2] / \_C1;$$

$$chl := \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$$

$$> solve(chl, lambda, AllSolutions);$$

$$\frac{\pi^2 \_Z2^2}{L^2}$$

$$> indets(%) minus \{L\};$$

$$\{\_Z2 \sim\}$$

$$> subs(%[1]='k', %%);$$

$$> ev := unapply(%, k);$$

$$ev := k \rightarrow \frac{\pi^2 k^2}{L^2}$$

Определяем теперь соответствующие собственные функции:

$$> X := 'X' : ode := subs(lambda=ev(k), de1);$$

$$ode := \frac{d^2}{dx^2} X(x) = -\frac{\pi^2 k^2 X(x)}{L^2}$$

>res:=dsolve({ode,s1},X(x)) assuming k::posint;

$$res := X(x) = \_C1 \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)$$

>X:=(x,n)->sin(Pi\*n\*x/L);

$$X := (x, n) \rightarrow \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

Итак, собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля найдены:

>ev(k);X(x,k);

$$\frac{\pi^2 k^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)$$

Читателю мы предоставляем возможность самостоятельно убедиться в том, что  $\lambda = 0$  не является собственным значением рассматриваемой задачи Штурма — Лиувилля.

Найдем теперь общее решение второго дифференциального уравнения de2:

>problem:=subs(lambda=ev(k),de2);

$$problem := \frac{d}{dt} T(t) = -\frac{\pi^2 k^2 T(t) v^2}{L^2}$$

>res1:=dsolve(problem,T(t));

$$res1 := T(t) = \_C1 e^{-\frac{\pi^2 k^2 v^2 t}{L^2}}$$

Решение исходной задачи ищем в виде ряда:

>'u(x,t)'=Sum(T[k](t)\*X(x,k),k=1..infinity):

subs(T[k](t)=rhs(res1),rhs(%)):

sol:='u(x,t)'=subs(\_C1=C[k],%);

$$sol := u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\frac{\pi^2 k^2 v^2 t}{L^2}} \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)$$

Коэффициенты этого ряда определяем согласно теореме разложения из начальных условий:

>eq:=f(x)=value(subs(t=0,rhs(sol)));

$$eq := f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)$$

>Ck:= 'C[k]' =2/L\*int(f(x)\*X(x,k),x=0..L) assuming k::posint;

$$Ck := C_k = \frac{2 \left( \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right) dx \right)}{L}$$

Итак, мы получили формальное решение задачи:

> 'u(x,t)' =subs(Ck,rhs(sol));

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \left( \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right) dx \right) e^{-\frac{\pi^2 k^2 v^2 t}{L^2}} \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)}{L}$$

Решение поставленной задачи может быть получено автоматически с помощью команды pdsolve следующим образом:

```
>restart;
pde:=diff(u(x,t),x,x)=1/v^2*diff(u(x,t),t);
init_c:=u(x,0)=f(x);
bound_c:=u(0,t)=0,u(L,t)=0;
sys:=[pde,init_c,bound_c];
pdsolve(sys);
```

$$pde := \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{u(x, t)}{v^2}$$

$$init\_c := u(x, 0) = f(x)$$

$$bound\_c := u(0, t) = 0, u(L, t) = 0$$

$$sys := \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{u(x, t)}{v^2}, u(x, 0) = f(x), u(0, t) = 0, u(L, t) = 0 \right]$$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \left( \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right) dx \right) \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right) e^{-\frac{\pi^2 k^2 v^2 t}{L^2}}}{L}$$

Запишем полученное решение в привычном виде:

>subs(\_Z1=n,%);

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \left( \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx \right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) e^{-\frac{\pi^2 n^2 v^2 t}{L^2}}}{L}$$

Определим найденное решение как функцию и получим решения разных задач при конкретных начальных данных:

```
>restart;
>u:=proc(x,t) option operator, arrow; local n,C1;
```

```

C1[n]:=simplify(2*int(f(x)*sin(Pi*n*x/L),x=0..L)/L)
assuming n::posint;
Sum(C1[n]*sin(Pi*n*x/L)*exp(-Pi^2*n^2*v^2*t/L^2),
n=1..infinity);
end proc;
'u(x,t)' =u(x,t);

```

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \left( \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx \right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) e^{-\frac{\pi^2 n^2 v^2 t}{L^2}}}{L}$$

Пусть, например,

```
>f:=x->L/2-abs(L/2-x);
```

$$f := x \rightarrow \frac{1}{2}L - \left| \frac{1}{2}L - x \right|$$

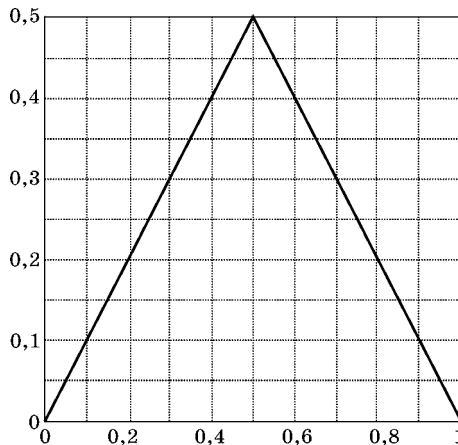
Построим график заданной начальной функции, скажем, при  $L = 1$ :

```
>L:=1: 'f(x)' =convert(f(x),piecewise);
```

$$f(x) = \begin{cases} x & x < \frac{1}{2} \\ 1-x & \frac{1}{2} \leq x \end{cases}$$

```
>plot(f(x),x=0..L,axes=boxed,gridlines=true,
font=[Times,roman,14],labelfont=[Times,roman,14]);
```

(рис. 3.9)



**Рис. 3.9**  
Заданное начальное распределение температуры



Распределение температуры дается формулой

> 'u(x,t)' = u(x,t);

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin\left(\frac{1}{2} \pi n\right) \sin(\pi n x) e^{-\pi^2 n^2 v^2 t}}{\pi^2 n^2}$$

Еще пример:

> L := 'L' : f := x -> x\*(L-x); 'u(x,t)' = u(x,t);

$$f := x \rightarrow x(L - x)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{4L^2((-1)^n - 1) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) e^{-\frac{\pi^2 n^2 v^2 t}{L^2}}}{\pi^3 n^3} \right)$$

В рассмотренных примерах получены точные аналитические решения задачи нестационарной одномерной теплопроводности на конечном отрезке при различных начальных условиях. Эти решения определяются бесконечными рядами. Перед инженером всегда стоит задача количественной оценки полученного решения, т. е. необходимо уметь суммировать такие ряды. Иногда, в очень редких специальных случаях, возможно точное суммирование ряда. Чаще приходится вычислять сумму ряда приближенно, сохраняя в разложении то или иное количество членов ряда. Полученный ряд может очень медленно сходиться, так что приходится удерживать очень большое количество членов ряда для достижения приемлемой точности. При этом часто возникает проблема устойчивости вычислений, связанная с накоплением ошибок округления. Поэтому для инженера большое значение имеют приближенные аналитические методы решения задач математической физики. Зачастую такие приближенные аналитические решения оказываются проще с вычислительной точки зрения, чем точные решения в виде бесконечных рядов. Примеры построения приближенных аналитических решений задач математической физики рассматриваются в главе 7.

Вернемся к нашим примерам. Для количественной оценки решений удобно определить общее решение в виде отрезка ряда. Это позволит нам легко менять параметры задачи и изучать зависимость решения от параметров задачи. Пусть  $w(k, x, t)$  — набор частных решений:

> restart;

> w := (k, x, t) -> exp(-k^2 \* Pi^2 \* v^2 \* t / L^2) \* sin(k \* Pi \* x / L);

$$w := (k, x, t) \rightarrow e^{-\frac{k^2 \pi^2 v^2 t}{L^2}} \sin\left(\frac{\pi x k}{L}\right)$$

Коэффициенты Фурье:

> c := k -> 2/L \* int(f(x) \* sin(k \* Pi \* x / L), x = 0..L);

$$c := k \rightarrow \frac{2 \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{k \pi x}{L}\right) dx}{L}$$

Приближение к решению, отвечающее первым  $n$  слагаемым ряда, определим как  $n$ -ю частичную сумму ряда:

`>u:=(n,x,t)->sum(c(k)*w(k,x,t),k=1..n):' u(n,x,t)' =u(n,x,t);`

$$u(n, x, t) = \sum_{k=1}^n \frac{2 \left( \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \right) e^{-\frac{k^2 \pi^2 v^2 t}{L^2}} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)}{L}$$

Пусть исходные данные задачи определяются следующими параметрами:

`>v:=1;L:=50;`

`v:= 1`

`L:= 50`

`>f:=x->25;`

`f:= x → 25`

Можно определить значение температуры  $u$  в точке  $x$  в момент времени  $t$ , используя  $n$  слагаемых ряда. Например, при  $x = 15$ ,  $t = 100$ ,  $n = 10$ :

`>u(10,15,100):`

`evalf(u(10,15,100),3);`

17.4

Таким образом, в данной точке температура упала до 17 градусов с начальных 25. Нарисуем график распределения температуры по  $x$  при  $t = 50$ ,  $n = 10$

`>plot(u(10,x,50),x=0..L,u=0..30,gridlines=true,`

`font=[Times,roman,14],labelfont=[Helvetica,roman,14]);`

(рис. 3.10)

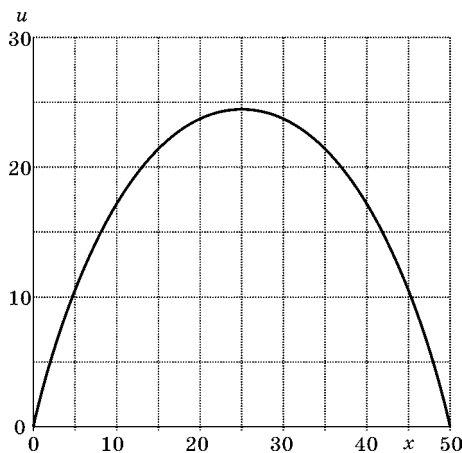
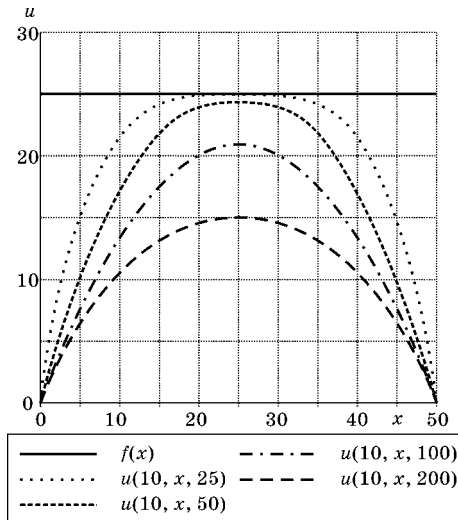


Рис. 3.10  
Распределение температуры в момент  $t = 50$

Посмотрим, как меняется данное распределение со временем:

```
>plot([f(x),u(10,x,25),u(10,x,50),u(10,x,100),u(10,x,200)],
x=0..L,u=0..30,gridlines=true,font=[Times,roman,14],
linestyle=[solid,dot,dash,dashdot,longdash],
legend=[ "f(x)" , "u(10,x,25)" , "u(10,x,50)" ,
"u(10,x,100)" , "u(10,x,200)" ],
labelfont=[Helvetica,roman,14]);
```

(рис. 3.11)

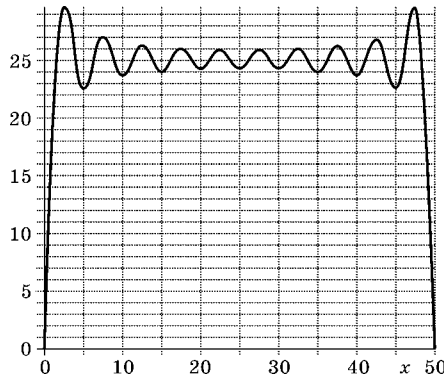


**Рис. 3.11**  
Распределение температуры в разные моменты времени

Более наглядно использовать анимационные возможности Maple.

```
>with(plots):
>animate(u(20,x,t),x=0..L,t=0..300,frames=50,
color=blue,gridlines=true,font=[Times,roman,14],
labelfont=[Helvetica,roman,14],numpoints=600);
```

(рис. 3.12)



**Рис. 3.12**  
Показано начальное распределение температуры  
(необходимо запустить анимацию)

Заметим, чем больше значение  $n$ , тем лучше начальное приближение функции  $f(x) = 25$  рядом Фурье. На рисунке 3.12 отчетливо проявляется так называемый эффект Гиббса. Чтобы сгладить возникающие нежелательные колебания, можно использовать так называемые сглаживающие множители, например сигма-множители Ланцоша или множители Фейера\*.

Определим частичные суммы ряда с учетом таких множителей — множители Ланцоша:

```
>U:=proc(n,x,t) option operator, arrow; local k,C;
C[k]:=simplify(2*(int(f(x)*sin(k*Pi*x/L),x=0..L))/L)
assuming k::posint;
sum(sin(k*Pi/n)/(k*Pi/n)*C[k]*w(k,x,t),k=1..n);
end proc;
'U(n,x,t)'=U(n,x,t);
```

$$U(n, x, t) = \sum_{k=1}^n \frac{50 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) n(1 + (-1)^{1+k}) e^{-\frac{1}{2500} k^2 \pi^2 t} \sin\left(\frac{1}{50} k \pi x\right)}{k^2 \pi^2}$$

множители Фейера:

```
>W:=proc(n,x,t) option operator, arrow; local k,C;
C[k]:=simplify(2*(int(f(x)*sin(k*Pi*x/L),x=0..L))/L)
assuming k::posint;
sum(((n-k+1)/n)*C[k]*w(k,x,t),k=1..n);
end proc;
'W(n,x,t)'=W(n,x,t);
```

$$W(n, x, t) = \sum_{k=1}^n \frac{50(n-k+1)(1 + (-1)^{1+k}) e^{-\frac{1}{2500} k^2 \pi^2 t} \sin\left(\frac{1}{50} k \pi x\right)}{n k \pi}$$

Посмотрим, как аппроксимируется начальная постоянная температура  $f(x) = 25$  частичными суммами ряда с учетом сглаживающих множителей.

Частичная сумма Ланцоша:

```
>plot([f(x),U(30,x,0),u(30,x,0)],x=0..L,
color=[black,blue,red],gridlines=true,
linestyle=[solid,longdash,dash],
legend=[ "f(x)" , "U(30,x,0)" , "u(30,x,0)" ],
font=[Times,roman,14],labelfont=[Helvetica,roman,14],
numpoints=600,title=3 Сигма-множители Ланцоша 3);
```

(рис. 3.13)

\* См., напр.: Ланцош, К. Практические методы прикладного анализа. Справочное руководство / пер. с англ. М. З. Кайнера; под ред. А. М. Лопшица. — М. : Физматгиз, 1961; Хемминг, Р. В. Численные методы для научных работников и инженеров / пер. с англ. В. Л. Арлазарова, Г. С. Разиной и А. В. Ускова; под ред. Р. С. Гутера. — М. : Наука, 1968.

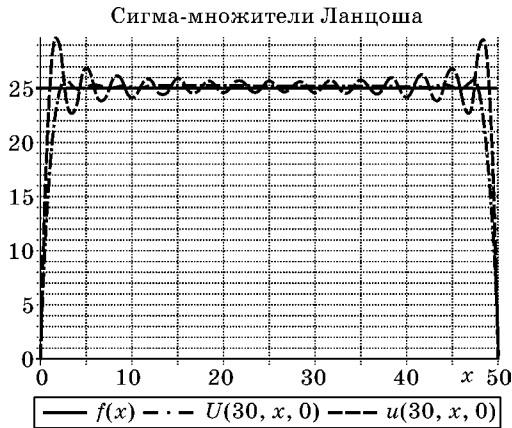


Рис. 3.13  
Сумма Ланцоша

Частичная сумма Фейера:

```
>plot([f(x),W(30,x,0),u(30,x,0)],x=0..L,
color=[black,blue,red],gridlines=true,
linestyle=[solid,longdash,dash],
legend=["f(x)", "W(30,x,0)", "u(30,x,0)"],
font=[Times,roman,14],labelfont=[Helvetica,roman,14],
numpoints=600,title=3 множители Фейера3);
```

(рис. 3.14)

Посмотрим теперь, как меняется температура со временем в точке  $x = L/2$

```
>plot(u(10,L/2,t),t=0..500,u=0..30,gridlines=true,
font=[Times,roman,14],labelfont=[Helvetica,roman,14]);
```

(рис. 3.15)

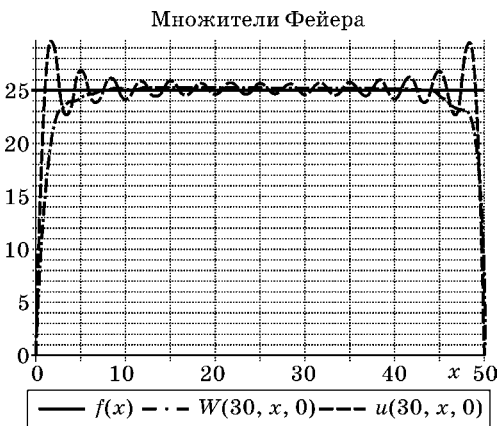


Рис. 3.14  
Сумма Фейера

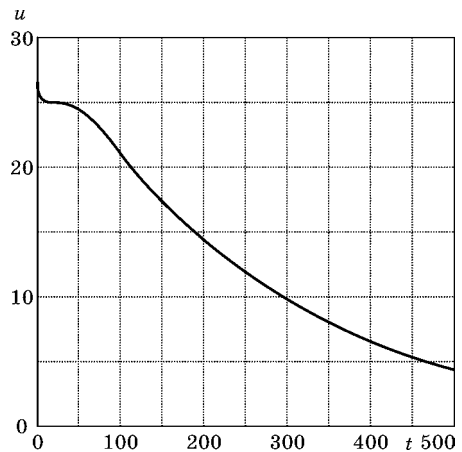
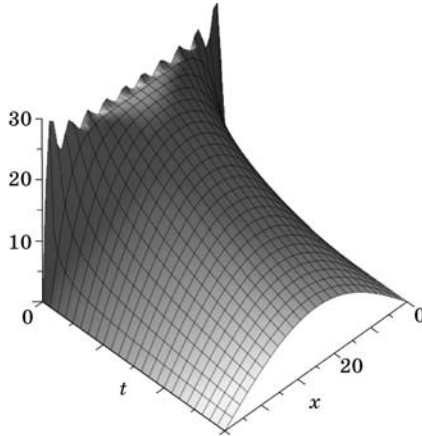


Рис. 3.15  
Распределение температуры при  $x = L/2$

Посмотрим трехмерный график распределения температуры:

```
>plot3d(u(20,x,t),x=0..L,t=0..300,view=0..30,
axes=FRAMED,style=PATCH,font=[Times,roman,14],
labelfont=[Helvetica,roman,14]);
```

(рис. 3.16)



**Рис. 3.16**  
Трехмерный график  
распределения температуры

**Пример 4.** Решить задачу для волнового уравнения:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

с начальными:

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x)$$

и граничными условиями:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0.$$

*Решение.* Эта задача может быть решена методом Фурье. Определяем задачу в Maple и выполняем разделение переменных:

```
>restart;
>PDE:=1/v^2*diff(u(x,t),t,t)-diff(u(x,t),x,x)=0;
ic:=u(x,0)=phi(x),D[2](u)(x,0)=psi(x);
bc:=u(0,t)=0,u(L,t)=0;
```

$$PDE := \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right) = 0$$

$$ic := u(x, 0) = \phi(x), \quad D_2(u)(x, 0) = \psi(x)$$

$$bc := u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$$

>res:=pdsolve(PDE,HINT=T(t)\*X(x));

res := (u(x, t) = T(t)X(x)) & where  $\left[ \left\{ \frac{d^2}{dt^2} T(t) = T(t) - c_1 v^2, \frac{d^2}{dx^2} X(x) = -c_1 X(x) \right\} \right]$

>ode1:=op(1,op(1,op(2,res)));ode2:=op(2,op(1,op(2,res)));

$$ode1 := \frac{d^2}{dt^2} T(t) = T(t) - c_1 v^2$$

$$ode2 := \frac{d^2}{dx^2} X(x) = -c_1 X(x)$$

Сделаем замену постоянной разделения переменных:  $-c_1 = -\lambda$

>ode2:=subs(\_c[1]=-lambda,ode2);

$$ode2 := \frac{d^2}{dx^2} X(x) = -\lambda X(x)$$

Решаем полученное обыкновенное дифференциальное уравнение с учетом первого граничного условия  $X(0) = 0$ :

>dsolve({ode2,X(0)=0},X(x));

$$X(x) = -C1 \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

Теперь учтем второе граничное условие  $X(L) = 0$  и решим соответствующее характеристическое уравнение:

> sin(sqrt(lambda)\*L)=0;solve(%,lambda,allsolutions);

$$\sin(\sqrt{\lambda} L) = 0$$

$$\frac{\pi^2 - Z1^2}{L^2}$$

или в привычном виде

>lambda:=(Pi\*n/L)^2;

$$\lambda := \frac{\pi^2 n^2}{L^2}$$

Поэтому для каждого  $n$  получаем:

>X:=(x,n)->sin(Pi\*n\*x/L);

$$X := (x, n) \rightarrow \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

Решаем второе уравнение

>ode1:=subs(\_c[1]=-lambda,ode1);dsolve(%,T(t));

$$ode1 := \frac{d^2}{dt^2} T(t) = -\frac{T(t)\pi^2 n^2 v^2}{L^2}$$

$$T(t) = -C1 \sin\left(\frac{\pi v n t}{L}\right) + -C2 \cos\left(\frac{\pi v n t}{L}\right)$$

Запишем полученное общее решение так:

$T := (t, n) \rightarrow C1[n] \sin(\pi n v t / L) + C2[n] \cos(\pi n v t / L);$

$$T := (t, n) \rightarrow C1_n \sin\left(\frac{\pi n v t}{L}\right) + C2_n \cos\left(\frac{\pi n v t}{L}\right)$$

Определим совокупность частных решений

$Un := (x, t, n) \rightarrow T(t, n) X(x, n);$

$$Un := (x, t, n) \rightarrow T(t, n) X(x, n)$$

В результате общее решение имеет вид:

$u := (x, t) \rightarrow \text{Sum}(Un(x, t, n), n=1..infinity): 'u(x, t)' = u(x, t);$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( C1_n \sin\left(\frac{\pi v n t}{L}\right) + C2_n \cos\left(\frac{\pi v n t}{L}\right) \right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

Для определения коэффициентов  $C1_n$  и  $C2_n$  воспользуемся начальными условиями:

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x).$$

$\text{simplify}(\text{subs}(t=0, u(x, t)) = \phi(x));$

$\text{simplify}(\text{subs}(t=0, \text{diff}(u(x, t), t)) = \psi(x));$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C2_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) = \phi(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C1_n \pi v n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)}{L} = \psi(x)$$

Эти равенства означают, что  $(\pi v n C1_n)$  и  $C2_n$  являются коэффициентами разложения функций  $\psi(x)$  и  $\phi(x)$  в ряды Фурье. Следовательно,

$C2[n] := 2/L * \int(\phi(x) * \sin(\pi n x / L), x=0..L);$

$C1[n] := 2/L / (\pi n v) * \int(\psi(x) * \cos(\pi n x / L), x=0..L);$

$$C2_n = \frac{2 \int_0^L \phi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx}{L}$$

$$C1_n := \frac{2 \int_0^L \psi(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx}{\pi v n}$$



Выпишем окончательно решение в явном виде:

> 'u(x,t)' =u(x,t);

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2 \left( \int_0^L \psi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx \right) \sin\left(\frac{\pi v n t}{L}\right)}{\pi v n} + \frac{2 \left( \int_0^L \phi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx \right) \cos\left(\frac{\pi v n t}{L}\right)}{L} \right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

Решение одномерного волнового уравнения для конечного отрезка с произвольными начальными условиями и однородными граничными условиями первого рода так же, как и в примере 3, может быть получено автоматически с помощью команды `pdsolve` следующим образом:

```
>restart;
>sys:=[1/v^2*diff(u(x,t),t,t)-diff(u(x,t),x,x)=0,
u(x,0)=phi(x),D[2](u)(x,0)=psi(x),u(0,t)=0,u(L,t)=0];
pdsolve(sys):
simplify(%) assuming L>0:
subs(_Z1=n,%);
```

$$\begin{aligned} \text{sys} := & \left[ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, u(x, 0) = \phi(x), \right. \\ & \left. D_2(u)(x, 0) = \psi(x), u(0, t) = 0, u(L, t) = 0 \right] \\ u(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{v \pi n L} \left( 2 \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \left( \left( \int_0^L \psi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx \right) \sin\left(\frac{v \pi n t}{L}\right) L + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \int_0^L \phi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx \right) \cos\left(\frac{v \pi n t}{L}\right) v \pi n \right) \right) \end{aligned}$$

Определим найденное решение как функцию и получим решения конкретных задач при тех или иных начальных данных:

```
>restart;
>u:=proc(x,t) option operator, arrow; local n,C1,C2;
C1[n]:=2*(int(psi(x)*sin(Pi*n*x/L),x=0..L))/(Pi*v*n)
assuming n::posint;
C2[n]:=2*(int(phi(x)*sin(Pi*n*x/L),x=0..L))/L
assuming n::posint;
Sum((C1[n]*sin(Pi*n*v*t/L)+C2[n]*cos(Pi*n*v*t/L))*
sin(Pi*n*x/L),n=1..infinity);
end proc:
'u(x,t)' =u(x,t);
```

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2 \left( \int_0^L \psi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx \right) \sin\left(\frac{\pi n v t}{L}\right)}{\pi v n} + \frac{2 \left( \int_0^L \phi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx \right) \cos\left(\frac{\pi n v t}{L}\right)}{L} \right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

**Задача.** Струна  $0 \leq x \leq L$  с жестко закрепленными концами возбуждается ударом острого молоточка, передающего ей импульс  $P$  в точке  $x = c$ ,  $c \in (0, L)$ . Найти колебания струны, если начальное отклонение равно нулю.

*Решение.* Струна закреплена в концах, значит, граничные условия в этой задаче имеют вид  $u(0, t) = 0$ ,  $u(L, t) = 0$ . Начальные условия запишем, используя дельта-функцию Дирака. Задан импульс  $P = mv$  (произведение массы на скорость), т. е. фактически задана скорость:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{P}{\rho} \delta(x - c).$$

Коэффициент при дельта-функции  $\delta(x - c)$  выбирается так, чтобы суммарный импульс, передаваемый струне в момент времени  $t = 0$ , был равен  $P$ , т. е.

$$\int_0^L \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} \rho dx = P.$$

Вводим начальные данные:

`>phi:=x->0;psi:=x->P/rho*Dirac(x-c);`

$$\phi := x \rightarrow 0$$

$$\psi := x \rightarrow \frac{P \text{Dirac}(x - c)}{\rho}$$

Воспользуемся полученной общей формулой решения:

`>u(x,t):`

`'u(x,t)'=simplify(%symbolic) assuming c>0,c<L;`

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2P \sin\left(\frac{\pi n c}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi n v t}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)}{\rho \pi v n}$$

**Пример 5.** Рассмотреть продольные колебания стержня, конец которого  $x = 0$  жестко закреплен, а свободный конец  $x = l$  получает в начальный момент времени продольный ударный импульс  $P$ . До удара стержень находился в состоянии покоя.

*Решение.* Поставим задачу — найти решение уравнения колебаний:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

подчиняющееся граничным условиям:

$$u|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$$

и начальным условиям, которые мы можем записать в следующем виде:

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \begin{cases} 0, & 0 < x < L - \varepsilon; \\ v_0 = \frac{P}{\rho \varepsilon S}, & L - \varepsilon < x < L. \end{cases}$$

Здесь  $S$  — площадь поперечного сечения стержня;  $\rho$  — плотность.

После того как решение сформулированной задачи будет получено, необходимо перейти к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Можно начальные условия сформулировать в другом виде, использующем понятие дельта-функции Дирака, как в предыдущем примере:

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0(x) = \frac{P}{\rho S} \delta(x - L).$$

Здесь коэффициент при дельта-функции  $\delta(x - L)$  выбран так, чтобы суммарный импульс, передаваемый стержню в момент  $t = 0$ , был равен  $P$ , т. е.

$$\int_0^L \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} \rho S dx = P.$$

Рассмотрим обе возможности задания начальных условий. Для решения задачи воспользуемся Maple. Поставим задачу — дифференциальное уравнение колебаний, начальные и граничные условия:

```
>restart;
>PDE:=1/v^2*diff(u(x,t),t,t)-diff(u(x,t),x,x)=0;
ic:=u(x,0)=0,D[2](u)(x,0)=psi(x);
bc:=u(0,t)=0,D[1](u)(L,t)=0;
```

$$PDE := \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right) = 0$$

$$ic := u(x, 0) = 0, D_2(u)(x, 0) = \psi(x)$$

$$bc := u(0, t) = 0, D_1(u)(L, t) = 0$$

Функцию  $\psi(x)$  определим двумя способами:

```
>psi1:=piecewise(0<x and x<L-epsilon,0,
L-epsilon<x and x<L,P/rho/epsilon/S);
```

$$\psi_1 := \begin{cases} 0 & 0 < x \text{ and } x < L - \varepsilon \\ \frac{P}{\rho \varepsilon S} & L - \varepsilon < x \text{ and } x < L \end{cases}$$

или

```
>psi2:=x->P/rho/S*Dirac(x-L);
```

$$\psi_2 := x \rightarrow \frac{P \text{Dirac}(x - L)}{\rho S}$$

Выполним разделение переменных в уравнении колебаний:

```
>res:=pdsolve(PDE,HINT=T(t)*X(x));
```

```
res := (u(x, t) = T(t)X(x)) & where  $\left\{ \frac{d^2}{dt^2} T(t) = T(t) - c_1 v^2, \frac{d^2}{dx^2} X(x) = -c_1 X(x) \right\}$ 
```

```
>ode1:=op(1,op(1,op(2,res)));ode2:=op(2,op(1,op(2,res)));
```

$$\text{ode1} := \frac{d^2}{dt^2} T(t) = T(t) - c_1 v^2$$

$$\text{ode2} := \frac{d^2}{dx^2} X(x) = -c_1 X(x)$$

Сделаем замену постоянной разделения переменных:  $-c_1 = -\lambda$ :

```
>ode2:=subs(_c[1]=-lambda,ode2);
```

$$\text{ode2} := \frac{d^2}{dx^2} X(x) = -\lambda X(x)$$

Решаем уравнение с учетом первого граничного условия  $X(0) = 0$ :

```
>dsolve({ode2,X(0)=0},X(x));
```

$$X(x) = -C1 \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

Теперь учтем второе граничное условие  $X'|_{x=L} = 0$  и решим полученное характеристическое уравнение (константа  $-C1$  предполагается отличной от нуля):

```
>subs(x=L,diff(rhs(%),x))/_C1=0;
```

```
solve(% ,lambda,allsolutions);
```

$$\cos(\sqrt{\lambda} L) \sqrt{\lambda} = 0$$

$$0, \frac{1}{4} \frac{\pi^2 (1 + 2n)^2}{L^2}$$

Нулевое решение  $\lambda = 0$  должно проверяться отдельно (в этом случае, очевидно, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения имеет другой вид — это будет линейная функция от  $x$ ; исследование этого случая мы предоставляем читателю в качестве упражнения). Читателю мы рекомендуем самостоятельно убедиться в том, что  $\lambda = 0$  не является собственным значением рассматриваемой задачи Штурма — Лиувилля.

Перепишем полученный результат в привычной для нас форме:

```
>indets(%[2]) minus {L}:lambda:=subs(%[1]='n',%[2]);
```

$$\lambda := \frac{1}{4} \frac{\pi^2 (1 + 2n)^2}{L^2}$$

Итак, для каждого  $n$  получаем:

>X:=(x,n)->sin(Pi\*(1+2\*n)\*x/(2\*L));

$$X := (x, n) \rightarrow \sin\left(\frac{1}{2} \frac{\pi(1+2n)x}{L}\right)$$

Решаем второе уравнение (сразу учтем однородное начальное условие):

>ode1:=subs(\_c[1]=-lambda,ode1);dsolve({%,T(0)=0},T(t));

$$ode1 := \frac{d^2}{dt^2} T(t) = -\frac{1}{4} \frac{T(t)\pi^2(1+2n)^2 v^2}{L^2}$$

$$T(t) = -C1 \sin\left(\frac{1}{2} \pi \left(\frac{v}{L} + \frac{2vn}{L}\right) t\right)$$

Запишем полученное решение так:

>T:=(t,n)->C1[n]\*sin((1/2)\*Pi\*(v/L+2\*v\*n/L)\*t);

$$T := (t, n) \rightarrow C1_n \sin\left(\frac{1}{2} \pi \left(\frac{v}{L} + \frac{2vn}{L}\right) t\right)$$

Совокупность частных решений:

>Un:=(x,t,n)->T(t,n)\*X(x,n);

$$Un := (x, t, n) \rightarrow T(t, n)X(x, n)$$

Сформируем решение в виде формального ряда:

>u:=(x,t)->Sum(Un(x,t,n),n=1..infinity): 'u(x,t)'=u(x,t);

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C1_n \sin\left(\frac{1}{2} \pi \left(\frac{v}{L} + \frac{2vn}{L}\right) t\right) \sin\left(\frac{1}{2} \frac{\pi(1+2n)x}{L}\right)$$

Для определения коэффициентов разложения воспользуемся начальными условиями:

>simplify(subs(t=0,diff(u(x,t),t))=psi1);

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{C1_n \pi v (1+2n) \sin\left(\frac{1}{2} \frac{\pi(1+2n)x}{L}\right)}{L} = \begin{cases} 0 & 0 < x \text{ and } x < L - \epsilon \\ \frac{P}{\rho \epsilon S} & L - \epsilon < x \text{ and } x < L \end{cases}$$

Это равенство означает, что числа  $\pi v (1+2n) C1_n / (2L)$  являются коэффициентами разложения функции  $\psi(x)$  в ряд Фурье. Следовательно,

>2/L/(Pi\*(1+2\*n)\*v/(2\*L))\*int(psi1\*X(x,n),x=0..L)

assuming epsilon>0,L>epsilon:

simplify(%) assuming n::posint:combine(%)

C1[n]:=factor(%)

$$C1_n := \frac{8PL(-1)^n \sin\left(\frac{1}{2} \frac{\pi \epsilon (1+2n)}{L}\right)}{\pi^2 v (1+2n)^2 \rho \epsilon S}$$

Переходим к пределу при  $\epsilon \rightarrow 0$ :

`>C1[n]:=factor(limit(C1[n],epsilon=0));`

$$CI_n := \frac{4P(-1)^n}{\pi(1+2n)v\rho S}$$

Наконец, выпишем решение в явном виде:

`> 'u(x,t)' =u(x,t);`

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4P(-1)^n \sin\left(\frac{1}{2}\pi\left(\frac{v}{L} + \frac{2vn}{L}\right)t\right) \sin\left(\frac{1}{2}\frac{\pi(1+2n)x}{L}\right)}{\pi(1+2n)v\rho S}$$

Рассмотрим вторую возможность — с дельта-функцией:

`>2/L/(Pi*(1+2*n)*v/(2*L))*Int(psi2(x)*X(x,n),x=0..L)=  
2/L/(Pi*(1+2*n)*v/(2*L))*int(psi2(x)*X(x,n),x=0..L);`

$$4 \frac{\left( \int_0^L \frac{P \text{Dirac}(x-L) \sin\left(\frac{1}{2}\frac{\pi(1+2n)x}{L}\right)}{\rho S} dx \right)}{\pi v(1+2n)} =$$

$$= \frac{4P\left(-\frac{1}{2} + \text{Heaviside}(L)\right) \sin\left(\frac{1}{2}(1+2n)\pi\right)}{\pi v(1+2n)\rho S}$$

`>simplify(rhs(%)) assuming L>0,n::posint;`

$$\frac{2P(-1)^n}{\pi(1+2n)v\rho S}$$

`>C1[n]:=2*%;`

$$CI_n := \frac{4P(-1)^n}{\pi(1+2n)v\rho S}$$

Результат, как и следовало ожидать, один и тот же!

*Замечание.* В последней формуле мы умножили результат на 2, чтобы учесть определение дельта-функции Дирака в системе Maple (см. Справку Maple; для этого необходимо набрать команду `?Dirac` и нажать клавишу «Enter»):

$$\int_a^b \text{Dirac}(x-x_0)f(x)dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{if } x_0 \text{ belongs to the open interval } ]a, b[ \\ \frac{1}{2}f(x_0) & \text{if } x_0 = a, \text{ or } x_0 = b, \text{ and } a < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

В более ранних версиях Maple [8] используется другое определение дельта-функции; это всегда надо учитывать, чтобы избежать досадных недоразумений.

# 4

## СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

### Г Л А В А

**Н**астоящая глава посвящена одному из разделов математики, знание которого представляется весьма существенным для научных работников и инженеров-исследователей, имеющих дело с математическими расчетами.

В ряде случаев, например, при пользовании методом Фурье разделения переменных в цилиндрических и сферических координатах, мы приходим к так называемым *специальным* функциям: *цилиндрическим*, *сферическим* и другим. Специальными функциями (или *высшими трансцендентными*) называются все неэлементарные функции. Характерная особенность этих функций состоит в том, что многие из них являются решениями уравнений с особыми точками вида

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] - q(x)y = 0,$$

где коэффициент  $p(x)$  обращается в нуль в одной или нескольких точках промежутка изменения переменной  $x$ . Решения таких уравнений имеют ряд специфических свойств.

Специальные функции находят применения в широком круге задач. В этой главе мы рассмотрим основные свойства цилиндрических и сферических функций, а точнее, простейшего их класса — полиномов Лежандра. Изложение элементов теории специальных функций мы начнем с описания гамма-функции, что стало уже традиционным в учебной литературе.

Приведем примеры специальных функций:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{— гамма-функция;}$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{— интеграл вероятности;}$$

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt \quad \text{— интегральный синус;}$$

$$\text{Ci}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt \quad \text{— интегральный косинус;}$$

$K(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-x^2t^2)}}$  — эллиптический интеграл I рода;

$E(x) = \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-x^2t^2)}{(1-t^2)}} dt$  — эллиптический интеграл II рода.

Цилиндрическими функциями называются решения уравнения Бесселя:

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0.$$

Специальные классы цилиндрических функций известны в литературе как функции Бесселя, и иногда это название присваивается всему классу цилиндрических функций:  $u(x) = J_\nu(x)$  — функция Бесселя или цилиндрическая функция первого рода.

Сферическими функциями называются решения уравнения

$$(1-x^2)u'' - 2xu' + \nu(\nu+1)u = 0,$$

$u(x) = P_\nu(x)$  — сферическая функция Лежандра первого рода.

Гипергеометрическая функция  $u(x) = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ , где  $\alpha, \beta, \gamma$  — параметры, является решением уравнения

$$x(1-x)u'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]u' - \alpha\beta u = 0.$$

## 4.1. ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ

### ЭЙЛЕРОВ ИНТЕГРАЛ ПЕРВОГО РОДА

Так называется (по предложению Лежандра) интеграл вида

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad (4.1)$$

$x > 0, y > 0$ . Он представляет функцию от двух переменных параметров  $x$  и  $y$ : функцию  $B$  — бета-функцию.

Заметим, что если одновременно  $x \geq 1, y \geq 1$ , то  $B(x, y)$  — интеграл собственный. Если же хотя бы одно из этих двух неравенств нарушается, то  $B(x, y)$  — несобственный интеграл. Покажем, что  $B(x, y)$  сходится, если одновременно  $x > 0, y > 0$ . Имеем

$$B(x, y) = \int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

Рассмотрим интеграл

$$J_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$



Точка  $t = 0$  — особая точка, если  $x < 1$ :

$$f(t) = t^{x-1}(1-t)^{y-1} \approx \frac{1}{t^{1-x}}, \quad \forall y,$$

при  $t \rightarrow 0$ .

Мы знаем, что интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{1-x}}$$

сходится, если  $1 - x < 1 \Leftrightarrow x > 0$ . Итак,  $J_1$  сходится при  $x > 0$  и  $\forall y$ .

Рассмотрим интеграл

$$J_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

Точка  $t = 1$  — особая точка, если  $y < 1$ :

$$f(t) = t^{x-1}(1-t)^{y-1} \approx \frac{1}{(1-t)^{1-y}}, \quad \forall x,$$

при  $t \rightarrow 1$ .

Мы знаем, что интеграл

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{(1-t)^{1-y}}$$

сходится, если  $1 - y < 1 \Leftrightarrow y > 0$ . Итак,  $J_2$  сходится при  $y > 0$  и  $\forall x$ .

Откуда заключаем, что  $B(x, y)$  сходится, если одновременно  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

Отметим некоторые свойства бета-функции.

### 1. Свойство симметрии:

$$B(x, y) = B(y, x).$$

*Доказательство.* Сделаем замену  $t = 1 - \tau \Rightarrow -dt = d\tau$ :

$$B(x, y) = \int_0^1 \tau^{y-1}(1-\tau)^{x-1} d\tau = B(y, x).$$

### 2. Пусть $y > 1$ .

$$B(x, y) = \int_0^1 (1-t)^{y-1} d\left(\frac{t^x}{x}\right) = \underbrace{(1-t)^{y-1} \frac{t^x}{x}}_{=0} \Big|_{t=0}^{t=1} + \frac{y-1}{x} \int_0^1 t^x (1-t)^{y-2} dt.$$

Можно записать  $t^x = t^{x-1} - t^{x-1}(1-t)$ , тогда

$$B(x, y) = \frac{y-1}{x} \left[ \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-2} dt - \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \right] = \frac{y-1}{x} [B(x, y-1) - B(x, y)].$$

Итак,

$$B(x, y) = \frac{y-1}{x} B(x, y-1) - \frac{y-1}{x} B(x, y)$$

или

$$B(x, y) = \frac{(y-1)B(x, y-1)}{x+y-1}. \quad (4.2)$$

Формула (4.2) позволяет второй аргумент бета-функции уменьшить на единицу. По свойству симметрии можно записать

$$B(x, y) = \frac{(x-1)B(x-1, y)}{x+y-1}, \quad x > 1.$$

Пусть теперь  $y = n$  ( $n$  — натуральное), тогда

$$B(x, n) = \frac{n-1}{x+n-1} \cdot \frac{n-2}{x+n-2} \cdot \frac{n-3}{x+n-3} \cdots \frac{1}{x+1} \cdot B(x, 1),$$

но

$$B(x, 1) = \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x},$$

откуда

$$B(x, n) = \frac{(n-1)!}{x(x+1)\dots(x+n-1)}.$$

Пусть, далее  $x = m$  ( $m$  — натуральное), тогда

$$B(m, n) = \frac{(n-1)!}{m(m+1)\dots(m+n-1)} = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

3. Другое выражение для бета-функции — сделаем в (4.1) замену, приняв

$$t = \frac{\xi}{1+\xi} \Rightarrow \xi = \frac{t}{1-t} \Rightarrow dt = \frac{d\xi}{(1+\xi)^2}.$$

Тогда

$$B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{\xi^{x-1}}{(1+\xi)^{x-1}} \frac{1}{(1+\xi)^{y-1}} \frac{d\xi}{(1+\xi)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\xi^{x-1} d\xi}{(1+\xi)^{x+y}}.$$

4. Отметим без доказательства еще одно свойство\*

$$B(x, 1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

---

\* Доказательство можно найти, например, в книге: *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. — СПб.: Лань, 2009.

## ЭЙЛЕРОВ ИНТЕГРАЛ ВТОРОГО РОДА

Это название было присвоено Лежандром замечательному интегралу:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

который сходится при любом  $x > 0$  и определяет функцию  $\Gamma$  — *гамма-функцию*. Покажем, что  $\Gamma(x)$  сходится при  $x > 0$ . В самом деле,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \underbrace{\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt}_{J_1} + \underbrace{\int_1^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt}_{J_2}.$$

Рассмотрим интеграл  $J_1$ . Точка  $t = 0$  — особая, если  $x < 1$ :

$$f(t) = e^{-t} t^{x-1} = \frac{e^{-t}}{t^{1-x}} \approx \frac{1}{t^{1-x}}, \quad t \rightarrow 0;$$

интеграл

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$$

сходится, если  $1 - x < 1 \Leftrightarrow x > 0$ , т. е.  $J_1$  сходится, если  $x > 0$ .

Рассмотрим интеграл  $J_2$ . Для любого  $x$ :

$$f(t) = e^{-t} t^{x-1} = \frac{t^{x-1}}{e^t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Это означает, что существует число  $b$  такое, что для  $t \geq b$  будет, например,

$$\frac{t^{x+1}}{e^t} < 1.$$

Можно считать, что это справедливо для  $b > 1$ , а тогда для  $t \geq b$ :

$$\frac{t^{x-1}}{e^t} \leq \frac{1}{t^2}.$$

Мы знаем, что интеграл

$$\int_b^{\infty} \frac{dt}{t^2}, \quad (b > 1)$$

сходится, следовательно,  $J_2$  сходится для любого  $x$ , а тогда  $\Gamma(x)$  сходится при  $x > 0$ .

Рассмотрим выражение  $x\Gamma(x)$ :

$$\begin{aligned} x\Gamma(x) &= x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x \int_0^{\infty} e^{-t} d\left(\frac{t^x}{x}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} d(t^x) = \\ &= \underbrace{e^{-t} t^x \Big|_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = \Gamma(x+1). \end{aligned}$$

Итак,

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x + 1). \quad (4.3)$$

Применяя формулу (4.3) повторно, получим

$$\begin{aligned} \Gamma(x + n) &= \Gamma((x + n - 1) + 1) = (x + n - 1)\Gamma(x + n - 1) = \\ &= (x + n - 1)(x + n - 2)\dots(x + 1)x\Gamma(x), \end{aligned}$$

в частности при  $x = 1$  будем иметь

$$\Gamma(n + 1) = n(n - 1)(n - 2)\dots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1),$$

но

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = 1,$$

поэтому

$$\Gamma(n + 1) = n!. \quad (4.4)$$

Справедливо следующее соотношение, связывающее между собой функции  $\Gamma$  и  $B$ :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}. \quad (4.5)$$

Отсюда, в частности, получаем, если  $0 < x < 1$ ,  $y = 1 - x$ :

$$B(x, 1 - x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1 - x)}{\Gamma(1)} \Rightarrow \Gamma(x)\Gamma(1 - x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}. \quad (4.6)$$

На рисунке 4.1 приведен график гамма-функции, построенный в Maple:

```
>p1:=plots[textplot]([0.5,11,`Γ(x)`],align={ABOVE,RIGHT});
p2:=plots[textplot]([5,0.5,`x`],align={ABOVE,RIGHT});
p3:=plot(GAMMA(x),x=-5..5,y=-10..11,color=black,
gridlines=true,font=[Helvetica,roman,14],
labelfont=[Helvetica,roman,14],labels=[`x`,``],
xtickmarks=10,ytickmarks=10);
plots[display]({p1,p2,p3});
```

Эйлеровы интегралы первого и второго рода определяются и для комплексных значений аргументов. В случае комплексных  $x$  и  $y$  интеграл (4.1) сходится, когда  $\operatorname{Re}(x) > 0$  и  $\operatorname{Re}(y) > 0$ .

Гамма-функция — одна из важнейших трансцендентных функций математического анализа, распространяющая понятие факториала  $z! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots z$  на случай комплексных значений  $z$ . Знание ее свойств необходимо для изучения многих других специальных функций, например цилиндрических.

Под гамма-функцией (или эйлеровым интегралом второго рода) понимается значение интеграла

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (4.7)$$

для всех комплексных значений  $z$ , для которых  $\operatorname{Re}(z) > 0$  или его аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость за исключением точек  $z = 0$ ,

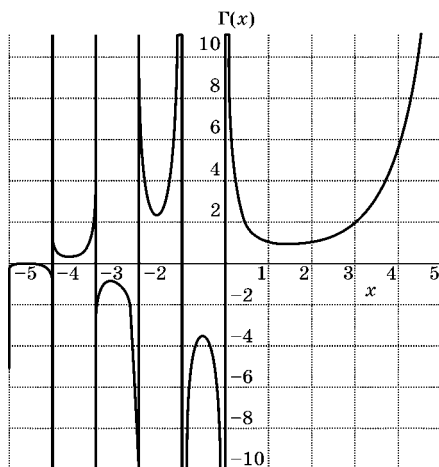


Рис. 4.1  
Гамма-функция

$-1, -2, -3, \dots$  Эти точки, в которых функция не определена, называются особыми точками. Можно показать, что гамма-функция (4.7) является регулярной функцией от  $z$  в полуплоскости  $\text{Re}(z) > 0$ . Кроме перечисленных свойств гамма-функции, отметим еще следующие:

$$\begin{aligned}
 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \Gamma(2z), \\
 \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\
 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}, \\
 \Gamma(-n) &= \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

С гамма-функцией тесно связана еще одна специальная функция — *пси-функция* или логарифмическая производная гамма-функции:

$$\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{d}{dz} \ln[\Gamma(z)], \quad \Psi(1) = \Gamma'(1) = -\gamma, \quad \gamma = 0,5772\dots,$$

где  $\gamma$  — постоянная Эйлера — Маскерони.

## 4.2. ИНТЕГРАЛ ВЕРОЯТНОСТИ

Интегралом вероятности  $\Phi(z)$  называется функция, которая для любых комплексных  $z$  определяется равенством

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt,
 \tag{4.9}$$

где интегрирование производится по произвольному пути, соединяющему начало координат с точкой  $t = z$ . Так как подынтегральное выражение является

целой функцией комплексного переменного  $t$ , вид пути интегрирования не играет роли и можно считать, что интегрирование производится вдоль отрезка прямой, соединяющей точки  $t = 0$  и  $t = z$ . В таком случае, как известно\*,  $\Phi(z)$  представляет целую функцию, которая может быть разложена в степенной ряд, сходящийся при любых значениях переменного  $z$ . Для того чтобы получить это разложение, достаточно подставить в (4.9) соответствующий ряд для экспоненты и проинтегрировать его почленно. Мы получим тогда

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{k!(2k+1)}, \quad |z| < \infty, \quad (4.10)$$

так как процесс интегрирования степенного ряда является законным.

Из формулы (4.10) видно, что  $\Phi(z)$  — нечетная функция от  $z$ .

Интеграл вероятности не может быть выражен через элементарные функции, однако его производная — элементарная функция:

$$\Phi'(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}.$$

В частности, при вещественных значениях аргумента  $z = x$  функция  $\Phi(x)$  представляет собой вещественную монотонно возрастающую функцию, так как

$$\Phi'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} > 0, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Значение функции при нуле  $\Phi(0) = 0$ , а при возрастании  $x$  быстро приближается к предельному значению  $\Phi(\infty) = 1$ , ибо

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Разница между  $\Phi(x)$  и этим предельным значением может быть представлена в форме

$$1 - \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt, \quad x > 0. \quad (4.11)$$

Получим асимптотическую формулу. Для этого воспользуемся формулой (4.11) и преобразуем входящий в нее интеграл с помощью интегрирования по частям. Мы находим последовательно

$$\begin{aligned} 1 - \Phi(x) &= -\frac{2}{2\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \frac{1}{t} d(e^{-t^2}) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{e^{-t^2}}{t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} + \int_x^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{x} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{x} [1 + r(x)], \quad x > 0, \end{aligned}$$

---

\* Интеграл  $\varphi(z) = \int_a^z f(t) dt$ , взятый по произвольному пути, принадлежащему односвязной области, в которой  $f(t)$  регулярна, есть регулярная функция в этой области. См., например: *Смирнов, В. И.* Курс высшей математики. Т. 3; Ч. 2. — Гостехиздат, 1956.

где

$$r(x) = -xe^{x^2} \int_x^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt.$$

Оценим  $r(x)$ :

$$|r(x)| \leq xe^{x^2} \int_x^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt = \int_x^{\infty} \frac{e^{x^2-t^2} x}{t^2} dt (t \geq x) \leq \int_x^{\infty} \frac{e^{x^2-t^2} t}{x^2} dt = -\frac{e^{x^2}}{x^2} \frac{e^{-t^2}}{2} \Big|_{t=x}^{t=\infty} = \frac{1}{2x^2}.$$

Таким образом, будем иметь

$$|r(x)| \leq \frac{1}{2x^2}.$$

Следовательно, можно записать

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{x} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right], \quad x \rightarrow +\infty.$$

График функции  $\Phi(x)$  изображен на рисунке 4.2, построенном в Maple:

```
>p1:=plots[textplot]([0.1,1,"Φ(x)",align={ABOVE,RIGHT}):
p2:=plots[textplot]([3.95,0.05,"x",align={ABOVE,RIGHT}):
p3:=plot(erf(x),x=-4..4,color=black,labels=["`,`"],
gridlines=true,font=[Helvetica,roman,14],
labelfont=[Helvetica,roman,14],
xtickmarks=8,ytickmarks=10):
plots[display]({p1,p2,p3});
```

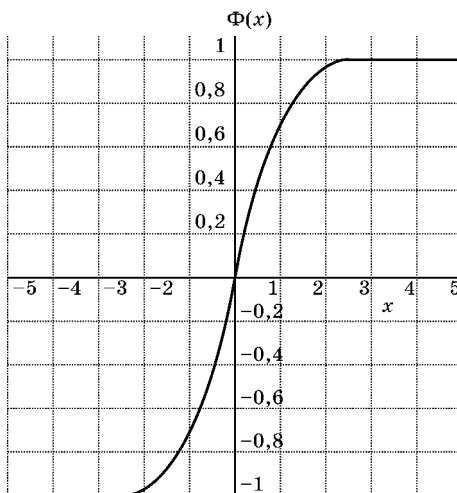


Рис. 4.2  
Интеграл вероятности

Интеграл вероятности встречается в различных разделах прикладной математики, в частности в теории вероятностей и теории ошибок, в математической теории теплопроводности и в других разделах математической физики.

### 4.3. ФУНКЦИЯ БЕССЕЛЯ

Многие задачи приводят к необходимости решать уравнение вида

$$u'' + \frac{1}{z}u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)u = 0. \quad (4.12)$$

К такому уравнению мы придем, например, при решении задач методом разделения переменных, если будем пользоваться цилиндрическими (или полярными) координатами (задача о колебании круглой мембраны, об остывании круглого цилиндра и др.).

Уравнение (4.12) называется *уравнением Бесселя*. Решения этого уравнения, не равные тождественно нулю, называются *цилиндрическими* (или *бесселевыми*) *функциями*. Здесь  $z$  — комплексное переменное,  $\nu$  — некоторый параметр, вообще говоря, комплексный.

Один класс цилиндрических функций мы построим следующим образом. Будем искать решение уравнения (4.12) в виде обобщенного степенного ряда:

$$u = z^\sigma(a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots), \quad (4.13)$$

где  $a_0 \neq 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} zu' &= z^\sigma[a_0\sigma + a_1(\sigma + 1)z + a_2(\sigma + 2)z^2 + \dots]; \\ z^2u'' &= z^\sigma[a_0\sigma(\sigma - 1) + a_1(\sigma + 1)\sigma z + a_2(\sigma + 1)(\sigma + 2)z^2 + \dots]. \end{aligned}$$

Перепишем уравнение (4.12) в виде

$$z^2u'' + zu' + (z^2 - \nu^2)u = 0; \quad (4.14)$$

подставим значения  $u$ ,  $zu'$  и  $z^2u''$  в уравнение (4.14) и соберем члены с одинаковыми степенями  $z$ :

$$\begin{aligned} z^\sigma[a_0\sigma^2 - a_0\nu^2] + z^{\sigma+1}[a_1(\sigma + 1)^2 - a_1\nu^2] + z^{\sigma+2}[a_2(\sigma + 2)^2 - a_2\nu^2 + a_0] + \dots \\ \dots + z^{\sigma+n}[a_n(\sigma + n)^2 - a_n\nu^2 + a_{n-2}] + \dots \equiv 0. \end{aligned}$$

Чтобы ряд (4.13) был решением уравнения (4.14), необходимо выполнение равенств

$$\begin{aligned} a_0[\sigma^2 - \nu^2] &= 0; \\ a_1[(\sigma + 1)^2 - \nu^2] &= 0; \\ a_2[(\sigma + 2)^2 - \nu^2] + a_0 &= 0; \\ &\dots \\ a_n[(\sigma + n)^2 - \nu^2] + a_{n-2} &= 0; \\ &\dots \end{aligned}$$

Из первого равенства находим  $\sigma = \pm\nu$ , так как  $a_0 \neq 0$ . Возьмем  $\sigma = \nu$ . Тогда из второго равенства находим  $a_1 = 0$ . Далее,

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{(\sigma + n)^2 - \nu^2} = \frac{-a_{n-2}}{(2\nu + n)n}, \quad n = 2, 3, \dots$$



Очевидно  $a_{2k+1} = 0$  для всех целых неотрицательных  $k$ , а

$$a_{2k} = \frac{-a_{2k-2}}{2^2(v+k)k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}(v+k)(v+k-1)\dots(v+1)k!}.$$

Полагая

$$a_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(v+1)}$$

и используя формулы (4.3) и (4.4), получим

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+v} \Gamma(k+1) \Gamma(k+v+1)}.$$

Таким образом, мы построили одно формальное решение уравнения (4.12) в виде обобщенного степенного ряда:

$$u = u_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+v}}{k! \Gamma(k+v+1)}, \quad (4.15)$$

где  $z$  — комплексное переменное, принадлежащее плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$ :  $|z| < \infty$ ,  $|\arg z| < \pi$ ;  $v$  — параметр, который может принимать любые вещественные или комплексные значения. Ограничение, наложенное на  $z$ , необходимо для однозначности функции  $z^v$  и может быть отброшено, если  $v$  — целое число.

Докажем, что ряд (4.15) сходится. Обозначим общий член этого ряда

$$u_k = \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+v}}{k! \Gamma(k+v+1)}.$$

Будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| &= \left| \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+2+v} k! \Gamma(k+v+1)}{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+v} (k+1)! \Gamma(k+v+2)} \right| = \left| \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{(k+1)(k+v+1)} \right|; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{(k+1)(k+v+1)} \right| &= 0, \quad |z| < \infty. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Следовательно, по признаку Даламбера ряд (4.15) сходится при любых конечных  $z$ .

В плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$  каждый член ряда (4.15) — однозначная и регулярная функция комплексного переменного  $z$ . Данный ряд сходится при любых  $z$  и  $v$ , причем в области  $|z| < R$  и  $|v| < N$  ( $R, N$  — произвольно большие фиксированные числа) сходимость равномерна по отношению к каждому из переменных. Действительно, начиная с достаточно большого  $k$ , отношение

модулей последующего члена ряда к предыдущему, равное на основании (4.16) величине

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \left| \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{(k+1)(k+v+1)} \right| \leq \frac{R^2}{4(k+1)(k+1-N)},$$

не будет превосходить некоторой правильной положительной дроби  $q$ , не зависящей от  $z$  и  $v$ . Отсюда согласно известному признаку сходимости следует, что рассматриваемый ряд сходится равномерно в указанной области\*.

Так как члены ряда представляют собой регулярные функции в плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$ , то сумма ряда определяет некоторую функцию комплексного переменного  $z$ , регулярную в рассматриваемой области. Эта функция называется *функцией Бесселя первого рода с индексом  $v$*  и обозначается символом  $J_\nu(z)$ . Таким образом,

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}, \quad |z| < \infty, \quad |\arg z| < \pi. \quad (4.17)$$

Покажем, что этот ряд в его области сходимости является фактическим решением уравнения (4.12). Имеем\*\*:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}; \\ u' &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+\nu) \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu-1}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}; \\ u'' &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+\nu)(2k+\nu-1) \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu-2}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}. \end{aligned}$$

Умножаем функцию  $u$  на  $\left(1 - \frac{v^2}{z^2}\right)$ , функцию  $u'$  на  $\frac{1}{z}$ , функцию  $u''$  на 1 и складываем, получим

$$\begin{aligned} L(u) &\equiv u'' + \frac{1}{z}u' + \left(1 - \frac{v^2}{z^2}\right)u = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [(2k+\nu)(2k+\nu-1) + (2k+\nu) - v^2] z^{2k+\nu-2}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)} + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)}. \end{aligned}$$

\* Функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$  сходится равномерно в некоторой области, если для всякого  $z$ , принадлежащего этой области и  $k \geq m$ , выполняется неравенство  $|u_{k+1}/u_k| \leq q < 1$ , где  $q$  не зависит от  $z$ .

\*\* Равномерно сходящийся ряд регулярных функций можно дифференцировать почленно.

Далее имеем

$$[(2k + v)(2k + v - 1) + (2k + v) - v^2] = 2^2k(k + v).$$

Тогда

$$\begin{aligned} L(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k(k+v) z^{2k+v-2}}{2^{2k+v-2} k! \Gamma(k+v+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+v}}{2^{2k+v} k! \Gamma(k+v+1)} = \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ (k-1) \rightarrow k}}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+v-2}}{2^{2k+v-2} (k-1)! \Gamma(k+v)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+v}}{2^{2k+v} k! \Gamma(k+v+1)} = \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+v}}{2^{2k+v} k! \Gamma(k+v+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+v}}{2^{2k+v} k! \Gamma(k+v+1)} \equiv 0. \end{aligned}$$

#### 4.4. ФУНКЦИЯ ВЕБЕРА

По определению цилиндрическая функция есть произвольное решение дифференциального уравнения второго порядка (4.12), поэтому общее ее выражение содержится в формуле

$$u = J_\nu(z) = C_1 u_1(z) + C_2 u_2(z),$$

где  $u_1$  и  $u_2$  — какие-нибудь линейно независимые решения уравнения (4.12);  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные, являющиеся, вообще говоря, произвольными функциями параметра  $\nu$ . Легко получить общее выражение цилиндрической функции для случая, когда  $\nu$  отлично от целого числа. Действительно, для того чтобы записать общий интеграл уравнения (4.12), необходимо получить второе линейно независимое решение. Поскольку уравнение (4.12) не меняется при замене  $\nu$  на  $-\nu$ , то функция  $J_{-\nu}(z)$  также является решением уравнения (4.12), т. е. второе решение может быть записано так

$$u_2 = J_{-\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)}. \quad (4.18)$$

Рассмотрим поведение функций (4.17) и (4.18) в окрестности начала координат. Если  $\nu$  не равно целому числу, асимптотическое поведение рассматриваемых решений при  $z \rightarrow 0$  будет

$$J_\nu(z) \approx \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, \quad |z| \rightarrow 0; \quad (4.19)$$

$$J_{-\nu}(z) \approx \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}}{\Gamma(-\nu+1)}, \quad |z| \rightarrow 0. \quad (4.20)$$

Эти формулы верны для всех  $\nu$  за исключением тех значений  $\nu$ , когда знаменатель обращается в бесконечность, т. е.  $\nu \neq -1, -2, -3, \dots$  для (4.19)

и  $\nu \neq 1, 2, 3, \dots$  для (4.20). Таким образом, при  $\nu \neq \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  справедливы обе формулы. Далее

$$\frac{J_\nu(z)}{J_{-\nu}(z)} = \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu} \frac{\Gamma(-\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \neq \text{const}, \nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Таким образом, функции (4.17) и (4.18) будут линейно независимы, если  $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , т. е. общее выражение цилиндрической функции при условии, что  $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , будет таким

$$u = A_\nu J_\nu(z) + B_\nu J_{-\nu}(z). \quad (4.21)$$

Рассмотрим теперь случай, когда  $\nu = n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). В этом случае

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!}, |z| < \infty, n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.22)$$

Функция (4.22) регуляерна на всей плоскости без разреза. Это целая функция. Далее

$$J_{-n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}}{k!\Gamma(k-n+1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}}{k!\Gamma(k-n+1)},$$

поскольку  $\Gamma(k-n+1) = \infty$  для всех  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . В последней сумме произведем замену переменной суммирования  $k = s+n$ . Получим

$$J_{-n}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} \left(\frac{z}{2}\right)^{2s+n}}{s!(s+n)!} = (-1)^n J_n(z).$$

Таким образом, бесселевы функции с целым индексом линейно зависимы:

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Поэтому выражение (4.21) не является общим интегралом уравнения (4.12) в этом случае. Следовательно, для целых  $n$  надо построить еще одно решение уравнения (4.12).

Будем предполагать, что  $\nu$  не является целым. Введем в рассмотрение функцию Бесселя второго рода  $Y_\nu(z)$ , которую для произвольных  $z$ , принадлежащих плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$ , определим выражением

$$u = u_3 = Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}, |z| < \infty, |\arg z| < \pi. \quad (4.23)$$

Это выражение для  $\nu$  не целого — цилиндрическая функция, линейно независимая с функцией Бесселя (4.17). Функция (4.23) — *цилиндрическая функция второго рода* или *функция Вебера*. В некоторых работах, посвященных теории функций Бесселя, для обозначения этой функции используется вместо  $Y_\nu(z)$  символ  $N_\nu(z)$ , а сама функция называется *функцией Неймана*.

При  $\nu$ , равном целому числу, правая часть рассматриваемого выражения (4.23) приобретает неопределенный вид, и мы условимся понимать под значением функции в этом случае предел

$$Y_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(z).$$

Так как числитель и знаменатель в (4.23) суть целые функции  $\nu$ , рассматриваемый предел существует и может быть вычислен по правилу Лопиталья, применение которого дает

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[ \frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[ \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \right\}. \quad (4.24)$$

Из определения функции  $Y_\nu(z)$  следует, что эта функция регулярна в плоскости с разрезом  $(-\infty, 0)$ , а при фиксированном  $z$  представляет собой целую функцию параметра  $\nu$ . Выражение (4.23) удовлетворяет уравнению Бесселя. Докажем, что функция  $Y_n(z)$  удовлетворяет уравнению Бесселя. Имеем:

$$L(J_\nu) \equiv J_\nu'' + \frac{1}{z} J_\nu' + \left( 1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) J_\nu \equiv 0;$$

$$L(J_{-\nu}) \equiv J_{-\nu}'' + \frac{1}{z} J_{-\nu}' + \left( 1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) J_{-\nu} \equiv 0.$$

Продифференцируем каждое из этих тождеств по  $\nu$ . Получим:

$$L\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right) - \frac{2\nu}{z^2} J_\nu \equiv 0;$$

$$L\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right) - \frac{2\nu}{z^2} J_{-\nu} \equiv 0.$$

Умножим теперь первое соотношение на 1, а второе — на  $(-1)^n$  и вычтем одно из другого. Получим

$$L\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right) - (-1)^n L\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right) - \frac{2\nu}{z^2} [J_\nu - (-1)^n J_{-\nu}] \equiv 0.$$

Разделим теперь последнее соотношение на  $\pi$  и перейдем к пределу при  $\nu \rightarrow n$ . Получим

$$L(Y_n) \equiv 0,$$

это и доказывает, что функция  $Y_n(z)$  — решение уравнения (4.12).

Решения  $u_1 = J_\nu(z)$  и  $u_3 = Y_\nu(z)$  линейно независимы между собой. Для  $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  этот результат является следствием линейной независимости решений  $J_\nu(z)$  и  $J_{-\nu}(z)$ . Линейная независимость для  $\nu = n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \infty$ ) вытекает из сопоставления поведения рассматриваемых функций при  $z \rightarrow 0$ .

Таким образом, общее выражение цилиндрической функции, пригодное при любых значениях  $\nu$ , будет

$$u = Z_\nu(z) = C_1 J_\nu(z) + C_2 Y_\nu(z).$$

Введем в рассмотрение еще две новые функции:

$$\begin{aligned} u_4 &= H_v^{(1)} = J_v(z) + iY_v(z); \\ u_5 &= H_v^{(2)} = J_v(z) - iY_v(z). \end{aligned}$$

Это цилиндрические функции третьего рода (функции Ханкеля). Очевидно, эти функции линейно независимы с функцией первого рода и между собой. Они определены для  $|z| < \infty$ ,  $|\arg z| < \pi$ . Все цилиндрические функции при фиксированном  $z$  есть целые функции параметра  $v$ .

#### 4.5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ВЕБЕРА В ВИДЕ РЯДА

Ряд для функции Вебера  $Y_v(z)$ , где  $v$  — не целое, получается непосредственно из формул (4.17), (4.18) и (4.23). Для того чтобы получить разложение в ряд функции  $Y_n(z)$ , достаточно воспользоваться формулой (4.24) и вычислить производные по значку  $v$  исходя из разложения (4.17), причем ввиду соотношения

$$Y_{-n}(z) = (-1)^n Y_n(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

являющегося следствием (4.24), можно ограничиться рассмотрением случая целых положительных  $n = 0, 1, 2, \dots$

Так как ряд (4.17) сходится равномерно по отношению к  $v$ , мы можем дифференцировать его почленно, получая\*

$$\left[ \frac{\partial J_v(z)}{\partial v} \right]_{v=n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!} \left\{ \ln \frac{z}{2} - \psi(k+n+1) \right\},$$

где  $\psi(z)$  — логарифмическая производная гамма-функции. Аналогично имеем

$$\frac{\partial J_{-v}(z)}{\partial v} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-v}}{k!\Gamma(k-v+1)} \left\{ -\ln \frac{z}{2} + \psi(k-v+1) \right\}.$$

При  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  и  $v \rightarrow n$  имеем  $\Gamma(k-v+1) \rightarrow \infty$ ,  $\psi(k-v+1) \rightarrow \infty$ , поэтому первые  $n$  членов ряда принимают неопределенный вид. Воспользовавшись формулами (4.4), (4.6), получим для таких  $k$ :

$$\lim_{v \rightarrow n} \frac{1}{\Gamma(k-v+1)} = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, \dots, (n-1); \\ \frac{1}{(k-n)!}, & k = n, (n+1), \dots, \infty. \end{cases}$$

\* Переход к пределу при  $v \rightarrow n$  под знаком суммы законен, так как ряд, полученный почленным дифференцированием равномерно сходящегося ряда регулярных функций, сходится равномерно.

Имеем далее

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \Rightarrow \frac{1}{\Gamma(1-z)} = \frac{\Gamma(z)\sin(\pi z)}{\pi} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\Gamma'(1-z)}{\Gamma^2(1-z)} = \frac{1}{\pi} [\Gamma'(z)\sin(\pi z) + \pi \cos(\pi z)\Gamma(z)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\Psi(1-z)}{\Gamma(1-z)} = \frac{1}{\pi} [\Gamma'(z)\sin(\pi z) + \pi \cos(\pi z)\Gamma(z)].\end{aligned}$$

Будем здесь предполагать, что  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ,  $z = n-k$ . Тогда из последней формулы получаем

$$\lim_{v \rightarrow n} \frac{\Psi(k-v+1)}{\Gamma(k-v+1)} = \frac{1}{\pi} \left[ \Gamma'(n-k) \underbrace{\sin(\pi(n-k))}_{=0} + \pi \cos(\pi(n-k))\Gamma(n-k) \right] = (-1)^{n-k} (n-k-1)!.$$

Таким образом,

$$\lim_{v \rightarrow n} \frac{\Psi(k-v+1)}{\Gamma(k-v+1)} = \begin{cases} (-1)^{n-k} (n-k-1)!, & k = 0, 1, 2, \dots, (n-1); \\ \frac{\Psi(k-n+1)}{\Gamma(k-n+1)}, & k = n, (n+1), \dots, \infty. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\left[ \frac{\partial J_{-v}(z)}{\partial v} \right]_{v=n} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} (n-k-1)! (-1)^k}{k!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k-n} - \\ &- \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-n)!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k-n} \left\{ \ln \frac{z}{2} - \Psi(k-n+1) \right\}\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\left[ \frac{\partial J_{-v}(z)}{\partial v} \right]_{v=n} &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k-n} - \\ &- (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k+n} \left\{ \ln \frac{z}{2} - \Psi(k+1) \right\}.\end{aligned}$$

Таким образом, можно записать (согласно (4.24)):

$$\begin{aligned}Y_n(z) &= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k-n} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k+n} \left\{ 2 \ln \frac{z}{2} - \Psi(k+n+1) - \Psi(k+1) \right\},\end{aligned} \tag{4.25}$$

причем  $|z| < \infty$ ,  $|\arg z| < \pi$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Если принять во внимание, что  $\sum_{k=0}^{-1} \equiv 0$ , то окончательный результат верен и для  $n = 0$ . Можно также записать

$$Y_n(z) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} + \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln \frac{z}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!} [\psi(k+n+1) + \psi(k+1)].$$

Полученный результат показывает, что функция Вебера есть регулярная функция в плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси. Далее  $Y_n(z)$  есть решение, линейно независимое от решения  $J_n(z)$ .

Из (4.25) вытекает, что при  $z \rightarrow 0$  справедливы асимптотические формулы:

$$Y_0(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{2}; \quad Y_n(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

показывающие, что  $Y_n(z) \rightarrow \infty$ , когда  $z \rightarrow 0$ .

Отметим также формулы:

$$J_0(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} 1; \quad J_n(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Следовательно, функция  $J_n(z)$  ограничена, когда  $z \rightarrow 0$ .

Асимптотическое поведение функций Ханкеля при  $z \rightarrow 0$  такое:

$$H_n^{(1)}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} iY_n(z), \quad H_n^{(2)}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} -iY_n(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, ограниченной при  $z \rightarrow 0$  остается только функция Бесселя первого рода.

#### 4.6. РЕКУРРЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

Будем исходить из представления (4.17):

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}, \quad |z| < \infty, \quad |\arg z| < \pi.$$

Умножим это равенство на  $z^\nu$  и продифференцируем по  $z$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} z^\nu J_\nu(z) &= \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+2\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(k+\nu) z^{2k+2\nu-1}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)} = \\ &= z^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+\nu-1} (k+\nu)}{k! 2^{2k+\nu-1} \Gamma(k+\nu+1)} = z^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu-1}}{k! \Gamma(k+\nu)} = z^\nu J_{\nu-1}(z). \end{aligned}$$



Таким образом,

$$\frac{d}{dz} z^{\nu} J_{\nu}(z) = z^{\nu} J_{\nu-1}(z). \quad (4.26)$$

Аналогично получаем

$$\frac{d}{dz} z^{-\nu} J_{\nu}(z) = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z). \quad (4.27)$$

Продифференцировав в левых частях (4.26) и (4.27), получим:

$$z^{\nu} \frac{d}{dz} J_{\nu}(z) + \nu z^{\nu-1} J_{\nu}(z) = z^{\nu} J_{\nu-1}(z); \quad (4.28)$$

$$z^{-\nu} \frac{d}{dz} J_{\nu}(z) - \nu z^{-\nu-1} J_{\nu}(z) = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z). \quad (4.29)$$

Откуда

$$\frac{d}{dz} J_{\nu}(z) + \frac{\nu}{z} J_{\nu}(z) = J_{\nu-1}(z); \quad (4.30)$$

$$\frac{d}{dz} J_{\nu}(z) - \frac{\nu}{z} J_{\nu}(z) = -J_{\nu+1}(z). \quad (4.31)$$

Складывая и вычитая равенства (4.30) и (4.31), получим

$$2 \frac{d}{dz} J_{\nu}(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z); \quad (4.32)$$

$$\frac{2\nu}{z} J_{\nu}(z) = J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z). \quad (4.33)$$

Функции Бесселя второго и третьего рода удовлетворяют тем же рекуррентным соотношениям, что и функции первого рода, т. е. соотношениям (4.26)–(4.33). При  $\nu$ , отличном от целого числа, справедливость этих формул для функций Бесселя второго рода (функций Вебера) вытекает из определения функции Вебера и соответствующих формул для функций первого рода. Для целого  $\nu$  требуемый результат следует из непрерывности рассматриваемых функций по отношению к индексу  $\nu$ , что позволяет осуществить в соотношениях (4.26)–(4.33) предельный переход при  $\nu \rightarrow n$ . Отметим еще формулы:

$$\left( \frac{d}{z dz} \right)^m z^{\nu} J_{\nu}(z) = z^{\nu-m} J_{\nu-m}(z); \quad (4.34)$$

$$\left( \frac{d}{z dz} \right)^m z^{-\nu} J_{\nu}(z) = (-1)^m z^{-\nu-m} J_{\nu+m}(z). \quad (4.35)$$

Формулы (4.34) и (4.35) получаются путем повторного применения равенств (4.26) и (4.27). Положив  $\nu = 0$  из (4.32) и (4.33), получим

$$\frac{d}{dz} J_0(z) = J_{-1}(z); \quad J_{-1}(z) = -J_1(z).$$

#### 4.7. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Цилиндрические функции допускают простые интегральные представления, которые бывают двух типов: интегралы по некоторому отрезку (определенные интегралы) и контурные интегралы. Контурные интегралы удобнее, требуют меньше ограничений, но они более сложны. Определенные интегралы наиболее часто встречаются в приложениях, поэтому мы ограничимся рассмотрением формул этого типа.

Одно из наиболее простых интегральных представлений для функций Бесселя принадлежит Пуассону. Будем исходить из формул (4.1) и (4.5):

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt;$$

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Возьмем в этих формулах  $x = k + 1/2$ ,  $y = \nu + 1/2$ . Тогда

$$\int_0^1 s^{k-\frac{1}{2}} (1-s)^{\nu-\frac{1}{2}} ds = \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+\nu+1)}, \quad k=0, 1, 2, \dots, \infty; \operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}.$$

Делаем замену  $s = t^2 \Rightarrow ds = 2t dt$ , тогда

$$2 \int_0^1 t^{2k-1} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} t dt = \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+\nu+1)}.$$

Откуда

$$\frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)} = \frac{2}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 t^{2k} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt.$$

Теперь можно записать

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu} \frac{2}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 t^{2k} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt, \quad \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Меняем порядок суммирования и интегрирования, тогда

$$J_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (zt)^{2k}}{k! \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) 2^{2k}}. \quad (4.36)$$

Воспользуемся формулой (4.8), в которой примем  $z = k + 1/2$ . Тогда

$$2^{2k} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \Gamma(k + 1) = \sqrt{\pi} \Gamma(2k + 1)$$

или

$$2^{2k} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) k! = \sqrt{\pi} (2k)!$$

Тогда из (4.36) находим

$$J_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (zt)^{2k}}{(2k)!}}_{=\cos(zt)}.$$

Окончательно получаем

$$J_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(zt) dt, \quad |\arg z| < \pi, \quad \operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}. \quad (4.37)$$

Так как подынтегральная функция четная, то формулу (4.37) можно переписать в виде

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^{-1}} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(zt) dt, \quad |\arg z| < \pi, \quad \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}. \quad (4.38)$$

Применяя к формуле (4.38) подстановку  $t = \cos(\vartheta)$ ,  $dt = -\sin(\vartheta)d\vartheta$ , при которой  $(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} = \sin^{2\nu}(\vartheta)/\sin(\vartheta)$  и  $\vartheta = \pi$  при  $t = -1$ ;  $\vartheta = 0$  при  $t = 1$ , получаем

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^0} \int_0^\pi \sin^{2\nu}(\vartheta) \cos(z \cos \vartheta) dt, \quad |\arg z| < \pi, \quad \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}. \quad (4.39)$$

Формула (4.38) или равносильная ей формула (4.39) — *интегральное представление Пуассона*.

Отметим еще основные интегральные представления для функций Ханкеля:

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= \frac{e^{\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\operatorname{ch}(t)-\nu t} dt, \quad \operatorname{Im} z > 0; \\ H_\nu^{(2)}(z) &= -\frac{e^{\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz\operatorname{ch}(t)-\nu t} dt, \quad \operatorname{Im} z < 0, \end{aligned} \quad (4.40)$$

$\nu$  — любое.

**Примеры использования интегрального представления Пуассона.**

Примем в (4.37)  $\nu = 0$ ,  $z = x$  — вещественное число. Тогда

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \cos(xt) dt, \quad -\infty < x < \infty. \quad (4.41)$$

Отсюда, в частности, следует

$$|J_0(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{\pi} \arcsin t \Big|_0^1 = 1.$$

Таким образом, для вещественных значений  $x$ :

$$|J_0(x)| \leq 1.$$

Примем теперь  $\nu = n + 1/2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  Тогда

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z) = \frac{2 \left(\frac{z}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi n!}} \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(zt) dt.$$

Отсюда следует, что функции Бесселя с положительным половинным индексом выражаются через элементарные функции. Но, зная функции Бесселя с положительным половинным индексом, с помощью рекуррентных соотношений легко получить и функции с отрицательным половинным индексом. Например,

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{2 \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \cos(zt) dt = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(z).$$

Таким образом,

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(z).$$

В качестве упражнения предлагаем самостоятельно получить формулы:

$$\begin{aligned} J_{-\frac{1}{2}}(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos(z); \\ Y_{\frac{1}{2}}(z) &= -J_{-\frac{1}{2}}(z) = -\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos(z); \\ H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(z) &= -i \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{iz}, \quad H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(z) = i \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-iz}. \end{aligned}$$

Лиувиллем доказано, что случай полуцелого индекса является единственным, когда цилиндрические функции приводятся к элементарным.

В качестве еще одного примера применения интегрального представления для цилиндрических функций рассмотрим вычисление интеграла

$$I = \int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx) dx, \quad a > 0, \quad b \geq 0. \quad (4.42)$$

Для этого воспользуемся формулой (4.41) и в интеграле сделаем замену  $t = \sin \varphi$ . Будем иметь

$$J_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin(\varphi)) d\varphi.$$

Тогда интеграл (4.42) примет вид

$$I = \int_0^{\infty} e^{-ax} dx \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(bx \sin(\varphi)) d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(bx \sin(\varphi)) dx.$$

Воспользуемся известной формулой:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad a > 0, \quad b \geq 0.$$

Тогда

$$I = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{a^2 + b^2 \sin^2(\varphi)} = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{a^2}{\sin^2(\varphi)} + b^2} \frac{d\varphi}{\sin^2(\varphi)} =$$

(делаем замену  $\operatorname{ctg} \varphi = t$ )

$$= -\frac{2a}{\pi} \int_{\infty}^0 \frac{dt}{a^2 + b^2 + a^2 t^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d(at)}{a^2 + b^2 + (at)^2} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{at}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Итак,

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

#### 4.8. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ АРГУМЕНТА

Цилиндрические функции обладают простыми асимптотическими представлениями, удобными для аппроксимации этих функций при больших по модулю значениях  $z$  и фиксированном значении индекса  $\nu$ . Главные члены этих формул можно получить исходя из дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют рассматриваемые функции. Более точные выражения можно получить исходя из интегральных представлений. Мы здесь не будем рассматривать строгий вывод асимптотических представлений, а ограничимся следующими интуитивными соображениями.

Рассмотрим уравнение Бесселя (4.12):

$$u'' + \frac{1}{z}u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)u = 0.$$

Сделаем подстановку

$$u = \frac{w}{\sqrt{z}} \Rightarrow u' = \frac{w'}{\sqrt{z}} - \frac{w}{2\sqrt{z^3}} \Rightarrow u'' = \frac{w''}{\sqrt{z}} - \frac{w'}{\sqrt{z^3}} + \frac{3w}{4\sqrt{z^5}}.$$

Уравнение Бесселя примет вид

$$w'' + \left[1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{z^2}\right]w = 0. \quad (4.43)$$

Если  $\nu$  ограничено,  $|z| \rightarrow \infty$ , то вместо уравнения (4.43) можно рассматривать уравнение

$$w'' + w \cong 0.$$

Откуда

$$w \cong A \cos(z) + B \sin(z) = Ce^{iz} + De^{-iz} \Rightarrow u \cong \frac{A \cos(z) + B \sin(z)}{\sqrt{z}} = \frac{Ce^{iz} + De^{-iz}}{\sqrt{z}}, \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Коэффициенты  $A, B, C, D$  зависят от индекса  $\nu$ , а также от вида рассматриваемой цилиндрической функции.

Можно получить следующие асимптотические формулы [19]:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\nu^{(1)}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i\left(z - (2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right)} + O\left(\frac{1}{|z|^{3/2}}\right); \\ \mathbf{H}_\nu^{(2)}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i\left(z - (2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right)} + O\left(\frac{1}{|z|^{3/2}}\right), \end{aligned}$$

при этом  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $|\arg z| \leq \pi - \delta$ ,  $\nu$  — ограничено.

Из определения функций Ханкеля следует

$$\mathbf{J}_\nu(z) = \frac{\mathbf{H}_\nu^{(1)}(z) + \mathbf{H}_\nu^{(2)}(z)}{2}; \quad \mathbf{Y}_\nu(z) = \frac{\mathbf{H}_\nu^{(1)}(z) - \mathbf{H}_\nu^{(2)}(z)}{2}.$$

Тогда

$$\mathbf{J}_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - (2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{|z|^{3/2}}\right); \quad (4.44)$$

$$\mathbf{Y}_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - (2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{|z|^{3/2}}\right). \quad (4.45)$$

Таким образом, если функции Ханкеля на бесконечности имеют экспоненциальный характер, то функции  $\mathbf{J}_\nu(z)$  и  $\mathbf{Y}_\nu(z)$  на бесконечности описываются формулами (4.44) и (4.45). В частности, для вещественных  $z = x$  и  $\nu = 0$

$$\mathbf{J}_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Далее  $J_1(x) = -J_0'(x)$ , следовательно, нули функции  $J_1(x)$  совпадают с экстремумами функции  $J_0(x)$ . Отсюда, в частности, вытекает, что уравнение  $J_0(x) = 0$  имеет бесчисленное множество корней. На рисунке 4.3 представлены графики бесселевых функций, полученные в Maple.

```
>p0:=
plots[textplot]([0.5,1,"J[0](x)",align={ABOVE,RIGHT}):
p1:=
plots[textplot]([8,1,"J[1](x)",align={ABOVE,RIGHT}):
p:=plots[textplot]([23.5,0.05,`x`],align={ABOVE,RIGHT}):
pp0:=
plot(BesselJ(0,x),x=-5..25,color=black,labels=[``,``],
tickmarks=[10,10],legend="J[0](x)"):
pp1:=
plot(BesselJ(1,x),x=-5..25,color=blue,linestyle=4,
labels=[``,``],tickmarks=[10,10],legend="J[1](x)"):
plots[display]({p,p0,p1,pp0,pp1},gridlines=true,
font=[Courier,roman,14],labelfont=[Helvetica,roman,14],
xtickmarks=10,ytickmarks=10);
```

На рисунке 4.4 представлена поверхность  $z = f(x, v) = J_v(x)$ , которая показывает, как изменяются функции  $J_v(x)$ , если непрерывно изменять переменные  $x$  и  $v$ .

```
>plot3d(BesselJ(nu,x),nu=0..10,x=0..25,numpoints=1200,
labelfont=[Times,roman,14],font=[Times,roman,14],
shading=none,tickmarks=[10,10,10],axes=frame);
```

Для  $v = 0$  функция  $J_0(x)$  равна единице при  $x = 0$ . Это единственная функция Бесселя, имеющая при  $x = 0$  конечное значение, не равное нулю. Для  $v > 0$  все функции  $J_v(x)$  равны нулю при  $x = 0$ .

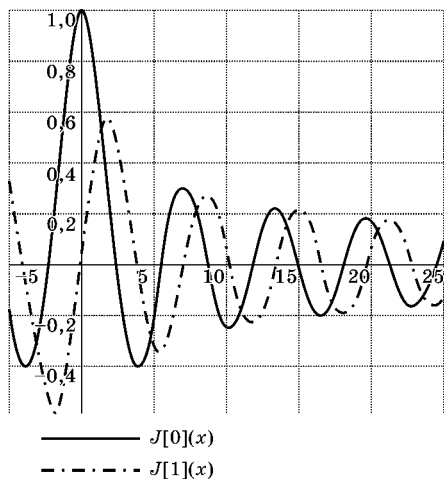


Рис. 4.3  
Бесселевы функции  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$

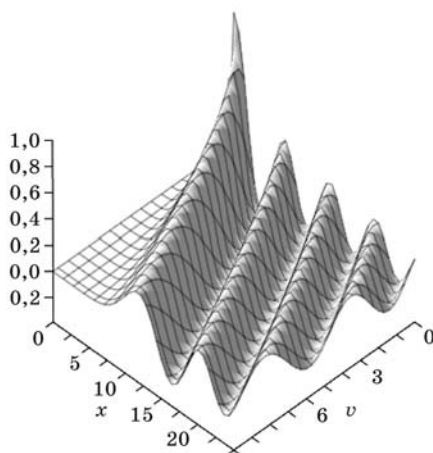


Рис. 4.4  
Поверхность  $z = f(x, v) = J_v(x)$

#### 4.9. МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Рассмотрим уравнение

$$u'' + \frac{1}{x}u' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0, \quad 0 < x < \infty. \quad (4.46)$$

Сделаем замену переменной  $z = ix$ , тогда

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz}i, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dz^2}i^2$$

и уравнение (4.46) примет вид

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{du}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0.$$

В результате мы пришли к уравнению Бесселя. Откуда

$$u = AJ_\nu(z) + BH_\nu^{(1)}(z) = AJ_\nu\left(xe^{i\frac{\pi}{2}}\right) + BH_\nu^{(1)}\left(xe^{i\frac{\pi}{2}}\right), \quad (4.47)$$

где  $A, B$  — произвольные константы.

Таким образом, уравнение (4.46) интегрируется через цилиндрические функции мнимого аргумента. Однако пользоваться решением в форме (4.47) неудобно, так как при вещественном  $\nu$  функция (4.47) является комплексной.

Вводятся в рассмотрение функции:

$$I_\nu(x) = e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} J_\nu\left(xe^{i\frac{\pi}{2}}\right); \quad (4.48)$$

$$K_\nu(x) = \frac{i\pi}{2} e^{i\frac{\pi\nu}{2}} H_\nu^{(1)}\left(xe^{i\frac{\pi}{2}}\right), \quad (4.49)$$

которые называются *модифицированными цилиндрическими функциями*; функция (4.49) называется *функцией Макдональда*. Общее решение уравнения (4.46) теперь может быть записано в виде

$$u(x) = AI_\nu(x) + BK_\nu(x).$$

Рассмотрим вкратце теорию этих функций. Из формул (4.17) и (4.48) следует

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}; \quad 0 < x < \infty.$$

Таким образом,  $I_\nu(x)$  — вещественно, когда  $x > 0$ ,  $\nu$  — вещественно. Получим вспомогательную формулу (будем пока считать, что  $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ):

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= J_\nu(z) + iY_\nu(z) = J_\nu(z) + i \frac{J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} = \\ &= ie^{-\frac{i\nu\pi}{2}} \frac{e^{\frac{i\nu\pi}{2}} J_\nu(z) - e^{\frac{i\nu\pi}{2}} J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}. \end{aligned}$$



Следовательно,

$$K_\nu(z) = \frac{i\pi}{2} e^{\frac{i\nu\pi}{2}} i e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} \frac{e^{\frac{i\nu\pi}{2}} J_\nu(xi) - e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} J_{-\nu}(xi)}{\sin(\nu\pi)} = \frac{-\pi[I_\nu(x) - I_{-\nu}(x)]}{2\sin(\nu\pi)}.$$

Итак,

$$K_\nu(z) = \frac{\pi[I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]}{2\sin(\nu\pi)}, \quad (4.50)$$

причем  $0 < x < \infty$ ,  $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Отсюда следует, что  $K_\nu(x)$  — вещественно, если  $\nu$  — вещественно. Покажем, что (4.50) приобретает неопределенный вид, если  $\nu$  стремится к целому числу. Действительно, имеем

$$J_{-n}\left(xe^{\frac{i\pi}{2}}\right) = (-1)^n J_n\left(xe^{\frac{i\pi}{2}}\right) \Rightarrow \underbrace{e^{\frac{i\pi n}{2}} J_{-n}\left(xe^{\frac{i\pi}{2}}\right)}_{=I_{-n}(x)} = \underbrace{e^{-\frac{i\pi n}{2}} J_n\left(xe^{\frac{i\pi}{2}}\right)}_{=I_n(x)}.$$

Таким образом,

$$I_{-n}(x) = I_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

и, следовательно, формула (4.50) обращается в неопределенность при целом индексе  $\nu$ .

Доопределим функцию Макдональда для целых индексов по формуле

$$K_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(x) = \frac{(-1)^n}{2} \left\{ \left[ \frac{\partial I_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} - \left[ \frac{\partial I_\nu(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Из формулы (4.50) следует

$$K_{-\nu}(x) = K_\nu(x),$$

т. е. функция Макдональда есть четная функция индекса  $\nu$ .

Для модифицированных цилиндрических функций существуют интегральные представления, аналогичные представлениям цилиндрических функций. Так, например, исходя из формулы (4.37):

$$J_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(zt) dt, \quad |\arg z| < \pi, \quad \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2},$$

находим

$$I_\nu(x) = \frac{e^{\frac{i\nu\pi}{2}} 2\left(\frac{x}{2}\right)^\nu e^{-\frac{i\nu\pi}{2}}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(ixt) dt$$

или

$$I_\nu(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \operatorname{ch}(xt) dt.$$

Из формулы (4.40):

$$H_v^{(1)}(z) = \frac{e^{-\frac{v\pi i}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\text{ch}(t)-vt} dt, \text{Im } z > 0$$

находим

$$\begin{aligned} K_v(x) &= \frac{\pi i}{2} e^{\frac{i\pi v}{2}} \frac{e^{-\frac{i\pi v}{2}}}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\text{ch}(t)-vt} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\text{ch}(t)-vt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-x\text{ch}(t)} \text{ch}(vt) dt, \quad x > 0, \end{aligned}$$

так как  $e^{-vt} = \text{ch}(vt) - \text{sh}(vt)$ . Таким образом,

$$K_v(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\text{ch}(t)-vt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-x\text{ch}(t)} \text{ch}(vt) dt, \quad x > 0,$$

$v$  — любое.

Отметим рекуррентные формулы, которые легко получаются из формул (4.32) и (4.33):

$$\begin{aligned} 2 \frac{dI_v(x)}{dx} &= I_{v-1}(x) + I_{v+1}(x); \\ \frac{2v}{x} I_v(x) &= I_{v-1}(x) - I_{v+1}(x). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} -2 \frac{dK_v(x)}{dx} &= K_{v-1}(x) + K_{v+1}(x); \\ -\frac{2v}{x} K_v(x) &= K_{v-1}(x) - K_{v+1}(x). \end{aligned}$$

Отметим также асимптотические формулы:

$$I_v(x) \cong \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^v}{\Gamma(1+v)}, \quad x \rightarrow 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} K_v(x) = \infty,$$

поэтому функция  $I_v(x)$  ограничена при  $v \geq 0$ ;

$$I_v(x) \cong \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad K_v(x) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

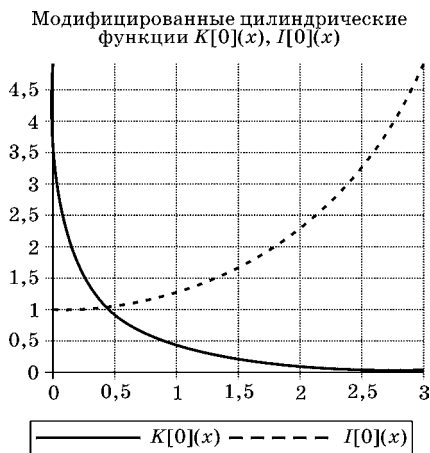
На рисунке 4.5 приведены графики функций  $K_0(x)$  и  $I_0(x)$ , полученные в Maple.

```
>p:=plots[textplot]([2.8,0.2,`x`],align={ABOVE,RIGHT});
qq0:=
plot(BesselK(0,x),x=0..3,color=black,labels=[`,`],
```

```

tickmarks=[5,5],legend="K[0](x)":
qq1:=
plot(Bessell(0,x),x=0..3,color=black,linestyle=3,
labels=["`,``,`"],tickmarks=[5,5],legend="I[0](x)":
plots[display]({p,qq0,qq1},gridlines=true,
font=[Courier,roman,14],labelfont=[Helvetica,roman,14],
xtickmarks=10,ytickmarks=10,title=
"Модифицированные цилиндрические функции K[0](x),
I[0](x)");

```



**Рис. 4.5**  
Модифицированные цилиндрические функции

#### 4.10. ЗАДАЧА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ, СВЯЗАННАЯ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \lambda r R = 0, \quad 0 < r < a; \quad (4.51)$$

$$R|_{r=0} = O(1); \quad R|_{r=a} = 0 \quad (4.52)$$

либо

$$R|_{r=0} = O(1); \quad \frac{dR}{dr} + hR \Big|_{r=a} = 0, \quad h \geq 0. \quad (4.53)$$

Чтобы записать общий интеграл уравнения (4.51), сделаем замену переменной

$$x = \sqrt{\lambda} r \Rightarrow \frac{dR}{dr} = \frac{dR}{dx} \sqrt{\lambda}, \quad \frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{d^2 R}{dx^2} (\sqrt{\lambda})^2.$$

Уравнение (4.51) примет вид

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + R = 0. \quad (4.54)$$

Уравнение (4.54) — уравнение Бесселя нулевого порядка ( $\nu = 0$ ). Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$R = AJ_0(x) + BY_0(x), \quad \lambda \neq 0,$$

следовательно, общий интеграл уравнения (4.51) будет иметь вид

$$R(r) = AJ_0(\sqrt{\lambda}r) + BY_0(\sqrt{\lambda}r), \quad \lambda \neq 0.$$

Мы знаем, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} J_0(\sqrt{\lambda}r) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow 0} Y_0(\sqrt{\lambda}r) = -\infty,$$

следовательно, в силу ограниченности функции в нуле,  $B = 0$ .

Таким образом, для условий первого рода будем иметь ( $A \neq 0$ )

$$J_0(\sqrt{\lambda}a) = 0, \tag{4.55}$$

а для условий третьего рода ( $A \neq 0$ )

$$haJ_0(\sqrt{\lambda}a) - \sqrt{\lambda}aJ_1(\sqrt{\lambda}a) = 0. \tag{4.56}$$

Докажем, что полученные уравнения (4.55) и (4.56) имеют бесчисленное множество решений. Будем считать, что  $\lambda$  — вещественное и  $\lambda \rightarrow \infty$ . Воспользуемся асимптотическими формулами:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - (2\nu + 1)\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Тогда в случае условий первого рода

$$J_0(\sqrt{\lambda}a) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}a}} \cos\left(\sqrt{\lambda}a - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/4}}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Видим, что при достаточно больших  $\lambda$  функция  $J_0(\sqrt{\lambda}a)$  имеет колебательный характер и, следовательно, бесконечное число раз обращается в нуль, т. е. имеет бесконечное число корней.

В случае условий третьего рода будем иметь

$$\begin{aligned} haJ_0(\sqrt{\lambda}a) - \sqrt{\lambda}aJ_1(\sqrt{\lambda}a) &= ha \sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}a}} \cos\left(\sqrt{\lambda}a - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/4}}\right) - \\ &- \sqrt{\lambda}a \sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}a}} \cos\left(\sqrt{\lambda}a - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^{1/4}}\right) = -(\sqrt{\lambda}a)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\sqrt{\lambda}a - \frac{3\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^{1/4}}\right). \end{aligned}$$

Видим, что и в этом случае при достаточно больших  $\lambda$  рассматриваемая функция имеет колебательный характер, т. е. имеет бесконечное число корней.

Покажем, что все собственные значения вещественны. Предположим, что  $\lambda = \sigma + i\tau$  — собственное значение и ему отвечает собственная функция  $R = A + iB$ . Тогда вследствие вещественности функций и констант, входящих в дифференциальное уравнение (4.51) и граничные условия (4.52) и (4.53), существует собственное значение  $\bar{\lambda} = \sigma - i\tau$ , которому отвечает собственная функция  $\bar{R} = A - iB$ . Можно записать:

$$(rR)' + \lambda rR = 0;$$

$$(r\bar{R})' + \bar{\lambda} r\bar{R} = 0.$$

Первое соотношение умножим на  $\bar{R}$ , а второе — на  $R$  и вычтем одно из другого, получим

$$\bar{R}(rR)' - R(r\bar{R})' + (\lambda - \bar{\lambda})rR\bar{R} = 0.$$

Учитывая легко проверяемое соотношение

$$\bar{R}(rR)' - R(r\bar{R})' = \frac{d}{dr}[r(\bar{R}R' - R\bar{R}')],$$

будем иметь

$$\frac{d}{dr}[r(\bar{R}R' - R\bar{R}')] + (\lambda - \bar{\lambda})rR\bar{R} = 0.$$

Проинтегрируем последнее соотношение на  $[0, a]$ , получим

$$[r(\bar{R}R' - R\bar{R}')]_{r=0}^a + (\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^a rR\bar{R}dr = 0.$$

Внеинтегральный член равен нулю, следовательно,

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^a rR\bar{R}dr = 0 \Rightarrow 2i\tau \int_0^a r(A^2 + B^2)dr = 0 \Rightarrow \tau = 0.$$

Следовательно,  $\lambda = \sigma$  — вещественное число.

Докажем теперь, что все собственные значения неотрицательны. Допустим, что  $\lambda = \sigma$  — собственное значение, причем  $\sigma < 0$ . Тогда для условий первого рода будем иметь

$$J_0(\sqrt{\lambda}a) = J_0(i\sqrt{|\sigma|}a) = I_0(\sqrt{|\sigma|}a).$$

Последнее выражение заведомо положительно, так как

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} > 0.$$

Следовательно,  $J_0(i\sqrt{|\sigma|}a) \neq 0$  и отрицательных собственных значений быть не может.

В случае условий третьего рода будем иметь

$$haJ_0(\sqrt{\lambda}a) - \sqrt{\lambda}aJ_1(\sqrt{\lambda}a) = haI_0(\sqrt{|\sigma|}a) + \sqrt{|\sigma|}aI_1(\sqrt{|\sigma|}a) > 0,$$

так как

$$I_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}}{k!(k+1)!} > 0.$$

Следовательно, отрицательных собственных значений не существует.

Покажем, наконец, что спектр задачи дискретный. Это вытекает из того, что функции, стоящие в левых частях уравнений (4.55) и (4.56), есть целые функции от  $\lambda$ . Эти функции не равны нулю тождественно, следовательно, их нули — изолированные точки. Таким образом, спектр задачи — дискретный.

Удобно принять в уравнениях (4.55) и (4.56)  $\sqrt{\lambda}a = \gamma$ , тогда будем иметь для условий первого рода

$$J_0(\gamma) = 0, \quad (4.57)$$

а для условий третьего рода

$$h a J_0(\gamma) - \gamma J_1(\gamma) = 0. \quad (4.58)$$

Так как  $\lambda \geq 0$ , то  $\gamma$  — вещественные; это позволяет находить корни уравнений (4.57) и (4.58) графически. Пусть  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$  — положительные корни уравнений (4.57) или (4.58), тогда собственные значения будут

$$\lambda_1 = \left(\frac{\gamma_1}{a}\right)^2, \lambda_2 = \left(\frac{\gamma_2}{a}\right)^2, \lambda_3 = \left(\frac{\gamma_3}{a}\right)^2, \dots, \lambda_n = \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2, \dots, \quad (4.59)$$

а собственные функции будут иметь вид

$$R_1(r) = J_0\left(\gamma_1 \frac{r}{a}\right), R_2(r) = J_0\left(\gamma_2 \frac{r}{a}\right), \dots, R_n(r) = J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right), \dots \quad (4.60)$$

Рассмотрим отдельно случай  $\lambda = 0$ . В этом случае уравнение имеет вид

$$\frac{d}{dr}\left(r \frac{dR}{dr}\right) = 0, \quad 0 < r < a.$$

Откуда

$$R = A + B \ln r.$$

В случае условий первого и третьего рода, как легко видеть, будем иметь  $A = 0, B = 0$  ( $h \neq 0$ ); таким образом,  $\lambda = 0$  не является собственным значением задачи. В случае условий второго рода  $R'(a) = 0, (h = 0)$  и мы будем иметь  $\lambda = \lambda_0 = 0$  собственное значение;  $R = R_0(r) = 1$  — соответствующая собственная функция.

#### 4.11. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ В РЯДЫ ФУРЬЕ — БЕССЕЛЯ И ДИНИ

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$\frac{d}{dr}\left(r \frac{dR}{dr}\right) + \lambda r R = 0, \quad 0 < r < a; \quad (4.61)$$

$$R|_{r=0} = O(1); \quad R|_{r=a} = 0 \quad (4.62)$$

либо

$$R|_{r=0} = O(1); \quad \frac{dR}{dr} + hR \Big|_{r=a} = 0, \quad h \geq 0. \quad (4.63)$$

Пусть  $\lambda_n = \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$  — собственные значения,  $R_n = J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  — собственные функции задачи (4.61)–(4.63), причем  $\gamma_n$  — положительные корни уравнений:

$$J_0(\gamma) = 0$$

в случае условий первого рода и

$$haJ_0(\gamma) - \gamma J_1(\gamma) = 0$$

в случае условий третьего рода.

Докажем, что собственные функции ортогональны на  $[0, a]$  с весом  $r$ . Имеем

$$(rR'_n)' + \lambda_n r R_n = 0;$$

$$(rR'_m)' + \lambda_m r R_m = 0.$$

Первое соотношение умножим на  $R_m$ , а второе — на  $R_n$  и вычтем одно из другого, получим

$$\begin{aligned} R_m (rR'_n)' - R_n (rR'_m)' + (\lambda_n - \lambda_m) r R_n R_m &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d}{dr} [r(R_m R'_n - R_n R'_m)] + (\lambda_n - \lambda_m) r R_n R_m &= 0. \end{aligned}$$

Проинтегрируем последнее соотношение на  $[0, a]$ , получим

$$[r(R_m R'_n - R_n R'_m)]_{r=0}^{r=a} + (\lambda_n - \lambda_m) \int_0^a r R_n R_m dr = 0.$$

Внеинтегральные члены равны нулю, следовательно,

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_0^a r R_n R_m dr = 0.$$

Откуда получаем, если  $m \neq n$ ,

$$\int_0^a r R_n R_m dr = 0,$$

что и требовалось доказать.

Последнее соотношение можно записать в виде

$$\int_0^a r J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right) J_0\left(\frac{\gamma_m r}{a}\right) dr = 0, \quad m \neq n.$$

В дальнейшем нам понадобится норма собственных функций, т. е. необходимо уметь вычислять интеграл

$$\int_0^a r R_n^2 dr = \|R_n\|^2. \quad (4.64)$$

Для вывода формулы вычисления интеграла (4.64) удобно ввести обозначения  $R_\lambda(r) = J_0(\sqrt{\lambda}r)$ ,  $R_\mu(r) = J_0(\sqrt{\mu}r)$ . Тогда можно записать

$$\begin{aligned}(rR'_\lambda)' + \lambda rR_\lambda &= 0; \\ (rR'_\mu)' + \mu rR_\mu &= 0.\end{aligned}$$

Далее, повторяя все рассуждения, как и при доказательстве ортогональности собственных функций, мы придем к соотношению

$$\begin{aligned}[r(R_\mu R'_\lambda - R_\lambda R'_\mu)]_{r=0}^{r=a} + (\lambda - \mu) \int_0^a r R_\lambda R_\mu dr &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (\lambda - \mu) \int_0^a r R_\lambda R_\mu dr &= -a[R_\mu(a)R'_\lambda(a) - R_\lambda(a)R'_\mu(a)].\end{aligned}$$

Имеем далее

$$\begin{aligned}R'_\lambda(r) &= -\sqrt{\lambda}J_1(\sqrt{\lambda}r); \\ R'_\mu(r) &= -\sqrt{\mu}J_1(\sqrt{\mu}r).\end{aligned}$$

Откуда

$$\int_0^a r J_0(\sqrt{\mu}r) J_0(\sqrt{\lambda}r) dr = \frac{a[\sqrt{\lambda}J_0(\sqrt{\mu}a)J_1(\sqrt{\lambda}a) - \sqrt{\mu}J_0(\sqrt{\lambda}a)J_1(\sqrt{\mu}a)]}{(\lambda - \mu)}.$$

Перейдем теперь к пределу в последнем равенстве при  $\lambda \rightarrow \mu$ ; неопределенность раскроем по правилу Лопиталья. При этом воспользуемся формулами

$$\frac{d}{dx} x J_1(x) = x J_0(x), \quad \frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x).$$

Будем иметь

$$\begin{aligned}\int_0^a r J_0^2(\sqrt{\mu}r) dr &= \left[ J_0(\sqrt{\mu}a) \sqrt{\mu} a J_0(\sqrt{\mu}a) \frac{a}{2\sqrt{\mu}} + \sqrt{\mu} a J_1(\sqrt{\mu}a) J_1(\sqrt{\mu}a) \frac{a}{2\sqrt{\mu}} \right] = \\ &= \frac{a^2}{2} [J_0^2(\sqrt{\mu}a) + J_1^2(\sqrt{\mu}a)].\end{aligned}$$

Примем в последнем равенстве  $\sqrt{\mu}a = \gamma_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  Тогда

$$\int_0^a r J_0^2\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right) dr = \frac{a^2}{2} [J_0^2(\gamma_n) + J_1^2(\gamma_n)]. \quad (4.65)$$

Здесь  $\gamma_n$  — положительные корни уравнений:

$$J_0(\gamma) = 0$$

в случае условий первого рода и



$$haJ_0(\gamma) - \gamma J_1(\gamma) = 0$$

в случае условий третьего рода.

Таким образом, мы имеем

$$\int_0^a r J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right) J_0\left(\frac{\gamma_m r}{a}\right) dr = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \frac{a^2}{2} [J_0^2(\gamma_n) + J_1^2(\gamma_n)], & m = n. \end{cases}$$

Пусть теперь задана некоторая функция  $f(r)$ , определенная на  $[0, a]$ . Предположим, что эта функция допускает разложение в ряд следующего вида:

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right), \quad 0 < r < a.$$

Тогда мы можем записать

$$C_n = \frac{\int_0^a r f(r) J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right) dr}{\left\| J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right) \right\|^2} = \frac{\int_0^a r f(r) J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right) dr}{\frac{a^2}{2} [J_0^2(\gamma_n) + J_1^2(\gamma_n)]}.$$

Полученные таким образом ряды называются *рядами Дини*. Ряды Дини связаны с граничными условиями третьего рода. Частным случаем, отвечающим граничным условиям первого рода, является *ряд Фурье — Бесселя*. Для этого частного случая будем иметь:

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right), \quad 0 < r < a;$$

$$C_n = \frac{2}{a^2 J_1^2(\gamma_n)} \int_0^a r f(r) J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) dr.$$

Полученные ряды носят формальный характер. Сформулируем условия, при которых эти ряды справедливы:

1)  $f(r)$  — кусочно-непрерывна на  $(0, a)$  и имеет конечное число максимумов и минимумов на любом  $[\alpha, \beta] \subset (0, a)$ ;

2)  $\int_0^a \sqrt{r} |f(r)| dr$  — существует.

Условие 2 допускает обращение функции  $f(r)$  в бесконечность при  $r \rightarrow 0$ .

При сформулированных условиях функция  $f(r)$  разлагается в ряд Дини при любом  $r \in (0, a)$ . Условия являются достаточными. В точках разрыва будем иметь

$$\frac{f(r+0) + f(r-0)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right).$$

## 4.12. ПРИЛОЖЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Как уже упоминалось, цилиндрические функции имеют весьма широкую область применения в математической физике и технике. Настоящий параграф посвящен приложениям цилиндрических функций к некоторым задачам математической физики, причем выбор задач рассчитан главным образом на то, чтобы иллюстрировать различные стороны применения аппарата цилиндрических функций.

### ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ КРУГЛОЙ МЕМБРАНЫ

Рассмотрим малые колебания круглой мембраны радиуса  $a$ , закрепленной по контуру. Будем предполагать колебания осесимметричными, т. е.  $u = u(r, t)$ . Изучение таких колебаний сводится к решению следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \quad 0 < r < a, \quad t > 0; \\ u|_{r \rightarrow 0} &= O(1), \quad u|_{r=a} = 0; \\ u|_{t=0} &= \varphi(r), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(r). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Ищем решение в виде

$$u = R(r)T(t) \Rightarrow \frac{(rR)'}{rR} = \frac{T''}{v^2 T} = -\lambda.$$

Таким образом, приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$(rR)' + \lambda rR = 0; \quad (4.67)$$

$$T'' + \lambda v^2 T = 0. \quad (4.68)$$

В силу граничных условий (4.66) будем иметь

$$R|_{r \rightarrow 0} = O(1), \quad R|_{r=a} = 0. \quad (4.69)$$

Таким образом, получили задачу Штурма — Лиувилля (4.67), (4.69). Мы знаем, что собственными значениями этой задачи будут числа (4.59):

$$\lambda_1 = \left( \frac{\gamma_1}{a} \right)^2, \quad \lambda_2 = \left( \frac{\gamma_2}{a} \right)^2, \quad \lambda_3 = \left( \frac{\gamma_3}{a} \right)^2, \quad \dots, \quad \lambda_n = \left( \frac{\gamma_n}{a} \right)^2, \quad \dots,$$

а собственные функции будут иметь вид (4.60):

$$R_1(r) = J_0 \left( \gamma_1 \frac{r}{a} \right), \quad R_2(r) = J_0 \left( \gamma_2 \frac{r}{a} \right), \quad \dots, \quad R_n(r) = J_0 \left( \gamma_n \frac{r}{a} \right), \dots,$$

где  $\gamma_n$  — положительные корни уравнения  $J_0(\gamma) = 0$ .

Теперь уравнение (4.68) примет вид

$$T'' + \frac{\gamma_n^2}{a^2} v^2 T = 0.$$

Откуда

$$T = T_n = C_n \cos\left(\frac{\gamma_n v}{a} t\right) + D_n \sin\left(\frac{\gamma_n v}{a} t\right).$$

Таким образом, мы получили совокупность частных решений

$$u = u_n = \left[ C_n \cos\left(\frac{\gamma_n v}{a} t\right) + D_n \sin\left(\frac{\gamma_n v}{a} t\right) \right] J_0\left(\frac{\gamma_n}{a} r\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям воспользуемся принципом суперпозиции и составим ряд

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ C_n \cos\left(\frac{\gamma_n v}{a} t\right) + D_n \sin\left(\frac{\gamma_n v}{a} t\right) \right] J_0\left(\frac{\gamma_n}{a} r\right).$$

Будем считать, что ряд сходится так, что его можно дифференцировать и переходить к пределу под знаком суммы. Тогда будем иметь:

$$u|_{t=0} = \varphi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\frac{\gamma_n}{a} r\right), \quad 0 < r < a;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{\gamma_n v}{a} J_0\left(\frac{\gamma_n}{a} r\right), \quad 0 < r < a.$$

Откуда

$$C_n = \frac{2}{a^2 J_1^2(\gamma_n)} \int_0^a r \varphi(r) J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) dr = \varphi_n;$$

$$D_n \frac{\gamma_n v}{a} = \frac{2}{a^2 J_1^2(\gamma_n)} \int_0^a r \psi(r) J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) dr = \psi_n.$$

Таким образом, окончательно формальное решение задачи будет иметь вид

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \varphi_n \cos\left(\frac{\gamma_n v}{a} t\right) + \frac{a}{\gamma_n v} \psi_n \sin\left(\frac{\gamma_n v}{a} t\right) \right] J_0\left(\frac{\gamma_n}{a} r\right).$$

Рассмотрим пример. Пусть начальные условия имеют вид

$$u|_{t=0} = \varphi(r) = u_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(r) = 0.$$

Тогда, очевидно  $\psi_n = 0$ ,

$$\varphi_n = \frac{2u_0}{a^2 J_1^2(\gamma_n)} \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) dr. \quad (4.70)$$

Для вычисления интеграла в (4.70) удобно воспользоваться уравнением Бесселя

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) \right) + \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2 r J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) = 0.$$

Откуда

$$rJ_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right)dr = -\left(\frac{a}{\gamma_n}\right)^2 d\left(r \frac{d}{dr} J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right)\right). \quad (4.71)$$

После подстановки (4.71) в (4.70) интегрирование производим по частям. Разбивать интеграл на два интеграла не следует:

$$\begin{aligned} \Phi_n &= -\frac{2u_0 a^2}{\gamma_n^2 a^2 J_1^2(\gamma_n)} \left\{ \underbrace{\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r \frac{d}{dr} J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right)}_{=0} \Big|_{r=0}^{r=a} + \frac{2}{a^2} \int_0^a r^2 \frac{d}{dr} J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) dr \right\} = \\ &= -\frac{2u_0}{\gamma_n^2 J_1^2(\gamma_n)} \frac{2}{a^2} \left\{ \underbrace{r^2 J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right)}_{=0} \Big|_{r=0}^{r=a} - 2 \int_0^a r J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) dr \right\} = -\frac{8u_0}{\gamma_n^2 a^2 J_1^2(\gamma_n)} \frac{a^2}{\gamma_n^2} r \frac{d}{dr} J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) \Big|_{r=0}^{r=a} = \\ &= \frac{8u_0}{\gamma_n^4 J_1^2(\gamma_n)} \frac{\gamma_n}{a} r J_1\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) \Big|_{r=0}^{r=a} = \frac{8u_0}{\gamma_n^3 J_1(\gamma_n)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Phi_n = \frac{8u_0}{\gamma_n^3 J_1(\gamma_n)}.$$

Окончательно решение задачи примет вид

$$u = 8u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right)}{\gamma_n^3 J_1(\gamma_n)} \cos\left(\frac{\gamma_n v}{a} t\right).$$

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЦИЛИНДРА

Важный класс задач математической физики составляют краевые задачи теории потенциала, которые заключаются в определении функции  $u$ , гармонической в некоторой трехмерной области  $(\tau)$ , удовлетворяющей на ее границе условию одного из трех типов:

- (I)  $u|_{\sigma} = f$ ;
- (II)  $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\sigma} = f$ ;
- (III)  $\frac{\partial u}{\partial n} + hu \Big|_{\sigma} = f$ ,

где  $f$  — заданная функция точки на поверхности  $(\sigma)$ ;  $n$  — внешняя нормаль к поверхности.

В качестве простого примера рассмотрим задачу об отыскании стационарного распределения температуры в теле, которое имеет форму цилиндра, по известному распределению температуры на его поверхности. Эта задача эквивалентна первой краевой задаче, соответствующей условию вида (I). Такая краевая задача может быть решена при помощи метода разделения переменных,

если предположить, что функция равна нулю на боковой поверхности или на торцах цилиндра. Общий случай произвольных граничных условий первого рода может быть сведен к этим частным случаям путем разложения задачи на две вспомогательные с граничными условиями указанного специального вида.

Введем систему цилиндрических координат  $(r, \varphi, z)$ , ось  $z$  которой совпадает с осью цилиндра, а начало координат лежит в плоскости одного из торцов. В соответствии с замечанием, сделанным выше, достаточно ограничиться рассмотрением двух частных случаев, когда граничные условия имеют вид:

$$u|_{r=a} = 0, \quad u|_{z=0} = f_0, \quad u|_{z=l} = f_l; \quad (4.72a)$$

$$u|_{r=a} = F, \quad u|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=l} = 0. \quad (4.72б)$$

Для упрощения предположим, что граничные условия не содержат переменной  $\varphi$ , т. е.  $f_0 = f_0(r)$ ,  $f_l = f_l(r)$ ,  $F = F(z)$ . Искомая функция  $u$  тогда также не будет зависеть от  $\varphi$ , поэтому частные решения уравнения Лапласа могут быть представлены в форме  $u = R(r)Z(z)$ , где множители суть интегралы дифференциальных уравнений:

$$(rR)' + \lambda rR = 0, \quad Z'' - \lambda Z = 0.$$

Выполнив интегрирование, находим:

$$R(r) = AJ_0(\sqrt{\lambda}r) + BY_0(\sqrt{\lambda}r), \quad \lambda \neq 0; \quad (4.73)$$

$$Z(z) = C\text{ch}(\sqrt{\lambda}z) + D\text{sh}(\sqrt{\lambda}z) = \tilde{C}\text{sh}(\sqrt{\lambda}(l-z)) + \tilde{D}\text{sh}(\sqrt{\lambda}z), \quad \lambda \neq 0. \quad (4.74)$$

Предположим, что граничные условия имеют вид (4.72a). В силу ограниченности решения на оси цилиндра мы должны положить  $B = 0$ , тогда допустимыми значениями параметра  $\lambda$  будут числа

$$\lambda_1 = \left(\frac{\gamma_1}{a}\right)^2, \lambda_2 = \left(\frac{\gamma_2}{a}\right)^2, \lambda_3 = \left(\frac{\gamma_3}{a}\right)^2, \dots, \lambda_n = \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2, \dots,$$

где  $\gamma_n$  — положительные корни уравнения (4.57):  $J_0(\gamma) = 0$ . Таким образом, получаем следующую совокупность частных решений уравнения Лапласа:

$$u = u_n = \left[ M_n \text{ch}\left(\frac{\gamma_n}{a} z\right) + N_n \text{sh}\left(\frac{\gamma_n}{a} z\right) \right] J_0\left(\frac{\gamma_n}{a} r\right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.75)$$

из которых путем их суперпозиции может быть построено решение рассматриваемой задачи. Действительно, предположим, что каждая из функций  $f_0(r)$ ,  $f_l(r)$  может быть разложена в ряд Фурье — Бесселя:

$$f_0(r) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{0,n} J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right), \quad f_{0,n} = \frac{2}{a^2 J_1^2(\gamma_n)} \int_0^a r f_0(r) J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) dr;$$

$$f_l(r) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{l,n} J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right), \quad f_{l,n} = \frac{2}{a^2 J_1^2(\gamma_n)} \int_0^a r f_l(r) J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) dr,$$

и рассмотрим ряд

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ f_{0,n} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{a}(l-z)\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{a}l\right)} + f_{l,n} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{a}z\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{a}l\right)} \right] J_0\left(\frac{\gamma_n}{a}r\right), \quad (4.76)$$

составленный из членов вида (4.75). Тогда граничные условия будут удовлетворены и ряд (4.76) дает формальное решение поставленной задачи.

В случае граничных условий типа (4.72б) для того, чтобы удовлетворить однородным граничным условиям, необходимо положить  $C = 0$  и выбрать  $\lambda < 0$ , т. е.  $\sqrt{\lambda}$  будет чисто мнимым числом, равным  $i n \pi / l$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Интегралы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.73), (4.74) принимают в этом случае вид

$$R(r) = AI_0\left(\frac{n\pi}{l}r\right) + BK_0\left(\frac{n\pi}{l}r\right), \quad Z(z) = D \sin\left(\frac{n\pi}{l}z\right).$$

В силу ограниченности функции в нуле следует принять  $B = 0$ ; следовательно, подходящая система частных решений уравнения Лапласа будет

$$u = u_n = M_n I_0\left(\frac{n\pi}{l}r\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}z\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Искомое решение может быть построено в форме ряда

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{I_0\left(\frac{n\pi}{l}r\right)}{I_0\left(\frac{n\pi}{l}a\right)} \sin\left(\frac{n\pi}{l}z\right), \quad (4.77)$$

где  $F_n$  — коэффициенты Фурье в разложении функции  $F(z)$  в ряд по синусам

$$F_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(z) \sin\left(\frac{n\pi z}{l}\right) dz.$$

Решение краевых задач с граничными условиями других типов получается аналогичным образом, причем подходящим аппаратом, заменяющим ряды Фурье — Бесселя, являются в этом случае ряды Дини.

НЕСКОЛЬКО СЛОВ О СХОДИМОСТИ РЯДОВ (4.76) И (4.77)

В обоих случаях мы имеем разложение по колеблющимся функциям. Сходимость ряда (4.76) определяется соотношениями:

$$\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{a}(l-z)\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n}{a}l\right)} \approx e^{\gamma_n \left[\frac{(l-z)}{a} - \frac{l}{a}\right]} = e^{-\gamma_n \frac{z}{a}}, \quad n \rightarrow \infty;$$

$$\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n z}{a}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_n l}{a}\right)} \approx e^{\gamma_n \left[\frac{z-l}{a}\right]} = e^{-\gamma_n \frac{(l-z)}{a}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, видим, что множители в формуле (4.76) убывают по экспоненте, пока  $z$  не слишком близко к  $0$  и  $l$ .

Для ряда (4.77) будем иметь

$$\frac{I_0\left(\frac{n\pi}{l}r\right)}{I_0\left(\frac{n\pi}{l}a\right)} \approx \sqrt{\frac{a}{r}} e^{\frac{n\pi}{l}(r-a)} = \sqrt{\frac{a}{r}} e^{-\frac{n\pi}{l}(a-r)}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Ряд сходится экспоненциально в области  $0 < r < a$ .

Таким образом, ряды (4.76) и (4.77) сходятся плохо около тех участков границы, где условия неоднородные.

#### ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПЕРВОГО РОДА

Представим функцию  $u$  в виде  $u = u_1 + u_2$ . Функцию  $u_1$  будем определять из следующих условий:

$$\Delta u_1 = 0, \quad u_1|_{z=0} = f_0(r), \quad u_1|_{z=l} = f_l(r), \quad u_1|_{r \rightarrow 0} = O(1), \quad u_1|_{r=a} = 0,$$

а функцию  $u_2$  — из условий:

$$\Delta u_2 = 0, \quad u_2|_{z=0} = 0, \quad u_2|_{z=l} = 0, \quad u_2|_{r \rightarrow 0} = O(1), \quad u_2|_{r=a} = F(z).$$

Функция  $u_1$  удовлетворяется формулой (4.76), а функция  $u_2$  — формулой (4.77). Таким образом, общая задача сводится к рассмотренным случаям (4.72а) и (4.72б).

### 4.13. СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ПОЛИНОМЫ ЛЕЖАНДРА

*Сферическими функциями* называются решения линейного дифференциального уравнения:

$$[(1-z^2)u']' + \left[ \nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-z^2} \right] u = 0, \quad (4.78)$$

где  $z$  — комплексное переменное;  $\mu$  и  $\nu$  — параметры, которые могут принимать любые вещественные или комплексные значения.

Уравнение (4.78) встречается в математической физике в связи с интегрированием уравнения Лапласа в специальных системах ортогональных криволинейных координат — сферических, сфероидальных, тороидальных и других, которые применяются при рассмотрении краевых задач для областей соответствующего вида. Простейшими среди них являются краевые задачи для

сферической области, что служит основанием для того, чтобы называть рассматриваемый класс функций *сферическими* или *шаровыми функциями*. В этом случае переменная  $z$  принимает вещественные значения из промежутка  $(-1, 1)$ , а параметры  $\mu$  и  $\nu$  имеют целые положительные значения.

Простейший класс сферических функций составляют *полиномы Лежандра*, которые являются решениями уравнения (4.78) при  $\mu = 0$  и целых положительных  $\nu = n$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ). Следующий по степени сложности класс сферических функций образуют *сферические функции Лежандра*, которые представляют собой решения уравнения (4.78) при  $\mu = 0$  и произвольном вещественном или комплексном  $\nu$ .

Рассмотрим уравнение (4.78) в предположении, что  $z = x \in [-1, 1]$ ;  $\mu = 0$ ,  $\nu = n = 0, 1, 2, \dots$ , т. е. уравнение

$$[(1 - x^2)u']' + n(n + 1)u = 0. \quad (4.79)$$

Построим интегралы уравнения (4.79). Покажем, что одним из интегралов уравнения (4.79) является функция

$$u = u_1 = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.80)$$

Функции (4.80) называются *полиномами Лежандра*, а формула (4.80) — *формулой Родрига* для полиномов Лежандра.

Обозначим

$$W = (x^2 - 1)^n.$$

Тогда

$$W' = n(x^2 - 1)^{n-1} 2x = \frac{2nx}{x^2 - 1} W$$

или

$$(1 - x^2)W' + 2nxW = 0. \quad (4.81)$$

Продифференцируем равенство (4.81)  $(n + 1)$  раз. Получим

$$[(1 - x^2)W']^{(n+1)} + 2n(xW)^{(n+1)} = 0.$$

Дифференцирование можно выполнить по формуле Лейбница:

$$(UV)^{(m)} = U^{(m)}V + \frac{m}{1!} U^{(m-1)}V' + \frac{m(m-1)}{2!} U^{(m-2)}V'' + \dots + UV^{(m)}. \quad (4.82)$$

Примем в (4.82) для первого слагаемого  $U = W'$ ,  $V = (1 - x^2)$ ,  $m = n + 1$ ; для второго слагаемого  $U = W$ ,  $V = x$ ,  $m = n + 1$ .

Будем иметь

$$\begin{aligned} (1 - x^2)W^{(n+2)} + \frac{(n+1)}{1!} W^{(n+1)}(-2x) + \frac{(n+1)n}{2!} W^{(n)}(-2) + \\ + 2nW^{(n+1)}x + 2n \frac{(n+1)}{1!} W^{(n)} \equiv 0 \end{aligned}$$



или

$$(1-x^2)W^{(n+2)} - 2xW^{(n+1)} + n(n+1)W^{(n)} \equiv 0. \quad (4.83)$$

Умножим (4.83) на  $\frac{1}{2^n n!}$ , получим

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) \equiv 0$$

или, что то же самое,

$$[(1-x^2)P_n'(x)]' + n(n+1)P_n(x) \equiv 0.$$

Итак, мы показали, что полиномы Лежандра удовлетворяют уравнению (4.79).

Найдем второе решение уравнения (4.79), которое было бы линейно независимо от решения  $u_1 = P_n(x)$ . Пусть  $u_1$  и  $u_2$  — решения уравнения (4.79). Тогда

$$[(1-x^2)u_1']' + n(n+1)u_1 \equiv 0;$$

$$[(1-x^2)u_2']' + n(n+1)u_2 \equiv 0.$$

Умножим первое уравнение на  $u_2$ , второе — на  $u_1$  и вычтем одно из другого. Получим

$$u_2[(1-x^2)u_1'] - u_1[(1-x^2)u_2'] \equiv 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}[(1-x^2)(u_1u_2' - u_2u_1')] \equiv 0.$$

Проинтегрируем полученное тождество

$$\begin{aligned} (1-x^2)(u_1u_2' - u_2u_1') = C = \text{const} &\Rightarrow \frac{(u_1u_2' - u_2u_1')}{u_1^2} = \frac{C}{u_1^2(1-x^2)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{u_2}{u_1}\right) &= \frac{C}{u_1^2(1-x^2)} \Rightarrow \frac{u_2}{u_1} = C \int \frac{dx}{u_1^2(1-x^2)} + D, \quad D = \text{const} \Rightarrow \\ \Rightarrow u_2 = Cu_1 \int \frac{dx}{u_1^2(1-x^2)} &+ Du_1. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Таким образом, если  $u_1$  и  $u_2$  — решения уравнения (4.79), то они связаны соотношением (4.84), в котором  $C$  и  $D$  могут быть любыми. Если  $C \neq 0$ , то  $u_1$  и  $u_2$  линейно независимы. Возьмем в качестве  $u_1$  полиномы Лежандра:  $u_1 = P_n(x)$ . Тогда на основании (4.84) будем иметь

$$u_2 = C_n P_n(x) \int \frac{dx}{(1-x^2)P_n^2(x)} + D_n P_n(x) = Q_n(x).$$

Здесь  $Q_n(x)$  — линейно независимая функция с  $P_n(x)$ . Функция  $Q_n(x)$  называется *функцией Лежандра второго рода* ( $C_n \neq 0$ ).

Пусть  $n = 0$ . Тогда

$$P_0(x) = 1,$$

$$Q_0(x) = C_0 \int \frac{dx}{1-x^2} + D_0 = \frac{C_0}{2} \int \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx + D_0 = \frac{C_0}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + D_0.$$

Возьмем  $C_0 = 1, D_0 = 0$ . Тогда

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Пусть  $n = 1$ . Тогда

$$P_1(x) = x,$$

$$Q_1(x) = C_1 x \int \frac{dx}{(1-x^2)x^2} + D_1 x = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1.$$

Здесь константы  $C_1$  и  $D_1$  выбраны надлежащим образом. И вообще,

$$Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - f_{n-1}(x),$$

где  $f_{-1}(x) \equiv 0, f_0(x) = 0, f_{n-1}(x)$  — полином степени  $(n-1)$ .

Выпишем первые несколько функций  $P_n(x)$  и  $Q_n(x)$ :

$$P_0(x) = 1, \quad Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x};$$

$$P_1(x) = x, \quad Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1;$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad Q_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2}x;$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad Q_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3}.$$

Так как функции  $P_n(x)$  и  $Q_n(x)$  линейно независимы, то общее решение уравнения (4.79) может быть записано в виде

$$u(x) = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x), \quad x \in [-1, 1], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные константы.

#### Примечание.

Уравнение (4.79) называется уравнением Лежандра; оно имеет особые точки  $x = -1$  и  $x = 1$ . Полиномы Лежандра  $P_n(x)$  являются собственными функциями для уравнения (4.79) в промежутке  $[-1, 1]$ , ограниченными в особых точках  $x = \pm 1$ , т. е.  $P_n(x)|_{x \rightarrow \pm 1}$  ограничены. Очевидно,  $Q_n(x) \rightarrow \infty, x \rightarrow \pm 1$ .

### 4.14. ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА

Функция

$$W(x, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} \tag{4.85}$$

является производящей для полиномов Лежандра, т. е. полиномы Лежандра — коэффициенты разложения этой функции в ряд по положительным степеням  $z$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n. \quad (4.86)$$

Здесь  $z$  — комплексная переменная,  $x \in [-1, +1]$ ;  $x$  — параметр.

Докажем формулу (4.86). Имеем  $W(x, 0) = 1$ . Особые точки (критические точки или точки разветвления) функции (4.85) — корни уравнения

$$z^2 - 2xz + 1 = 0,$$

т. е.

$$z_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1} = x \pm i\sqrt{1 - x^2}, \quad |z_{1,2}| = 1.$$

Следовательно, особые точки лежат на круге радиуса 1;  $z_1$  и  $z_2$  — особые точки функции  $W(x, z)$  (рис. 4.6).

Внутри круга  $|z| < 1$  особых точек нет. Функция  $W(x, z)$  — регулярная функция переменного  $z$ ,  $|z| < 1$ . Следовательно, внутри круга  $|z| < 1$  функция  $W(x, z)$  допускает разложение в ряд Тейлора. Таким образом, можно записать

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n, \quad |z| < 1, \quad x \in [-1, 1].$$

Коэффициенты разложения  $C_n$  определяются равенством

$$C_n = \frac{W^{(n)}(x, 0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

или в силу интеграла типа Коши:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} \frac{dz}{z^{n+1}}. \quad (4.87)$$

Напомним, что коэффициенты разложения функции  $f(z)$  в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

вычисляются по формуле

$$C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

а в силу интеграла типа Коши будем иметь

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-a)^{(n+1)}}. \quad (4.88)$$

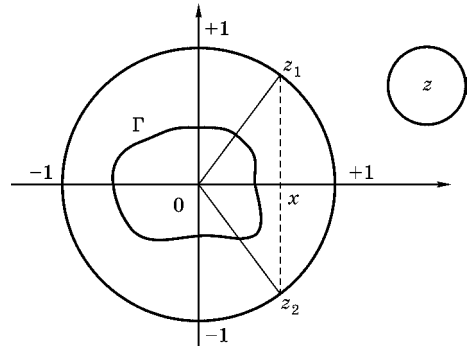


Рис. 4.6  
Комплексная плоскость  $z$ : особые точки функции  $W(x, z)$

В качестве контура  $\Gamma$  в формуле (4.87) можно взять любой замкнутый контур, лежащий целиком в пределах круга  $|z| < 1$  и охватывающий точку  $(0, 0)$ . Вычислим интеграл (4.87) с помощью подстановки Эйлера. Имеем

$$\begin{aligned}\sqrt{1-2xz+z^2} &= 1-zu \Rightarrow 1-2xz+z^2 = 1-2zu+z^2u^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow z(u^2-1) &= 2(u-x) \Rightarrow z = 2\frac{u-x}{u^2-1}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\sqrt{1-2xz+z^2} &= 1-2u\frac{u-x}{u^2-1} = -\frac{u^2-2ux+1}{u^2-1}; \\ dz &= 2\frac{(u^2-1)-(u-x)2u}{(u^2-1)^2}du = -2\frac{u^2-2ux+1}{(u^2-1)^2}du.\end{aligned}$$

Откуда

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^*} \frac{(u^2-1)2(u^2-2ux+1)(u^2-1)^{n+1}}{(u^2-2ux+1)(u^2-1)^{2n+1}(u-x)^{n+1}} du = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^*} \frac{(u^2-1)^n}{(u-x)^{n+1}} du.$$

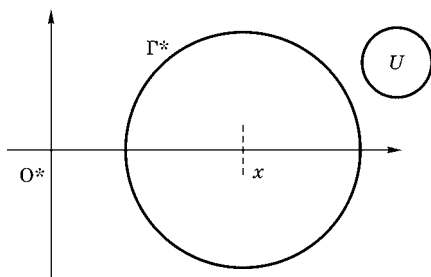


Рис. 4.7  
Комплексная плоскость  $U$ :  
особая точка  $x$

Здесь  $\Gamma^*$  — замкнутый контур вокруг точки  $x$  в плоскости  $U$ , соответствующий замкнутому контуру  $\Gamma$  вокруг точки  $O(0, 0)$  в плоскости  $z$  (рис. 4.7).

Можно записать в соответствии с формулой (4.88):

$$\begin{aligned}C_n &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{du^n} (u^2-1)^n \Big|_{u=x} = \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n = P_n(x).\end{aligned}$$

Окончательно будем иметь

$$W(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n.$$

Рассмотрим некоторые примеры применения производящей функции:

$$W(1, z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1,$$

откуда находим

$$P_n(1) = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$W(-1, z) = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1,$$

откуда находим

$$P_n(-1) = (-1)^n;$$

$$W(-x, -z) = W(x, z) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-x)(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n,$$

откуда находим

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Из последней формулы, в частности, следует, что  $P_{2n-1}(0) = 0$ .

#### 4.15. РЕКУРРЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА

Исходя из производящей функции, легко получить рекуррентные соотношения между полиномами Лежандра.

Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n. \quad (4.89)$$

Продифференцируем (4.89) по  $z$ , получим

$$\frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{1-2xz+z^2} \frac{-2x+2z}{2\sqrt{1-2xz+z^2}} = \frac{x-z}{1-2xz+z^2} W$$

или

$$(1-2xz+z^2) \frac{\partial W}{\partial z} + (z-x)W = 0.$$

Откуда

$$\begin{aligned} (1-2xz+z^2) \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1} + (z-x) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2nxP_n(x)z^n + \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)z^n &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{\substack{n=0 \\ (n=1) \\ (n-1 \rightarrow n)}}^{\infty} P_n(x)nz^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)xP_n(x)z^n + \sum_{\substack{n=0 \\ (n+1 \rightarrow n)}}^{\infty} (n+1)P_n(x)z^{n+1} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}(x)(n+1)z^n - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)xP_n(x)z^n + \sum_{n=1}^{\infty} nP_{n-1}(x)z^n &= 0. \end{aligned}$$

Объединим в одну сумму в последнем соотношении слева, получим

$$[P_1(x) - xP_0(x)]z^0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x)]z^n = 0. \quad (4.90)$$

Равенство (4.90) возможно лишь тогда, когда коэффициенты при степенях  $z$  равны нулю. Откуда

$$P_1(x) - xP_0(x) \equiv 0,$$

так как  $P_1(x) = x$ ,  $P_0(x) = 1$ ,

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.91)$$

Формула (4.91) — требуемое рекуррентное соотношение.

Получим второе рекуррентное соотношение. Рассмотрим производную

$$\frac{\partial}{\partial z}[(z-x)W] = (z-x)\frac{\partial W}{\partial z} + W = W \left\{ 1 - \frac{(x-z)^2}{1-2xz+z^2} \right\} = \frac{(1-x^2)W}{1-2xz+z^2}. \quad (4.92)$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{z}{(1-2xz+z^2)\sqrt{1-2xz+z^2}} = \frac{z}{(1-2xz+z^2)}W. \quad (4.93)$$

Сравнивая (4.92) и (4.93), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{1}{(1-x^2)} \frac{\partial}{\partial z}[(z-x)W] \Rightarrow (1-x^2) \frac{\partial W}{\partial x} = z \frac{\partial}{\partial z}[(z-x)W] \Rightarrow (1-x^2) \frac{\partial W}{\partial x} = \\ &= z(z-x) \frac{\partial W}{\partial z} + zW \end{aligned} \quad (4.94)$$

Подставим (4.89) в (4.94), получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} (1-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)z^n &= z(z-x) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)nz^{n-1} + z \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)nz^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)nz^n + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^{n+1} = \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ (n+1 \rightarrow n)}}^{\infty} (n+1)P_n(x)z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} nxP_n(x)z^n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nP_{n-1}(x)z^n - \sum_{\substack{n=0 \\ (n=1)}}^{\infty} nxP_n(x)z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n[P_{n-1}(x) - xP_n(x)]z^n. \end{aligned}$$

Откуда получаем второе рекуррентное соотношение:

$$(1-x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

#### 4.16. ЗАДАЧА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ, СВЯЗАННАЯ С ПОЛИНОМАМИ ЛЕЖАНДРА

Рассмотрим следующую задачу:

$$[(1-x^2)X'(x)]' + \lambda X(x) = 0, \quad (4.95)$$

$$X(x)|_{x \rightarrow \pm 1} = O(1). \quad (4.96)$$

Докажем, что

$$\lambda = \lambda_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.97)$$

— собственные значения;

$$X(x) = X_n(x) = P_n(x)$$

— собственные функции задачи (4.95), (4.96).

Подставим (4.97) в уравнение (4.95), получим уравнение Лежандра:

$$[(1-x^2)X']' + (n+1)nX = 0. \quad (4.98)$$

Общий интеграл (4.98), как было установлено ранее, имеет вид

$$X(x) = X_n(x) = AP_n(x) + BQ_n(x). \quad (4.99)$$

Имеем

$$P_n(x)|_{x \rightarrow \pm 1} = O(1), \quad Q_n(x)|_{x \rightarrow \pm 1} \rightarrow \infty.$$

Следовательно, в (4.99) необходимо положить  $B = 0$ , чтобы удовлетворить (4.96). Таким образом, действительно,  $X(x) = X_n(x) = P_n(x)$  — собственные функции задачи (4.95), (4.96), а  $\lambda = \lambda_n = n(n+1)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  — собственные значения этой задачи.

Более полная теория устанавливает, что других собственных функций и собственных значений нет.

Докажем, что полиномы Лежандра образуют ортогональную систему функций на отрезке  $[-1, 1]$ . Действительно, имеем:

$$\begin{aligned} [(1-x^2)P_n']' + (n+1)nP_n &= 0; \\ [(1-x^2)P_m']' + (m+1)mP_m &= 0. \end{aligned}$$

Первое соотношение умножаем на  $P_m(x)$ , а второе — на  $P_n(x)$  и вычитаем одно из другого, получаем

$$\begin{aligned} P_n[(1-x^2)P_m'] - P_m[(1-x^2)P_n'] + [(m+1)m - (n+1)n]P_nP_m &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d}{dx}\{(1-x^2)[P_nP_m' - P_mP_n']\} + [(m+1)m - (n+1)n]P_nP_m &= 0. \end{aligned}$$

Проинтегрируем последнее соотношение на отрезке  $[-1, 1]$ , получим

$$(1-x^2)[P_nP_m' - P_mP_n']\Big|_{x=-1}^{x=1} + [(m+1)m - (n+1)n] \int_{-1}^1 P_nP_m dx = 0.$$

Откуда находим

$$\int_{-1}^1 P_nP_m dx = 0, \quad m \neq n.$$

Таким образом, справедлива формула

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \|P_n(x)\|^2, & m = n. \end{cases}$$

## ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМЫ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА

Вспользуемся рекуррентным соотношением (4.91) и заменим в этом соотношении  $n$  на  $(n - 1)$ . Будем иметь

$$nP_n(x) - (2n - 1)xP_{n-1}(x) + (n - 1)P_{n-2}(x) = 0, \quad n = 2, 3, \dots \quad (4.100)$$

Умножим соотношение (4.91) на  $(2n - 1)P_{n-1}$ , а соотношение (4.100) — на  $(2n + 1)P_n$  и затем вычтем одно из другого. Получим

$$(2n - 1)(n + 1)P_{n-1}P_{n+1} + (2n - 1)nP_{n-1}^2 - (2n + 1)nP_n^2 - (2n + 1)(n - 1)P_nP_{n-2} = 0, \quad n = 2, 3, \dots \quad (4.101)$$

Проинтегрируем (4.101) на отрезке  $[-1, 1]$ ; учитывая ортогональность полиномов, получим

$$(2n - 1)n \int_{-1}^{+1} P_{n-1}^2 dx - (2n + 1)n \int_{-1}^{+1} P_n^2 dx = 0, \quad n = 2, 3, \dots$$

Откуда находим

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2 dx = \frac{2n - 1}{2n + 1} \int_{-1}^{+1} P_{n-1}^2 dx, \quad n = 2, 3, \dots \quad (4.102)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} P_0^2 dx &= \int_{-1}^{+1} 1 \cdot dx = 2; \\ \int_{-1}^{+1} P_1^2 dx &= \int_{-1}^{+1} x^2 dx = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

далее по формуле (4.102):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} P_2^2 dx &= \frac{3}{5} \int_{-1}^{+1} P_1^2 dx = \frac{2}{5}; \\ \int_{-1}^{+1} P_3^2 dx &= \frac{5}{7} \int_{-1}^{+1} P_2^2 dx = \frac{2}{7}, \end{aligned}$$

и т. д. Таким образом,

$$\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^{+1} P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n + 1}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Доказательство завершается переходом по индукции.

Итак, можно записать

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{2}{2n + 1}, & m = n. \end{cases}$$



Рассмотрим теперь вопрос о разложении произвольной функции в ряд по полиномам Лежандра. Пусть задана функция  $f(x)$ ,  $x \in (-1, 1)$ . Можно формально предположить, что

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x), \quad -1 < x < +1. \quad (4.103)$$

Тогда

$$C_n = \frac{\int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx}{\|P_n(x)\|^2} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx.$$

Справедлива следующая теорема разложения.

**Теорема.** Пусть  $f(x)$ ,  $x \in (-1, 1)$  такая, что:

1)  $f(x)$  кусочно-непрерывна на  $(-1, 1)$  и имеет конечное число максимумов и минимумов на любом  $[\alpha, \beta] \subset (-1, 1)$ ;

2) интеграл  $\int_{-1}^{+1} \frac{|f(x)|}{(1-x^2)^{1/4}} dx$  ограничен.

Тогда ряд (4.103) сходится к функции  $f(x)$  во всех точках, где  $f(x)$  непрерывна. В точках разрыва ряд сходится к полусумме значений функции справа и слева от разрыва, т. е. к числу

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Условия теоремы 1) и 2) являются достаточными.

**Пример.** Разложить функцию  $x^2$  в ряд по полиномам Лежандра.

Имеем

$$f(x) = x^2 = \sum_{n=0}^2 C_n P_n(x) = C_0 P_0(x) + C_1 P_1(x) + C_2 P_2(x)$$

или

$$x^2 = C_0 + C_1 x + C_2 \frac{3x^2 - 1}{2}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получим:

$$C_0 = \frac{1}{3}, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, будем иметь

$$x^2 = \frac{1}{3} P_0(x) + \frac{2}{3} P_2(x).$$

## 4.17. ПРИЛОЖЕНИЕ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

В качестве простого примера рассмотрим задачу об обтекании шара потоком идеальной жидкости.

Как известно из гидродинамики, потенциал скоростей  $U$  идеальной жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta U = 0, \quad \vec{v} = \nabla U,$$

где  $\vec{v}$  — вектор скорости частицы жидкости.

Пусть жидкость движется относительно шара радиуса  $a$  со скоростью  $u$  в направлении отрицательной оси  $z$  (рис. 4.8).

По определению потенциала скорости  $U$  нормальная компонента скорости  $v_n$  прилегающей к поверхности шара частицы жидкости есть

$$v_n = \frac{\partial U}{\partial n}.$$

Введем сферическую систему координат по формулам:

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi);$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\varphi);$$

$$z = r \cos(\theta).$$

Представим потенциал скоростей в виде суммы

$$U = U_1 + U_2,$$

где  $U_1$  — потенциал потока при отсутствии шара;  $U_2$  — потенциал возмущенного потока. Ясно, что

$$U_1 = -uz = -ur \cos(\theta),$$

где  $r$  — радиус-вектор точки;  $\theta$  — меридиональный угол. Для потенциала  $U_2$  будем иметь следующую задачу:

$$\Delta U_2 = 0, \quad r > a, \tag{4.104}$$

$$\left. \frac{\partial U_2}{\partial r} \right|_{r=a} = - \left. \frac{\partial U_1}{\partial r} \right|_{r=a} = u \cos(\theta), \quad U_2|_{r \rightarrow \infty} = O(1). \tag{4.105}$$

Уравнение Лапласа в сферических координатах имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial U_2}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 U_2}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{4.106}$$

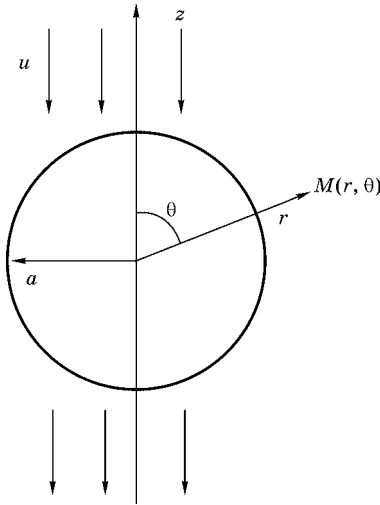


Рис. 4.8  
Обтекание шара потоком жидкости

Задача (4.104), (4.105) является внешней задачей Неймана для уравнения Лапласа, записанной в сферической системе координат. Из соображений симметрии ясно, что  $U_2$  не зависит от угла  $\varphi$ , т. е.  $U_2 = U_2(r, \theta)$ . Поэтому можно отбросить последнее слагаемое в (4.106) слева и искать решение задачи в виде

$$U_2(r, \theta) = R(r)V(\theta).$$

Переменные в (4.106) разделяются, и мы получаем два уравнения:

$$V'' + \operatorname{ctg}\theta V' + \lambda V = 0; \quad (4.107)$$

$$r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0. \quad (4.108)$$

Уравнение (4.108) относится к типу уравнений Эйлера. Ищем его решение в виде  $R(r) = r^k$ ; тогда характеристическое уравнение имеет вид

$$k(k+1) - \lambda = 0. \quad (4.109)$$

С другой стороны, решениями уравнения (4.107) являются полиномы Лежандра

$$V(\theta) = P_n(\cos(\theta)),$$

и при этом имеем  $\lambda = \lambda_n = n(n+1)$ . Действительно, сделаем замену независимой переменной в (4.107) по формуле  $x = \cos(\theta)$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , и обозначим  $y(x) = V(\theta)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\theta} &= \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\theta} = -\sin(\theta) \frac{dy}{dx}; \\ \frac{d^2V}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta} \left( -\sin(\theta) \frac{dy}{dx} \right) = -\cos(\theta) \frac{dy}{dx} - \sin(\theta) \frac{d^2y}{dx^2} \frac{dx}{d\theta} = -\cos(\theta) \frac{dy}{dx} + \sin^2(\theta) \frac{d^2y}{dx^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, вместо (4.107) будем иметь

$$\sin^2(\theta) \frac{d^2y}{dx^2} - 2\cos(\theta) \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0$$

или, учитывая, что  $\sin^2(\theta) = 1 - x^2$ ,  $\cos(\theta) = x$ ,

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0. \quad (4.110)$$

Уравнение (4.110) — уравнение Лежандра; его решениями, ограниченными в точках  $x = \pm 1$ , являются полиномы Лежандра  $P_n(x)$ , причем  $\lambda = n(n+1)$ .

Следовательно, из (4.109) по теореме Виета находим  $k_1 = n$ ,  $k_2 = -(n+1)$ .

Решение внешней задачи, ограниченное на бесконечности, ищется в виде ряда

$$U_2(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n r^{-(n+1)} P_n(\cos(\theta)).$$

Подставим этот ряд в (4.105):

$$\left. \frac{\partial U_2}{\partial r} \right|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n (-n-1) a^{-(n+1)} P_n(\cos(\theta)) = u \cos(\theta).$$

Учитывая, что  $P_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$ , приходим к выводу

$$D_1 = -\frac{ua^3}{2}; \quad D_n = 0, n \neq 1.$$

Поэтому искомое течение определяется потенциалом скорости

$$U_2 = -\frac{ua^3 \cos(\theta)}{2r^2}.$$

Таким образом, потенциал обтекания шара поступательным потоком

$$U = -u \left( r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos(\theta).$$

Заметим, что из вида граничного условия (4.105) и значения первого полинома Лежандра можно было сразу догадаться, что решение имеет вид

$$U_2 = R(r)\cos(\theta).$$

Подробное исследование проведено с целью выработки навыков решения задач с более сложными граничными условиями в сферической системе координат.

#### ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 4

1. Какие функции называются специальными функциями? Приведите примеры специальных функций.
2. Сформулируйте определение бета-функции с помощью несобственного интеграла.
3. Перечислите основные свойства бета-функции.
4. Сформулируйте определение гамма-функции с помощью несобственного интеграла.
5. Запишите формулу, выражающую связь между бета- и гамма-функциями.
6. Перечислите основные свойства гамма-функции.
7. Запишите уравнение Бесселя индекса  $\nu$ .
8. Как можно построить частное решение уравнения Бесселя?
9. Какова область сходимости ряда, определяющего бесселеву функцию первого рода?
10. Каков вид общего решения уравнения Бесселя?
11. Почему возникла необходимость введения бесселевых функций второго рода?
12. Установите зависимость, существующую между функциями Бесселя индекса  $n$  и  $(-n)$ .
13. Сформулируйте определение функции Вебера.
14. Как определяются цилиндрические функции третьего рода (функции Ханкеля)?
15. Получите представление функции Вебера с целым индексом в виде ряда.
16. Получите рекуррентные формулы для функций Бесселя.
17. Получите интегральное представление для функции Бесселя.
18. Приведите примеры использования интегрального представления Пуассона.
19. Какие из цилиндрических функций выражаются через элементарные функции?
20. Какие функции асимптотически определяют цилиндрические функции при больших по модулю значениях аргумента?
21. Что такое модифицированные цилиндрические функции?
22. Напишите уравнение, решениями которого являются модифицированные цилиндрические функции.
23. Сформулируйте задачу Штурма — Лиувилля, связанную с цилиндрическими функциями.
24. Что вы можете сказать об ортогональности системы бесселевых функций?
25. Дайте вывод формулы для нормы бесселевых функций с нулевым индексом.

26. Запишите ряд Фурье — Бесселя функции  $f(x)$  и выражения его коэффициентов. С какими граничными условиями связан ряд Фурье — Бесселя?
27. Запишите ряд Дини функции  $f(x)$  и выражения его коэффициентов. С какими граничными условиями связан ряд Дини?
28. Сформулируйте условия, при которых справедливы ряды Фурье — Бесселя и Дини.
29. Дайте решение задачи о колебаниях круглой мембраны.
30. Дайте решение задачи Дирихле для цилиндра. Что можно сказать о характере сходимости получающихся рядов?
31. Какие специальные функции называются сферическими функциями?
32. Напишите уравнение, решениями которого являются полиномы Лежандра.
33. Напишите уравнение, решениями которого являются сферические функции Лежандра.
34. Напишите формулу Родрига для полиномов Лежандра.
35. Как связаны между собой любые два решения уравнения Лежандра? Напишите формулу.
36. Как определяется функция Лежандра второго рода? Напишите формулу.
37. Каков вид общего решения уравнения Лежандра?
38. Как ведут себя полиномы Лежандра и функции Лежандра второго рода в особых точках?
39. Какая функция является производящей функцией для системы полиномов Лежандра?
40. Приведите примеры применения производящей функции для полиномов Лежандра.
41. Получите рекуррентные формулы для полиномов Лежандра.
42. Сформулируйте задачу Штурма — Лиувилля, связанную с полиномами Лежандра.
43. Что вы можете сказать об ортогональности системы полиномов Лежандра?
44. Дайте вывод формулы для нормы полиномов Лежандра.
45. Сформулируйте теорему разложения функции в ряд по полиномам Лежандра.
46. Дайте решение задачи об обтекании шара потоком идеальной жидкости.

#### ЗАДАЧИ С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ\*

1. Воспользовавшись уравнением для функции  $J_0(x)$ , вычислить интегралы

$$\int_0^x x J_0(x) dx, \int_0^x x^3 J_0(x) dx.$$

2. Вычислить (выразить через элементарные функции)

$$I_{\pm\frac{1}{2}}(x), K_{\pm\frac{1}{2}}(x), Y_{\pm\frac{1}{2}}(x), H_{\pm\frac{1}{2}}^{(1)}, H_{\pm\frac{1}{2}}^{(2)}, J_{\frac{3}{2}}(x), J_{\frac{5}{2}}(x).$$

3. Вычислить по формуле Родрига  $P_n(x)$  при  $n = 4, 5, 6, 7$ .
4. Записать общее решение уравнений:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 9)y = 0;$$

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0;$$

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{3}{5x^2}\right) y = 0.$$

5. Написать уравнение, решениями которого были бы функции:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x), \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x).$$

---

\* Часть задач, требующих применения специальных функций, помещена в конце глав 5 и 6.

6. Написать интегральное представление Пуассона функции  $J_{-2}(x)$ .

7. Найти температуру круглого бесконечного цилиндра радиуса  $a$  при условии, что на его поверхности поддерживается температура, равная нулю, а начальная температура равна

$$u|_{t=0} = U_0 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right).$$

8. Изучить осесимметричные колебания круглой мембраны радиуса  $a$ , вызванные ударным импульсом  $P$ , приложенным в момент  $t = 0$  и распределенным по площади круга радиуса  $\varepsilon$ .

*Указание:* начальные условия задачи имеют вид ( $\rho$  — поверхностная плотность мембраны)

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \begin{cases} v_0 = \frac{P}{\pi \varepsilon^2 \rho}, & 0 \leq r < \varepsilon, \\ 0, & \varepsilon < r \leq a. \end{cases}$$

9. Дать общее решение задачи о колебаниях кольцевой мембраны, закрепленной по окружностям  $r = a$  и  $r = b$ , при произвольных начальных условиях:

$$u|_{t=0} = f(r), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(r).$$

10. Исследовать свободные упругие поперечные колебания круглой плиты радиуса  $a$  с жестко закрепленным краем при произвольных начальных условиях:

$$u|_{t=0} = f(r), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(r).$$

11. На круглую мембрану, закрепленную по краю, действует внешняя гармоническая сила  $q(x, t) = A \rho \sin(\omega t)$ , непрерывно распределенная по всей площади мембраны. Проверить, что вынужденные колебания мембраны выражаются равенством ( $R$  — радиус мембраны)

$$u = \frac{A}{\omega^2} \left\{ \frac{J_0\left(\frac{\omega}{v}r\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{v}R\right)} - 1 \right\} \sin(\omega t).$$

12. Разложить в ряд по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля

$$\frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) + \lambda xy = 0, \quad y|_{x=a} = 0, \quad y|_{x=0} = O(1)$$

следующие функции: а)  $f(x) = 1$ ; б)  $f(x) = a^2 - x^2$ .

13. Найти закон выравнивания заданного осесимметричного начального распределения температуры  $u(r, 0) = f(r)$  в бесконечном цилиндре радиуса  $r = a$ , боковая поверхность которого не пропускает тепло.

14. Цилиндр радиуса  $a$  нагрет до температуры  $T_0$  и охлаждается с поверхности таким образом, что ее температура, начиная с момента времени  $t = 0$ , поддерживается постоянной и равной нулю. Найти закон охлаждения цилиндра, считая, что распределение температуры во всех поперечных сечениях одинаково.

15. Найти температуру круглого бесконечного цилиндра радиуса  $a$  при условии, что на его поверхности происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна нулю, а начальная температура равна  $u|_{t=0} = f(r)$ ,  $0 \leq r \leq a$ . Рассмотреть, в частности, случай, когда  $f(r) = U_0 \equiv \text{const}$ .

16. Цилиндр с радиусом  $R$  и высотой  $h$  имеет во все время опыта температуру нижнего основания и боковой поверхности, равную  $0^\circ\text{C}$ , а температура верхнего основания есть определенная функция от  $r$ . Найти стационарную температуру в внутренних точках цилиндра.

*Указание:* для решения задачи необходимо отыскать такой интеграл уравнения Лапласа, который удовлетворял бы условиям  $u|_{r=0} = O(1)$ ,  $u|_{z=0} = 0$ ,  $u|_{r=R} = 0$ ,  $u|_{z=h} = f(r)$ ,  $0 < r < R$ .

17. Решить задачу 16 в предположении, что боковая поверхность цилиндра покрыта непроницаемым для теплоты чехлом.

*Указание:* третье из пограничных условий, указанных в задаче 16, заменить следующим  $\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = 0$ .

18. Решить задачу 16 в предположении, что боковая поверхность цилиндра свободно охлаждается в воздух, имеющий температуру  $0^\circ\text{C}$ .

*Указание:* пограничное условие на боковой поверхности имеет вид условий третьего рода  $\left. \frac{\partial u}{\partial r} + h_1 u \right|_{r=R} = 0$ .

19. Центр круглой мембраны отклонен при  $t = 0$  на малую высоту  $h$ . Начальные скорости точек мембраны равны нулю. Исследовать колебания мембраны.

*Указание:* начальные условия имеют вид  $u|_{t=0} = h \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)$ ,  $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$ .

20. Цилиндр, радиус основания которого  $R$  и высота  $h$ , имеет температуру обоих оснований, равную  $0^\circ\text{C}$ , а температура боковой поверхности есть данная функция от  $z$ . Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра.

21. Разложить функцию  $f(x)$  на интервале  $(-1, 1)$  в ряд Фурье по полиномам Лежандра, если

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

#### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

**Пример 1.** Разложить функцию  $f(x) = 1 - \frac{x^2}{b^2}$  на отрезке  $[0, b]$  в ряд по собственным функциям  $y_n(x) = J_0\left(\frac{\alpha_n x}{b}\right)$ , где  $\alpha_n$  —  $n$ -й по величине нуль функции  $J_0(x)$ .

*Решение.* Функции  $y_n(x) = J_0\left(\frac{\alpha_n x}{b}\right)$  являются собственными функциями краевой задачи (4.51), (4.52), рассмотренной в п. 4.10. Эти функции ортогональны на отрезке  $[0, b]$  с весом  $\rho(x) = x$ , причем, как мы знаем, квадрат нормы

$$\left\| J_0\left(\frac{\alpha_n x}{b}\right) \right\|^2 = \int_0^b x J_0^2\left(\frac{\alpha_n x}{b}\right) dx = \frac{b^2}{2} J_1^2(\alpha_n).$$

Находим коэффициенты разложения

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{b^2} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\frac{\alpha_n x}{b}\right)$$

по формуле

$$C_n = \frac{2}{b^2 J_1^2(\alpha_n)} \int_0^b x f(x) J_0\left(\frac{\alpha_n x}{b}\right) dx.$$

Интеграл, стоящий справа в последней формуле, мы уже вычисляли (см. п. 4.12, формула (4.70) и далее). Таким образом, будем иметь

$$C_n = \frac{8}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)},$$

и, следовательно,

$$1 - \frac{x^2}{b^2} = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\alpha_n x}{b}\right)}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)}.$$

Продемонстрируем, как этот пример решается в Maple. Задаем уравнение:

`>eq:=diff(x*diff(y(x),x),x)+lambda*x*y(x)=0;`

$$eq := \frac{d}{dx} y(x) + x \left( \frac{d^2}{dx^2} y(x) \right) + \lambda x y(x) = 0$$

Находим общее решение этого уравнения, учитывая ограниченность функции в нуле:

`>sol := dsolve({eq, y(0) < infinity}, y(x));`

$$sol := y(x) = \_C2 \text{BeesselJ}(0, \sqrt{\lambda} x)$$

Используем граничное условие при  $x = b$ . Получаем уравнение для определения собственных значений задачи Штурма — Лиувилля:

`>eq1:=subs(x=b,rhs(sol))/_C2=0;`

$$eq1 := \text{BeesselJ}(0, \sqrt{\lambda} b) = 0$$

Пусть  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  — последовательные положительные корни уравнения  $J_0(x) = 0$ , тогда собственные значения будут  $\lambda_n = \left(\frac{\alpha_n}{b}\right)^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$  Таким образом, основное уравнение для определения собственных значений будет:



>eq1:=subs(lambda^(1/2)\*b=alpha,eq1);

$$eq1 := \text{BesselJ}(0, \alpha) = 0$$

Определяем теперь собственные функции:

>Yn:=(x,n)->BesselJ(0,alpha[n]\*x/b);

$$Y_n := (x, n) \rightarrow \text{BesselJ}\left(0, \frac{\alpha_n x}{b}\right)$$

Сделаем проверку. Проверяем дифференциальное уравнение:

> y:= 'y' :Yn(x,n):

expand(subs(lambda=(alpha[n]/b)^2,y(x)=%,eq));

simplify(%);

$$0 = 0$$

Проверяем граничное условие:

>subs(alpha=alpha[n],eq1):simplify(Yn(b,n),{%=})=0;

$$0 = 0$$

Все в порядке.

Проверим ортогональность собственных функций на отрезке  $[0, b]$  с весом  $\rho(x) = x$ :

>Int(x\*Yn(x,n)\*Yn(x,m),x=0..b);

intJ:=simplify(value(%)) assuming m::posint,n::posint;

$$\int_0^b x \text{BesselJ}\left(0, \frac{\alpha_n x}{b}\right) \text{BesselJ}\left(0, \frac{\alpha_m x}{b}\right) dx$$

$$\text{intJ} := -\frac{1}{\alpha_m^2 - \alpha_n^2} (b^2 (\text{BesselJ}(1, \alpha_n) \alpha_n \text{BesselJ}(0, \alpha_m) - \text{BesselJ}(0, \alpha_m) \text{BesselJ}(1, \alpha_m) \alpha_m))$$

Упростим результат с учетом характеристического уравнения:

>e1:=subs(alpha=alpha[n],eq1);

e2:=subs(alpha=alpha[m],eq1);simplify(intJ,{e1,e2});

$$e1 := \text{BesselJ}(0, \alpha_n) = 0$$

$$e2 := \text{BesselJ}(0, \alpha_m) = 0$$

$$0$$

Вычисляем квадрат нормы собственных функций:

>Norma2:=Int(x\*Yn(x,n)^2,x=0..b);

Norma2:=simplify(value(Norma2),{e1});

$$\text{Norma2} := \int_0^b x \text{BesselJ}\left(0, \frac{\alpha_n x}{b}\right)^2 dx$$

$$\text{Norma2} := \frac{1}{2} b^2 \text{BesselJ}(1, \alpha_n)^2$$

Отдельно следует проверить случай  $\lambda = 0$ . Мы предоставляем читателю самостоятельную возможность убедиться в том, что  $\lambda = 0$  не является собственным значением задачи.

Приступим теперь к разложению заданной функции на отрезке  $[0, b]$ . Определим функцию в Maple:

```
>f:=x->1-x^2/b^2;
```

$$f := x \rightarrow 1 - \frac{x^2}{b^2}$$

Вычислим коэффициенты разложения:

```
>Cn:=Int(x*f(x)*Yn(x,n),x=0..b)/Norma2;
```

$$C_n := \frac{2 \left( \int_0^b x \left( 1 - \frac{x^2}{b^2} \right) \text{BesselJ} \left( 0, \frac{\alpha_n x}{b} \right) dx \right)}{b^2 \text{BesselJ} \left( 1, \alpha_n \right)^2}$$

```
>Cn:=simplify(value(Cn),{e1});
```

$$C_n := \frac{8}{\text{BesselJ} \left( 1, \alpha_n \right) \alpha_n^3}$$

```
>C:=unapply(Cn,n);
```

$$C := n \rightarrow \frac{8}{\text{BesselJ} \left( 1, \alpha_n \right) \alpha_n^3}$$

И наконец, запишем формулу разложения в виде суммы первых  $N$  членов ряда:

```
>F:=(x,N,alpha)->sum(C(n)*Yn(x,n),n=1..N);f(x)=F(x,N,alpha);
```

$$F := (x, N, \alpha) \rightarrow \sum_{n=1}^N C(n) Y_n(x, n)$$

$$1 - \frac{x^2}{b^2} = \sum_{n=1}^N \frac{8 \text{BesselJ} \left( 0, \frac{\alpha_n x}{b} \right)}{\text{BesselJ} \left( 1, \alpha_n \right) \alpha_n^3}$$

Проверим на численном примере полученный результат. Вычислим, например, первые десять корней функции Бесселя:

```
>N:=10:alpha:=array(1..N):
```

```
s:=BesselJZeros(0, 1..N):evalf(s):
```

```
seq(alpha[i]=s[i],i=1..N);assign(%);
```

$$\alpha_1 = 2,4048, \alpha_2 = 5,5201, \alpha_3 = 8,6537, \alpha_4 = 11,792, \alpha_5 = 14,931,$$

$$\alpha_6 = 18,071, \alpha_7 = 21,212, \alpha_8 = 24,352, \alpha_9 = 27,493, \alpha_{10} = 30,635.$$

Зададим интервал разложения, например,

```
>b:=3;
```

$$b := 3$$

Построим графики функций (рис. 4.9):

```
>p1:=plot(f(x),x=0..b,color=black,legend=' функция f(x)');
p2:=plot(F(x,N,alpha),x=0..b,style=point,symbol=circle,
symbolsize=15,font=[Times,roman,14],
labelfont=[Helvetica,roman,14],
legendstyle=[font=["HELVETICA",14],
location = right],numpoints=15,tickmarks=[5,10],
legend=cat(' сумма при N=',convert(N,string))):
plots[display]({p1,p2},gridlines=true);
```

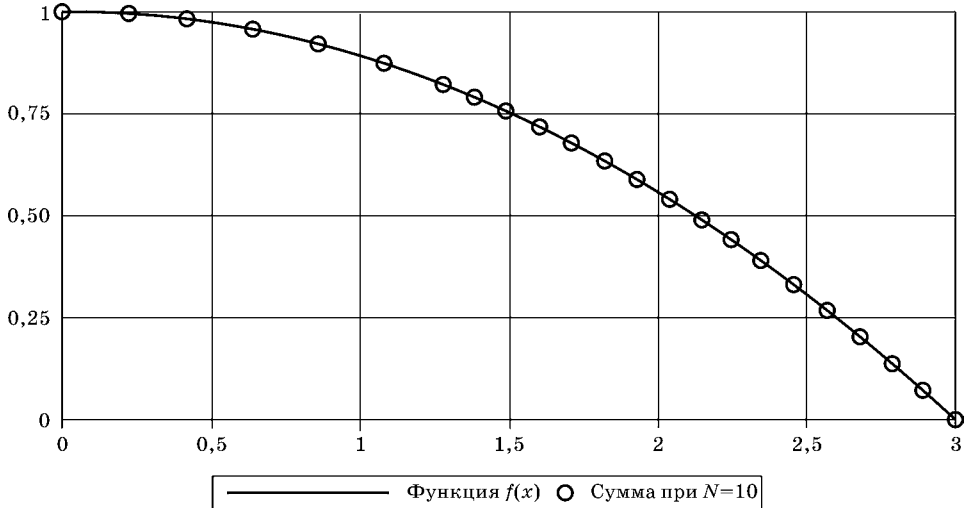


Рис. 4.9  
Сравнение функции и частичной суммы ряда

**Пример 2.** Решить уравнение колебаний круглой мембраны

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

при краевом условии (мембрана закреплена по контуру)

$$u|_{r=b} = 0$$

и начальных условиях:

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right).$$

*Решение.* Краевые и начальные условия не зависят от  $\varphi$ , можно ожидать, что и решение не будет зависеть от  $\varphi$ . Поэтому будем искать решение в виде  $u(r, t) = R(r)T(t)$ . Функции  $R(r)$  являются при этом собственными функциями краевой задачи

$$r \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{dR}{dr} + \lambda r R = 0, \quad R(0) = O(1), \quad R(b) = 0.$$

Как было найдено в задаче (4.51)–(4.52), рассмотренной в п. 4.10, собственные значения и собственные функции будут

$$\lambda_n = \left(\frac{\alpha_n}{b}\right)^2, \quad R_n(r) = J_0\left(\frac{\alpha_n r}{b}\right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где  $\alpha_n$  —  $n$ -й положительный корень уравнения  $J_0(x) = 0$ .

Функция  $T(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \lambda v^2 T(t) = 0$$

при  $\lambda = \lambda_n$ , общее решение которого имеет вид

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\alpha_n v}{b} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\alpha_n v}{b} t\right).$$

Очевидно,  $A_n = 0, \forall n$ , так как при  $t = 0$  должно быть  $u(r, 0) = 0$ . Таким образом, получаем решение задачи в виде

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{\alpha_n v}{b} t\right) J_0\left(\frac{\alpha_n r}{b}\right),$$

причем коэффициенты разложения вычисляются по формуле (см. пример 1)

$$B_n = \frac{b}{v \alpha_n \left\| J_0\left(\frac{\alpha_n r}{b}\right) \right\|^2} \int_0^b r \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) J_0\left(\frac{\alpha_n r}{b}\right) dr = \frac{b}{v \alpha_n} \frac{8}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$u(r, t) = \frac{8b}{v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^4 J_1(\alpha_n)} \sin\left(\frac{\alpha_n v}{b} t\right) J_0\left(\frac{\alpha_n r}{b}\right).$$

**Пример 3.** Исследовать поперечные упругие колебания круглой плиты радиуса  $a$  с закрепленным краем при произвольных начальных условиях:

$$u|_{t=0} = f(r), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(r).$$

*Решение.* Задача сводится к интегрированию уравнения колебаний плиты в полярных координатах

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] \right\} + \frac{1}{b^4} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad b = \frac{D}{\rho h}, \quad 0 \leq r < a, \quad t > 0,$$

с заданными начальными условиями и с краевыми условиями:

$$u|_{r=a} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0.$$

Здесь  $D$  — цилиндрическая жесткость плиты;  $\rho$  — плотность материала плиты;  $h$  — толщина плиты.

Для решения задачи используем систему Maple:

>restart;with(linalg):

Задаем уравнение поперечных колебаний плиты в полярных координатах

>pde:=1/r\*Diff(r\*Diff(1/r\*Diff(r\*Diff(u(r,t),r),r),r),r)+  
Diff(u(r,t),t,t)/b^4=0;

$$pde := \frac{\frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( \frac{\partial}{\partial r} u(r,t) \right) \right) \right) \right) \right) \right)}{r} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(r,t) = 0$$

Задаем начальные и граничные условия:

>init\_c:=u(r,0)=f(r),D[2](u)(r,0)=g(r);

$$init\_c := u(r, 0) = f(r), \quad D_2(u) = g(r)$$

>bound\_c:=u(a,t)=0,D[1](u)(a,t)=0;

$$bound\_c := u(a, t) = 0, \quad D_1(u)(a, t) = 0$$

>ic1:=rhs(init\_c[1]);ic2:=rhs(init\_c[2]);

$$ic1 := f(r)$$

$$ic2 := g(r)$$

Разделяем переменные в исходном уравнении:

>pde\_sol:=pdsolve(pde,u(r,t),HINT=R(r)\*T(t));

$$pde\_sol := (u(r, t) = R(r)T(t)) \& \text{ where } \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^4}{dr^4} R(r) = R(r) - c_1, \\ \frac{2 \left( \frac{d^3}{dr^3} R(r) \right) r^2 - \left( \frac{d^2}{dr^2} R(r) \right) r + \frac{d}{dr} R(r)}{r^3}, \frac{d^2}{dt^2} T(t) = -T(t) b^4 - c_1 \end{array} \right\}$$

>eq1:=op(1,op(1,op(2,pde\_sol)));

eq2:=op(2,op(1,op(2,pde\_sol)));

$$eq1 := \frac{d^2}{dt^2} T(t) = -T(t) b^4 - c_1$$

$$eq2 := \frac{d^4}{dr^4} R(r) = R(r) - c_1 - \frac{2 \left( \frac{d^3}{dr^3} R(r) \right) r^2 - \left( \frac{d^2}{dr^2} R(r) \right) r + \frac{d}{dr} R(r)}{r^3}$$

Формулируем соответствующую задачу Штурма — Лиувилля:

>eq2:=subs(\_c[1]=lambda,eq2);s1:=R(a)=0;s2:=D(R)(a)=0;

$$eq2 := \frac{d^4}{dr^4} R(r) = R(r) \lambda - \frac{2 \left( \frac{d^3}{dr^3} R(r) \right) r^2 - \left( \frac{d^2}{dr^2} R(r) \right) r + \frac{d}{dr} R(r)}{r^3}$$

$$s1 := R(a) = 0$$

$$s2 := D(R)(a) = 0$$

Решаем эту задачу. Сначала находим общее, ограниченное в нуле решение уравнения Штурма — Лиувилля, т. е.

```
>res1:=dsolve({eq2,R(0)<infinity},R(r));
```

$$res1 := R(r) = \_C2 \text{BesselJ}(0, \lambda^{1/4}r) + \_C4 \text{BesselJ}\left(0, \sqrt{-\sqrt{\lambda}r}\right)$$

```
>simplify(%) assuming lambda>0;
```

$$R(r) = \_C2 \text{BesselJ}(0, \lambda^{1/4}r) + \_C4 \text{BesseI}(0, \lambda^{1/4}r)$$

Определяем функцию как

```
>R:=r->C1*BesselJ(0,lambda^(1/4)*r)+
C2*BesselI(0,lambda^(1/4)*r);
```

$$R := r \rightarrow C1 \text{BesselJ}(0, \lambda^{1/4}r) + C2 \text{BesseI}(0, \lambda^{1/4}r)$$

Формируем систему пограничных уравнений и находим ее определитель

```
>sist:={s1,s2}:
genmatrix(sist,{C1,C2});
```

$$\begin{bmatrix} \text{BesselJ}(0, \lambda^{1/4}a) & \text{BesseI}(0, \lambda^{1/4}a) \\ -\text{BesselJ}(1, \lambda^{1/4}a)\lambda^{1/4} & \text{BesseI}(1, \lambda^{1/4}a)\lambda^{1/4} \end{bmatrix}$$

```
>Delta:=expand(det(%)/lambda^(1/4));
```

$$\Delta := \text{BesselJ}(0, \lambda^{1/4}a)\text{BesseI}(1, \lambda^{1/4}a) + \text{BesseI}(0, \lambda^{1/4}a)\text{BesselJ}(1, \lambda^{1/4}a)$$

Пусть  $\mu_k$  — положительные корни уравнения  $\Delta = 0$ . Найдем соответствующие собственные функции:

```
>sist[1];C2:=solve(sist[1],C2);
```

$$C1 \text{BesselJ}(0, \lambda^{1/4}a) + C2 \text{BesseI}(0, \lambda^{1/4}a) = 0$$

$$C2 := -\frac{C1 \text{BesselJ}(0, \lambda^{1/4}a)}{\text{BesseI}(0, \lambda^{1/4}a)}$$

```
>simplify(R(r));
```

$$-\frac{1}{\text{BesseI}(1, \lambda^{1/4}a)}(C1(\text{BesseI}(0, \lambda^{1/4}r)\text{BesselJ}(0, \lambda^{1/4}a) - \text{BesseI}(0, \lambda^{1/4}a)\text{BesselJ}(0, \lambda^{1/4}a)))$$

```
>simplify(%*BesselI(0,lambda^(1/4)*a)/C1);
```

```
subs(lambda^(1/4)=mu[k]/a,%);
```

$$-\text{BesseI}\left(0, \frac{\mu_k r}{a}\right) \text{BesselJ}(0, \mu_k) + \text{BesseI}(0, \mu_k) \text{BesselJ}\left(0, \frac{\mu_k r}{a}\right)$$

Таким образом, собственные функции и собственные значения задачи Штурма — Лиувилля есть

>R:=unapply(%k,r);ev:=k->(mu[k]/a)^4;

R := (k, r) → -BesselI(0,  $\frac{\mu_k r}{a}$ )BesselJ(0,  $\mu_k$ ) + BesselI(0,  $\mu_k$ )BesselJ(0,  $\frac{\mu_k r}{a}$ )

ev := k →  $\frac{\mu_k^4}{a^4}$

Собственные функции ортогональны в промежутке  $[0, a]$  с весом  $r$ , действительно

>A:=int(r\*R(m,r)\*R(n,r),r=0..a):

e1:=subs(lambda^(1/4)\*a=mu[m],expand(Delta))=0:

e2:=subs(lambda^(1/4)\*a=mu[n],expand(Delta))=0:

simplify(A,{e1,e2});

0

Определим квадрат нормы собственных функций:

>simplify(int(r\*R(n,r)^2,r=0..a),{e2});

$a^2 \text{BesselJ}(0, \mu_n)^2 \text{BesselI}(0, \mu_n)^2 -$

$-\text{BesselJ}(0, \mu_n) \text{BesselI}(0, \mu_n) a^2 \text{hypergeom}\left(\left[\right], \left[1, 1, \frac{3}{2}\right], -\frac{1}{64} \mu_n^4\right)$

В предыдущих версиях Maple не справлялся с вычислением этого интеграла (версии 6, 7, 8). Прошло десять лет с момента предыдущего издания книги [8]. Теперь (версии 17, 18) Maple выдает ответ для нашего интеграла, но, к сожалению, через гипергеометрическую функцию hypergeom. Оказывается, что слагаемое, содержащее гипергеометрическую функцию, равно нулю. Maple по-прежнему не справляется с вычислением этого интеграла.

Покажем теперь, как можно найти норму собственных функций [18]. Значение интеграла

$$\int_0^a r R_{\mu_n}^2(r) dr,$$

$$R_{\mu_n}(r) = I_0(\mu_n) J_0\left(\frac{\mu_n r}{a}\right) - J_0(\mu_n) I_0\left(\frac{\mu_n r}{a}\right),$$

где  $\mu_n$  — положительные корни уравнения  $I_1(\mu) J_0(\mu) + J_1(\mu) I_0(\mu) = 0$ , может быть найдено из соотношения

$$\int_0^a r R_{\mu_n}^2(r) dr = \frac{a^6}{4} \left\{ \left( \frac{d^2 R_{\mu_n}}{dr^2} \right)^2 - \frac{dR_{\mu_n}}{dr} \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR_{\mu_n}}{dr} \right) \right] - \frac{1}{\mu_n} \frac{dR_{\mu_n}}{dr} \frac{d^2 R_{\mu_n}}{dr^2} - \frac{dR_{\mu_n}}{dr} \frac{d^3 R_{\mu_n}}{dr^3} \right\} \Bigg|_{r=a},$$

которое принимает вид

$$\int_0^a r R_{\mu_n}^2(r) dr = \frac{a^6}{4} \left( \frac{d^2 R_{\mu_n}}{dr^2} \right)^2 = a^2 I_0^2(\mu_n) J_0^2(\mu_n).$$

Указанное соотношение может быть получено с использованием уравнения, которому удовлетворяют функции, точно также как была получена формула (4.65). Читателю мы предоставляем все необходимые выкладки проделывать самостоятельно.

Отметим, что, например, в системе аналитических вычислений Mathematica квадрат нормы наших собственных функций вычисляется. Действительно, продемонстрируем вычисления в системе Mathematica:

```
Clear[Evaluate[Context[]<>"*"]]
e2=BesselJ[0,mu[n]]*BesselI[1,mu[n]]+
BesselI[0,mu[n]]*BesselJ[1,mu[n]]==0;
R[k_,r_]=BesselI[0,mu[k]]*BesselJ[0,mu[k]*r/a]-
BesselI[0,mu[k]*r/a]*BesselJ[0,mu[k]];
A=Integrate[r*R[n,r]^2,{r,0,a}];
A=FullSimplify[A,{e2}]
a^2BesselI[0,mu[n]]^2 BesselJ[0,mu[n]]^2
```

Вернемся в Maple. Таким образом, квадрат нормы определяется по формуле

$$N2:=a^2*BesselJ(0,mu[n])^2*BesselI(0,mu[n])^2;$$

$$N2:=a^2BesselJ(0,\mu_n)^2BesselI(0,\mu_n)^2$$

Решаем теперь второе уравнение

```
>subs(_c[1]=lambda,eq1);
```

$$\frac{d^2}{dt^2}T(t)=-T(t)b^4\lambda$$

```
>res2:=dsolve(%,T(t));
```

$$res2:=T(t)=-C1\sin(b^2\sqrt{\lambda}t)+_C2\cos(b^2\sqrt{\lambda}t)$$

```
>T:=unapply(
```

```
subs(lambda^(1/2)=(mu[k]/a)^2,
_C1=B1(k),_C2=B2(k),rhs(res2)),k,t);
```

$$T := (k, t) \rightarrow B1(k)\sin\left(\frac{b^2\mu_k^2t}{a^2}\right) + B2(k)\cos\left(\frac{b^2\mu_k^2t}{a^2}\right)$$

Таким образом, решение нашей задачи строим в виде ряда

```
>u:=(r,t)->Sum(T(k,t)*R(k,r)',k=1..infinity);
```

$$u := (r, t) \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} T(k, t)'R(k, r)'$$

Для определения коэффициентов  $B1(k)$  и  $B2(k)$  воспользуемся начальными условиями:

```
>u(r,0)=ic1;
```

$$\sum_{k=1}^{\infty} B2(k)R(k, r) = f(r)$$



>algsbss(t=0,diff(u(r,t),t))=ic2;

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B1(k)b^2\mu_k^2 R(k,r)}{a^2} = g(r)$$

Откуда находим

>Int(ic1\*r\*\*R(n,r)',r=0..a)/N2;

$$\frac{\int_0^a f(r)rR(n,r)dr}{a^2 \text{BesselJ}(0, \mu_n)^2 \text{BesselI}(0, \mu_n)^2}$$

>B2:=n-> Int(f(r)\*r\*\*R(n,r)',r=0..a)/

(a^2\*BesselJ(0,mu[n])^2\*BesselI(0,mu[n])^2);

$$B2 := n \rightarrow \frac{\int_0^a f(r)r'R(n,r)'dr}{a^2 \text{BesselJ}(0, \mu_n)^2 \text{BesselI}(0, \mu_n)^2}$$

>Int(ic2\*r\*\*R(k,r)',r=0..a)\*a^2/b^2/mu[k]^2/N2;

$$\frac{\int_0^a g(r)rR(k,r)dr}{b^2\mu_k^2 \text{BesselJ}(0, \mu_n)^2 \text{BesselI}(0, \mu_n)^2}$$

>B1:=n->(Int(g(r)\*r\*\*R(k,r)',r=0..a)/

(b^2\*mu[k]^2\*BesselJ(0,mu[n])^2\*BesselI(0,mu[n])^2);

$$B1 := n \rightarrow \frac{\int_0^a g(r)r'R(k,r)'dr}{b^2\mu_k^2 \text{BesselJ}(0, \mu_n)^2 \text{BesselI}(0, \mu_n)^2}$$

Окончательно получаем

>'u(r,t)'=u(r,t);'R(k,r)'=R(k,r);

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\left( \int_0^a g(r)rR(k,r)dr \right) \sin\left(\frac{b^2\mu_k^2 t}{a^2}\right)}{b^2\mu_k^2 \text{BesselJ}(0, \mu_k)^2 \text{BesselI}(0, \mu_k)^2} + \frac{\left( \int_0^a f(r)rR(k,r)dr \right) \cos\left(\frac{b^2\mu_k^2 t}{a^2}\right)}{a^2 \text{BesselJ}(0, \mu_k)^2 \text{BesselI}(0, \mu_k)^2} \right) R(k,r)$$

Итак, решение нашей задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
 u(r, t) &= \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{\mu_n}(r)}{I_0^2(\mu_n) J_0^2(\mu_n)} \left[ \cos\left(\frac{\mu_n^2 b^2 t}{a^2}\right) \int_0^a r f(r) R_{\mu_n}(r) dr + \right. \\
 &+ \left. \frac{a^2}{\mu_n^2 b^2} \sin\left(\frac{\mu_n^2 b^2 t}{a^2}\right) \int_0^a r g(r) R_{\mu_n}(r) dr \right], \\
 R_{\mu_n}(r) &= I_0(\mu_n) J_0\left(\frac{\mu_n r}{a}\right) - J_0(\mu_n) I_0\left(\frac{\mu_n r}{a}\right),
 \end{aligned}$$

где  $\mu_n$  — положительные корни уравнения

$$I_1(\mu) J_0(\mu) + J_1(\mu) I_0(\mu) = 0.$$

# 5

## НЕОДНОРОДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

### ГЛАВА

До сих пор мы рассматривали *однородные задачи* математической физики с разделяющимися переменными: основное разрешающее уравнение задачи и обязательно дополнительные условия (начальные или граничные условия) по одной из переменных были однородными.

В этой главе мы приступаем к изучению методов решения *неоднородных задач* математической физики с разделяющимися переменными.

Неоднородные задачи характерны тем, что они описываются неоднородным уравнением и неоднородными дополнительными условиями — граничными и начальными. Это означает, что правые части уравнений — не нули, а заданные функции. Левые части уравнений сохраняют структуру однородной задачи. Ясно, что к таким задачам метод Фурье разделения переменных неприменим.

Для решения неоднородных задач служат два метода:

- 1) метод приведения к однородной задаче;
- 2) метод Гринберга или метод конечных интегральных преобразований.

### 5.1. МЕТОД ПРИВЕДЕНИЯ К ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧЕ

Рассмотрим применение метода приведения к однородной задаче на примерах. Сущность метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде суммы двух функций  $u = u_1 + u_2$ , причем одна из них подбирается так, чтобы уравнение для нее и граничные условия по одной из переменных были однородными. Этот метод требует применения искусственных приемов. Его целесообразно использовать в простых случаях, когда легко бывает выделить частное решение.

#### ЗАДАЧА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ

Рассмотрим бесконечную по координатам  $y$  и  $z$  пластину толщины  $a$  (рис. 5.1).

Пусть задано начальное распределение температуры; одна стенка пластины  $x = 0$  поддерживается при постоянной температуре  $T_0$ , другая  $x = a$  — при нулевой температуре. Требуется найти закон распределения температуры в пластине.

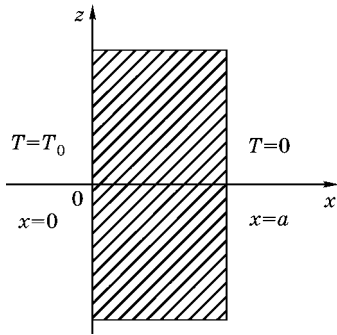


Рис. 5.1  
Задача о распределении температуры в пластине

Математическая формулировка задачи:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0, \quad 0 < x < a, \quad \tau = \frac{kt}{c\rho}, \quad \tau > 0; \quad (5.1)$$

$$T|_{x=0} = T_0, \quad T|_{x=a} = 0; \quad (5.2)$$

$$T|_{\tau=0} = \varphi(x). \quad (5.3)$$

Будем искать решение задачи (5.1)–(5.3) в виде

$$T = T_1(x) + T_2(x, \tau).$$

Функцию  $T_1(x)$  выбираем так, чтобы она удовлетворяла уравнению (5.1) и граничным условиям (5.2). Тогда будем иметь следующую задачу для определения функции  $T_1(x)$ :

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = 0, \quad T_1|_{x=0} = T_0, \quad T_1|_{x=a} = 0. \quad (5.4)$$

Решением задачи (5.4), очевидно, будет функция

$$T_1(x) = T_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right),$$

которая описывает стационарное распределение температуры. (Проверьте!)

Для определения функции  $T_2(x, \tau)$  будем иметь следующую *однородную* задачу:

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial \tau} = 0; \quad (5.5)$$

$$T_2|_{x=0} = 0, \quad T_2|_{x=a} = 0; \quad (5.6)$$

$$T_2|_{\tau=0} = \varphi(x) - T_1(x). \quad (5.7)$$

Здесь  $\varphi(x) - T_1(x) = \varphi(x) - T_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right)$  — заданная функция. Задача (5.5)–(5.7) может быть решена методом Фурье разделения переменных.

### ЗАДАЧА О НАГРЕВАНИИ БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА

Через цилиндр (рис. 5.2) пропускается электрический ток, который выделяет тепло плотностью  $Q = \text{const}$ . Температура на поверхности цилиндра поддерживается равной нулю. Требуется найти закон распределения температуры в цилиндре.

Математическая формулировка задачи:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\frac{Q}{k}, \quad 0 < r < a, \quad \tau > 0; \quad (5.8)$$

$$T|_{r \rightarrow 0} = O(1), \quad T|_{r=a} = 0; \quad (5.9)$$

$$T|_{\tau=0} = \varphi(r). \quad (5.10)$$

Здесь  $\varphi(r)$  — заданное начальное распределение температуры.

Ищем решение задачи (5.8)–(5.10) в виде

$$T = T_1(r) + T_2(r, \tau),$$

где  $T_1(r)$  — стационарное распределение температуры.

Требуем, чтобы функция  $T_1(r)$  удовлетворяла уравнению (5.8) и граничным условиям (5.9). Тогда для определения  $T_1(r)$  будем иметь следующую задачу:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT_1}{dr} \right) &= -\frac{Q}{k}, \\ T_1|_{r \rightarrow 0} &= O(1), \quad T_1|_{r=a} = 0. \end{aligned} \right\}$$

Откуда находим (проверьте!)

$$T_1 = \frac{Qa^2}{4k} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right).$$

Для функции  $T_2(r, \tau)$  будем иметь следующую *однородную* задачу:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) - \frac{\partial T_2}{\partial \tau} = 0, \quad 0 < r < a, \quad \tau > 0; \quad (5.11)$$

$$T_2|_{r \rightarrow 0} = O(1), \quad T_2|_{r=a} = 0; \quad (5.12)$$

$$T_2|_{\tau=0} = \varphi(r) - T_1(r). \quad (5.13)$$

Функция  $\varphi(r) - T_1(r) = \varphi(r) - \frac{Qa^2}{4k} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)$  задана.

Задача (5.11)–(5.13) может быть решена методом Фурье.

**ЗАДАЧА  
О ВЫНУЖДЕННЫХ  
КОЛЕБАНИЯХ  
КРУГЛОЙ МЕМБРАНЫ**

Мембрана закреплена по контуру и колеблется под действием осесимметричной нагрузки (рис. 5.3)

$$q = q(r) \sin(\omega t).$$

Требуется установить закон вынужденных колебаний мембраны.

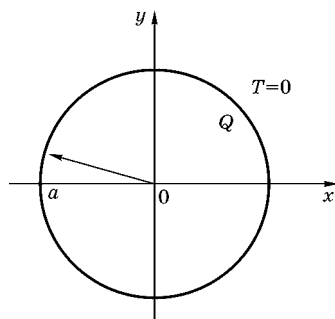


Рис. 5.2  
Задача о нагревании цилиндра

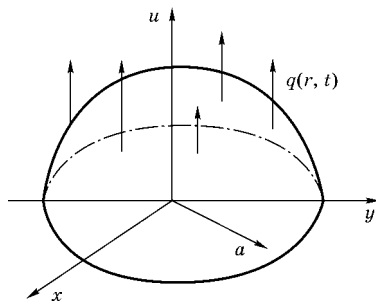


Рис. 5.3  
Колебания круглой мембраны

Математическая постановка задачи: найти функцию  $u(r, t)$ , удовлетворяющую уравнению колебаний

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{q(r)}{T_0} \sin(\omega t), \quad 0 < r < a, \quad t > 0, \quad v^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad (5.14)$$

где  $T_0$  — натяжение;  $\rho$  — плотность мембраны, и дополнительным условиям:

$$u|_{r \rightarrow 0} = O(1), \quad u|_{r=a} = 0; \quad (5.15)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(r), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(r), \quad (5.16)$$

где  $\varphi(r)$ ,  $\psi(r)$  — заданные функции (начальное смещение и скорость).

Будем искать решение задачи (5.14)–(5.16) в форме  $u = u_1 + u_2$ , где  $u_1 = A(r) \sin(\omega t)$ ,  $u_2 = u_2(r, t)$ . Функция  $u_1$  — установившиеся гармонические колебания. Требуем, чтобы функция  $u_1$  удовлетворяла уравнению (5.14). Тогда для определения функции  $A(r)$  будем иметь следующее уравнение:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dA(r)}{dr} \right) + \frac{\omega^2}{v^2} A(r) = -\frac{q(r)}{T_0}.$$

Кроме того, в соответствии с условиями (5.15) должны выполняться дополнительные условия:

$$A|_{r \rightarrow 0} = O(1), \quad A|_{r=a} = 0.$$

Для функции  $u_2 = u_2(r, t)$  будем иметь следующую *однородную* задачу:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_2}{\partial r} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0; \quad (5.17)$$

$$u_2|_{r \rightarrow 0} = O(1), \quad u_2|_{r=a} = 0; \quad (5.18)$$

$$u_2|_{t=0} = \varphi(r) - A(r) \sin(\omega t)|_{t=0} = \varphi(r); \quad (5.19)$$

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(r) - \left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(r) - \omega A(r). \quad (5.20)$$

Задача (5.17)–(5.20) может быть решена методом Фурье.

### ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Требуется решить следующую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$

$$u|_{x=0} = f_0(y), \quad u|_{x=a} = f_a(y);$$

$$u|_{y=0} = \varphi_0(x), \quad u|_{y=b} = \varphi_b(x).$$

Ищем решение задачи в виде  $u = u_1 + u_2$ , где  $u_1$  — решение задачи

$$\Delta u_1 = 0, \quad u_1|_{x=0} = 0, \quad u_1|_{x=a} = 0, \quad u_1|_{y=0} = \varphi_0(x), \quad u_1|_{y=b} = \varphi_b(x), \quad (5.21)$$

а  $u_2$  — решение задачи

$$\Delta u_2 = 0, \quad u_2|_{x=0} = f_0(y), \quad u_2|_{x=a} = f_a(y), \quad u_2|_{y=0} = 0, \quad u_2|_{y=b} = 0. \quad (5.22)$$

Задачи (5.21) и (5.22) — однородные. Их решения могут быть найдены методом Фурье.

Ограничимся рассмотренными примерами. Настоятельно рекомендуем читателю в качестве упражнений решить полученные в этих примерах однородные задачи методом Фурье и тем самым довести до конца решение сформулированных задач.

## 5.2. МЕТОД ГРИНБЕРГА

Метод Гринберга или метод конечных интегральных преобразований является обобщением метода Фурье на случай неоднородного уравнения и неоднородных граничных условий.

Изложим идею метода на примере следующей задачи: найти функцию  $u = u(x, y)$ , удовлетворяющую неоднородному дифференциальному уравнению в частных производных:

$$L_x(u) + M_y(u) = F(x, y), \quad a < x < b, \quad c < y < d, \quad (5.23)$$

где  $L_x$  и  $M_y$  — линейные дифференциальные операторы

$$L_x(u) = \frac{1}{r(x)} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x)u \right];$$

$$M_y(u) = A(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + B(y) \frac{\partial u}{\partial y} + C(y)u.$$

Интервал  $(a, b)$  считаем конечным; функции  $p(x)$ ,  $p'(x)$ ,  $q(x)$ ,  $r(x)$  непрерывны в интервале  $[a, b]$ , причем  $p(x) > 0$ ,  $r(x) > 0$ . Интервал  $(c, d)$  может быть конечным или бесконечным.

Кроме того, функция  $u = u(x, y)$  удовлетворяет по переменной  $x$  условиям одного из следующих типов:

$$u|_{x=a} = f_a(y), \quad u|_{x=b} = f_b(y); \quad (5.24-I)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} = f_a(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=b} = f_b(y); \quad (5.24-II)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - h_a u \Big|_{x=a} = f_a(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + h_b u \Big|_{x=b} = f_b(y), \quad h_a > 0, \quad h_b > 0. \quad (5.24-III)$$

Далее выполняются некоторые условия по переменной  $y$  — такие же, как мы рассматривали при изучении метода Фурье. Например, если  $A > 0$ , то уравнение (5.23) — эллиптического типа и ставится одно из условий первого, второго или третьего рода, т. е.

$$u|_{y=c} = \varphi_c(x), \quad u|_{x=d} = \varphi_d(x); \quad (5.25-I)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=c} = \varphi_c(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=d} = \varphi_d(x); \quad (5.25-II)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - h_c u\Big|_{x=c} = \varphi_c(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} + h_d u\Big|_{x=d} = \varphi_d(y). \quad (5.25-III)$$

Если  $A < 0$ , то тип уравнения (5.23) — гиперболический; тогда  $y \in (c, +\infty)$  и ставятся условия;

$$u|_{y=c} = \varphi(x); \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=c} = \psi(x); \quad (5.26)$$

если  $A = 0$ , то тип уравнения (5.23) — параболический;  $y \in (c, +\infty)$  и ставится условие

$$u|_{y=c} = \varphi(x). \quad (5.27)$$

Рассмотрим следующую задачу Штурма — Лиувилля, связанную с нашей задачей: найти нетривиальные решения уравнения

$$L_x(X(x)) + \lambda X(x) = 0, \quad a < x < b,$$

удовлетворяющие условиям первого, второго или третьего рода.

Или, в явном виде, найти нетривиальные решения уравнения

$$(pX')' + (\lambda r - q)X = 0, \quad (5.28)$$

подчиняющиеся граничным условиям:

$$X|_{x=a} = 0; \quad X|_{x=b} = 0,$$

либо

$$\frac{\partial X}{\partial x}\Big|_{x=a} = 0; \quad \frac{\partial X}{\partial x}\Big|_{x=b} = 0,$$

либо

$$\frac{\partial X}{\partial x} - h_a X\Big|_{x=a} = 0; \quad \frac{\partial X}{\partial x} + h_b X\Big|_{x=b} = 0.$$

При сделанных предположениях эта задача регулярна и имеет дискретный спектр собственных значений  $\lambda = \lambda_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ; пусть  $X = X_n(x)$  — собственные функции этой задачи.

Ссылаясь на общую теорию регулярной задачи Штурма — Лиувилля, можно заключить, что

$$\int_a^b r(x) X_n(x) X_m(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \|X_n(x)\|^2, & m = n, \end{cases}$$

и произвольную функцию можно разложить в ряд по собственным функциям этой задачи.



Идея метода Гринберга заключается в том, чтобы искать решение задачи (5.23)–(5.27) в виде ряда

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(y) X_n(x), \quad C_n(y) = \frac{\int_a^b r(x) u(x, y) X_n(x) dx}{\|X_n\|^2} = \frac{u_n(y)}{\|X_n\|^2}.$$

Покажем, что, исходя из первоначальных уравнений задачи, можно получить уравнения для функции  $u_n(y)$  (эта функция иногда называется *трансформантой* от функции  $u(x, y)$ ). Для того чтобы показать это, умножаем уравнение (5.23) на  $r(x)X_n(x)$  и интегрируем по интервалу  $[a, b]$ . Получим

$$\int_a^b X_n \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial u}{\partial x} \right) - qu \right] dx + \int_a^b M_y(u) r(x) X_n(x) dx = \int_a^b F(x, y) r(x) X_n(x) dx. \quad (5.29)$$

Первый интеграл слева преобразуем по частям

$$\int_a^b X_n \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dx = X_n p \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b p \frac{\partial u}{\partial x} X_n' dx = X_n p \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a}^{x=b} - p X_n' u \Big|_{x=a}^{x=b} + \int_a^b u (p X_n')' dx.$$

Теперь вместо формулы (5.29) будем иметь

$$p \left[ X_n \frac{\partial u}{\partial x} - X_n' u \right] \Big|_{x=a}^{x=b} + \int_a^b u \underbrace{[(p X_n')' - q X_n]}_{=-\lambda_n r X_n} dx + M_y \left( \int_a^b r X_n u dx \right) = \underbrace{\int_a^b F(x, y) r X_n dx}_{=F_n(y)}.$$

С учетом уравнения (5.28)

$$(p X_n')' - q X_n = -\lambda_n r X_n$$

и обозначения

$$\int_a^b F(x, y) r(x) X_n(x) dx = F_n(y)$$

получаем уравнение для трансформанты  $u_n(y)$ :

$$M_y(u_n) - \lambda_n u_n = F_n(y) - p \left[ X_n \frac{\partial u}{\partial x} - X_n' u \right] \Big|_{x=a}^{x=b}. \quad (5.30)$$

Уравнение (5.30) — обыкновенное дифференциальное уравнение относительно трансформанты  $u_n(y)$ . Здесь  $F_n(y)$  — известная функция. Покажем, что функция

$$g_n(y) = -p \left[ X_n \frac{\partial u}{\partial x} - X_n' u \right] \Big|_{x=a}^{x=b}$$

— тоже известная функция.

Для условий первого рода будем иметь:

$$g_n(y) = p(b) X_n'(b) f_b(y) - p(a) X_n'(a) f_a(y) \text{ — известная функция;}$$

для условий второго рода:

$$g_n(y) = -p(b)X_n(b)f_b(y) + p(a)X_n(a)f_a(y) \text{ — известная функция;}$$

для условий третьего рода:

$$\begin{aligned} g_n(y) &= -p(b) \left[ X_n(b) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=b} - X'_n(b)u \Big|_{x=b} \right] + p(a) \left[ X_n(a) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} - X'_n(a)u \Big|_{x=a} \right] = \\ &= -p(b)X_n(b) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + h_b u \right] \Big|_{x=b} + p(a)X_n(a) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} - h_a u \right] \Big|_{x=a} = \\ &= -p(b)X_n(b)f_b(y) + p(a)X_n(a)f_a(y) \end{aligned}$$

— известная функция.

Условия (5.25-I), (5.25-II), (5.25-III) можно трансформировать аналогичным образом. Например, для условий (5.25-I) будем иметь:

$$\begin{aligned} u_n \Big|_{y=c} &= \int_a^b \varphi_c(x)r(x)X_n(x)dx = \varphi_{cn}; \\ u_n \Big|_{y=d} &= \int_a^b \varphi_d(x)r(x)X_n(x)dx = \varphi_{dn}. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Таким образом, решив задачу (5.30), (5.31), найдем функцию  $u_n(y)$ . Окончательно получаем решение нашей задачи в виде ряда

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(y)X_n(x)}{\|X_n\|^2}. \tag{5.32}$$

Все вышесказанное переносится на случай условий четвертого рода, а также на случай сингулярной задачи, если ее спектр дискретный.

#### КРАТКАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ГРИНБЕРГА

Приведем краткую схему, которой следует придерживаться при решении задач математической физики методом Гринберга.

1. Поставить задачу Штурма — Лиувилля, связанную с рассматриваемой задачей, и найти систему собственных значений и собственных функций.
2. Трансформировать исходное уравнение в частных производных в обыкновенное дифференциальное уравнение для трансформанты  $u_n(y)$ .
3. Преобразовать граничные условия по второй переменной в условия для трансформанты  $u_n(y)$ .
4. Найти трансформанту  $u_n(y)$  и получить решение исходной задачи в виде разложения по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля.
5. Рассмотреть вопрос о сходимости полученного формального ряда и в случае необходимости улучшить ее.

## СВЯЗЬ МЕТОДА ГРИНБЕРГА С МЕТОДОМ ФУРЬЕ

Допустим, что в рассматриваемой задаче  $F(x, y) = 0$ ;  $f_a(y) = f_b(y) = 0$ , т. е. задача является однородной. Тогда, очевидно, мы будем иметь  $F_n(y) = 0$ ;  $g_n(y) = 0$ . Уравнение (5.30) принимает вид

$$M_y(u_n) - \lambda_n u_n = 0.$$

Последнее уравнение совпадает с уравнением (3.79). Следовательно, в этом случае функция  $u_n(y)$  соответствует функции  $Y_n(y)$ , рассмотренной при изложении метода Фурье (см. п. 3.12), и ряд (5.32) совпадает с разложением, полученным методом Фурье.

Таким образом, если задача однородная, то она может быть решена как методом Фурье, так и методом Гринберга, причем применение метода Гринберга приводит к совершенно таким же результатам, что и применение метода Фурье. Если же задача неоднородная, то метод Фурье неприменим.

### ЗАМЕЧАНИЯ О СХОДИМОСТИ РЯДОВ, ПОЛУЧЕННЫХ МЕТОДОМ ГРИНБЕРГА

Рассматривается краевая задача для уравнения

$$L_x(u) + M_y(u) = F(x, y), \quad a < x < b, \quad c < y < d.$$

Реализуется одно из условий

$$u|_{x=a} = f_a(y), \quad u|_{x=b} = f_b(y),$$

либо

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} = f_a(y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=b} = f_b(y),$$

либо

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} - h_a u \right|_{x=a} = f_a(y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} + h_b u \right|_{x=b} = f_b(y).$$

Будем искать решение в виде

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(y) X_n(x), \tag{5.33}$$

где  $X_n(x)$  — собственные функции, полученные из решения соответствующей задачи Штурма — Лиувилля для уравнения

$$L_x(X) + \lambda X = 0$$

при соответствующих условиях первого, второго или третьего рода.

Рассмотрим сходимость ряда (5.33). Утверждается, что ряд (5.33) не сходится равномерно во всем замкнутом интервале  $[a, b]$ . Если  $f_a(y) \neq 0$ ,  $f_b(y) \neq 0$  (одна из них или обе), то имеет место неравномерная сходимость ряда.

Действительно, допустим, ряд (5.33) сходится вплоть до точки  $x = a$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} u = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} C_n(y) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(y) X_n(a) = 0.$$

Но это невозможно, так как  $f_a(y) \neq 0$  для  $[a, b]$ .

Для  $(a, b]$  будем иметь

$$\lim_{x \rightarrow b} u = \lim_{x \rightarrow b} \sum_{n=1}^{\infty} C_n(y) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(y) X(b) = 0.$$

Последнее также невозможно, так как  $f_b(y) \neq 0$  для  $(a, b]$ .

Таким образом, если граничные условия неоднородны, то имеет место неравномерная сходимость ряда (5.33).

Источником плохой сходимости рядов является попытка разложения функции, которая удовлетворяет неоднородным условиям, в ряд по функциям, удовлетворяющим однородным условиям. Обычно считается, что  $u \in C^{(2)}((a, b))$ , поэтому внутри интервала функция  $u(x, y)$  достаточно гладкая.

### СПОСОБЫ УЛУЧШЕНИЯ СХОДИМОСТИ

Рассмотрим вспомогательную функцию  $u^* \in C^{(2)}((a, b))$ , удовлетворяющую условиям:

$$u^*|_{x=a} = f_a(y); \quad u^*|_{x=b} = f_b(y).$$

За исключением соответствия этим требованиям функция  $u^*$  может быть вполне произвольной.

Разложим функцию  $u^*$  в ряд типа (5.33) по собственным функциям  $X_n(x)$ :

$$\begin{aligned} u^* &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n^*(y) X_n(x), \quad a < x < b; \\ &\int_a^b u^* r(x) X_n(x) dx \\ C_n^* &= \frac{a}{\|X_n(x)\|^2}. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Ясно, что ряд (5.34) обладает такой же сходимостью, как и (5.33). Запишем так

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* X_n(x)}_{\text{медленно сходится}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (C_n - C_n^*) X_n(x)}_{\substack{=w \\ \text{хорошо сходится}}}. \tag{5.35}$$

Имеем

$$w = u - u^*; \quad w|_{x=a} = 0; \quad w|_{x=b} = 0.$$

Формула (5.35) дает улучшение сходимости, так как сумма ряда (5.34) нам известна (функция  $u^*$ ), а второй ряд справа хорошо сходится, функция  $w$  удовлетворяет однородным условиям.

В случае условий первого рода функцию  $u^*$  можно взять линейной по  $x$ :

$$u^* = f_a(y) + \frac{x-a}{b-a} [f_b(y) - f_a(y)].$$

Для условий второго рода функцию  $u^*$  можно выбрать квадратичной по  $x$ :

$$u^* = f_a(y)(x-a) + \frac{(x-a)^2}{2(b-a)} [f_b(y) - f_a(y)].$$

Кроме предложенного способа, можно пользоваться справочными таблицами. Рассмотрим пример. Пусть имеется ряд

$$u = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + 1} \sin(nx), \quad 0 < x < \pi.$$

Ряд, стоящий справа, обладает плохой сходимостью. Преобразуем

$$\frac{n}{n^2 + 1} = \frac{1}{n} + \frac{n}{n^2 + 1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{n^2 - n^2 - 1}{(n^2 + 1)n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n^2 + 1)}.$$

Таким образом,

$$u = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin(nx) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n^2 + 1)} \sin(nx).$$

Первый ряд справа суммируется

$$\frac{x}{\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin(nx), \quad x \in (0, \pi),$$

а второй — хорошо сходится.

### 5.3. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, РАЗРЕШИМЫХ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ГРИНБЕРГА

Здесь мы рассмотрим технику применения метода Гринберга к решению некоторых задач, сформулированных в п. 5.1.

#### ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Рассматривается следующая задача Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \quad (5.36)$$

$$u|_{x=0} = f_0(y), \quad u|_{x=a} = f_a(y); \quad (5.37)$$

$$u|_{y=0} = \varphi_0(x), \quad u|_{y=b} = \varphi_b(x). \quad (5.38)$$

Обозначим

$$L_x(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Сформулируем соответствующую задачу Штурма — Лиувилля:

$$L_x(X) + \lambda X = 0; \quad X(0) = 0; \quad X(a) = 0. \quad (5.39)$$

Как известно, собственные значения и собственные функции задачи (5.39) будут

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}; \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Ищем решение задачи (5.36)–(5.38) в виде

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(y)X_n(x),$$

причем

$$C_n(y) = \frac{\int_0^a u(x, y)X_n(x)dx}{\|X_n\|^2} = \frac{u_n(y)}{\|X_n\|^2} = \frac{2}{a}u_n(y).$$

Умножаем (5.36) на  $X_n(x)$  и интегрируем по отрезку  $[0, a]$ :

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} X_n dx + \int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} X_n dx &= 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} X_n - u X_n'\right)\Big|_0^a + \int_0^a u X_n'' dx + \frac{d^2}{dy^2} \int_0^a u X_n dx = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^2 u_n}{dy^2} - \lambda_n u_n &= f_a(y) \frac{n\pi}{a} (-1)^n - f_0(y) \frac{n\pi}{a} \Rightarrow \frac{d^2 u_n}{dy^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2} u_n = \\ &= \frac{n\pi}{a} [(-1)^n f_a(y) - f_0(y)]. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Преобразуем граничные условия по  $y$ : умножаем (5.38) на  $X_n(x)$  и интегрируем по отрезку  $[0, a]$ , получаем

$$u_n|_{y=0} = \int_0^a \varphi_0(x)X_n(x)dx = \varphi_{0n}, \quad u_n|_{y=b} = \int_0^a \varphi_b(x)X_n(x)dx = \varphi_{bn}. \quad (5.41)$$

Общее решение уравнения (5.40) имеет вид

$$u_n(y) = A_n \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + B_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + u_n^*(y),$$

где  $u_n^*(y)$  — какое-нибудь частное решение (5.40).

Условия (5.41) позволяют найти  $A_n$  и  $B_n$ , таким образом, будет определена функция  $u_n(y)$ . Тогда искомое решение задачи имеет вид

$$u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$

Рассмотрим специальный случай. Будем считать, что граничные условия имеют вид:

$$f_0(y) = 0; \quad f_a(y) = ay; \quad \varphi_0(x) = 0; \quad \varphi_b(x) = bx.$$

Будем иметь вместо уравнения (5.40) следующее уравнение:

$$\frac{d^2 u_n}{dy^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2} u_n = \frac{n\pi}{a} (-1)^n ay. \quad (5.42)$$

Условия (5.41) при этом примут вид

$$u_n|_{y=0} = 0; \quad u_n|_{y=b} = \frac{(-1)^{n-1} a^2 b}{n\pi}. \quad (5.43)$$

Общее решение уравнения (5.42) мы можем записать в виде

$$u_n(y) = A_n \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + B_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi} a^2 y.$$

Из условий (5.43) находим  $A_n = 0$  и  $B_n = 0$  (проверьте!). Таким образом,

$$u_n(y) = \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi} a^2 y.$$

Следовательно,

$$u(x, y) = \frac{2ay}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right). \quad (5.44)$$

Ряд, стоящий справа в (5.44), суммируется, а именно имеет место формула

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \frac{x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (5.45)$$

которая легко может быть получена разложением функции  $f(x) = \frac{x}{a}$  в ряд Фурье по синусам на отрезке  $[0, a]$  (проверьте!).

Таким образом, окончательно будем иметь

$$u(x, y) = xy. \quad (5.46)$$

Решение задачи методом приведения в рассматриваемом случае дает формулу (проверьте!)

$$u(x, y) = \frac{2ab}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + \frac{2ab}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Отметим, что из формулы (5.44) следует

$$u(x, y) = y\Phi(x).$$

Подставив это решение в уравнение (5.36), определим  $\Phi(x)$ .

$$\Phi''(x)y = 0 \Rightarrow \Phi''(x) = 0 \Rightarrow \Phi(x) = Mx + N.$$

Таким образом,

$$u(x, y) = (Mx + N)y,$$

где  $M, N$  — константы. Из граничных условий для  $u$  находим  $M = 1, N = 0$ . Таким образом, решение (5.46) может быть получено и без использования формулы (5.45).

**ЗАДАЧА О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ  
КРУГЛОЙ МЕМБРАНЫ**

Рассмотрим следующую задачу: найти функцию  $u(r, t)$ , удовлетворяющую уравнению колебаний

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{q(r)}{T_0} \sin(\omega t), \quad 0 < r < a, \quad t > 0, \quad v^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad (5.47)$$

где  $T_0$  — натяжение;  $\rho$  — плотность мембраны, и дополнительным условиям:

$$u|_{r \rightarrow 0} = O(1), \quad u|_{r=a} = 0;$$

$$u|_{t=0} = \varphi(r), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(r),$$

где  $\varphi(r)$ ,  $\psi(r)$  — заданные функции (начальное смещение и скорость).  
Обозначим оператор

$$L_r(u) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

Сформулируем соответствующую задачу Штурма — Лиувилля:

$$L_r(R) + \lambda R = 0 \Leftrightarrow (rR')' + \lambda Rr = 0, \quad 0 < r < a;$$

$$R|_{r \rightarrow 0} = O(1); \quad R(a) = 0.$$

Как мы знаем, собственные значения и собственные функции этой задачи будут иметь вид

$$\lambda_n = \left( \frac{\gamma_n}{a} \right)^2, \quad R_n(r) = J_0 \left( \frac{\gamma_n r}{a} \right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где  $\gamma_n$  — положительные корни уравнения  $J_0(\gamma) = 0$ .

Далее, умножив уравнение (5.47) на  $rR_n(r)$  и проинтегрировав по отрезку  $[0, a]$ , получим (обозначим  $q(r, t) = q(r)\sin(\omega t)$ )

$$\int_0^a R_n \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) dr - \frac{1}{v^2} \int_0^a r R_n \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dr = -\frac{1}{T_0} \int_0^a q(r, t) r R_n dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( R_n r \frac{\partial u}{\partial r} - R_n' r u \right) \Big|_0^a + \int_0^a u (r R_n')' dr - \frac{1}{v^2} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^a r R_n u dr = -\frac{1}{T_0} \int_0^a r R_n q(r, t) dr \Rightarrow \quad (5.48)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{v^2} \frac{d^2 u_n}{dt^2} - \lambda_n u_n = -\frac{1}{T_0} \int_0^a r R_n q(r, t) dr \Rightarrow \frac{d^2 u_n}{dt^2} + \frac{\gamma_n^2 v^2}{a^2} u_n = \frac{v^2 q_n(t)}{T_0},$$

где введены обозначения:

$$u_n(t) = \int_0^a r R_n(r) u(r, t) dr;$$

$$q_n(t) = \int_0^a r R_n(r) q(r, t) dr.$$



Преобразованные начальные условия имеют вид

$$u_n|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{du_n}{dt} \right|_{t=0} = 0. \quad (5.49)$$

Выпишем общее решение уравнения (5.48) в виде

$$u_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\gamma_n v t}{a}\right) + B_n \sin\left(\frac{\gamma_n v t}{a}\right) + u_n^*(t),$$

где  $u_n^*(t)$  — какое-нибудь частное решение уравнения (5.48). Учитывая, что

$$q(r, t) = q(r) \sin(\omega t),$$

получим

$$q_n(t) = \sin(\omega t) \int_0^a q(r) r R_n dr = q_n \sin(\omega t).$$

Следовательно, для частного решения уравнения (5.48) можно записать\*

$$u_n^*(t) = C_n \sin(\omega t). \quad (5.50)$$

Подставив (5.50) в (5.48), находим

$$-C_n \omega^2 + \frac{\gamma_n^2 v^2}{a^2} C_n = \frac{v^2}{T_0} q_n \Rightarrow C_n = \frac{v^2 q_n}{T_0} \frac{1}{\left[\left(\frac{\gamma_n v}{a}\right)^2 - \omega^2\right]}.$$

Тогда, обозначив  $\omega_n = \frac{\gamma_n v}{a}$ , будем иметь

$$u_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + \frac{v^2 q_n}{T_0} \frac{1}{[\omega_n^2 - \omega^2]} \sin(\omega t).$$

Из граничных условий (5.49) находим

$$A_n = 0, \quad B_n = -\frac{v^2 q_n}{T_0} \frac{\omega}{\omega_n (\omega_n^2 - \omega^2)}.$$

Таким образом,

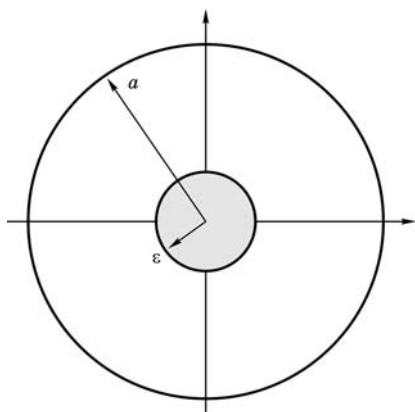
$$u_n(t) = \frac{v^2 q_n}{T_0} \frac{\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_n} \sin(\omega_n t)}{\omega_n^2 - \omega^2},$$

где

$$q_n = \int_0^a r q(r) J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) dr.$$

---

\* Здесь мы предполагаем, что  $\omega \neq \omega_n, \omega_n = \frac{\gamma_n v}{a}, \forall n$ , т. е. случай резонанса не рассматриваем.



**Рис. 5.4**  
К определению сосредоточенной нагрузки

$Q\sin(\omega t)$ . Будем считать сосредоточенную нагрузку предельным случаем распределенной нагрузки. Тогда можно записать (рис. 5.4)

$$q(r) = \begin{cases} \frac{Q}{\pi\varepsilon^2}, & 0 < r < \varepsilon, \\ 0, & \varepsilon < r < a, \end{cases} \Rightarrow q_n \rightarrow J_0(0) \int_0^\varepsilon q(r)rdr = J_0(0) \frac{Q}{2\pi} = \frac{Q}{2\pi}.$$

В этом случае будем иметь

$$u(r, t) = \frac{Qv^2}{\pi a^2 T_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_n} \sin(\omega_n t)}{\omega_n^2 - \omega^2} \right] \frac{J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right)}{J_1^2(\gamma_n)}.$$

## 5.4. ЗАДАЧИ С НЕПРЕРЫВНЫМ СПЕКТРОМ

В тех случаях, когда применение метода Фурье приводит к совокупности частных решений, непрерывно зависящих от некоторого параметра, изменяющегося в заданном промежутке, рассматриваемый вопрос относится к классу задач математической физики с непрерывным спектром. Особенность данного случая, который встречается, как правило, при рассмотрении задач для бесконечных областей, заключается в том, что искомое решение строится из найденных частных решений путем интегрирования по параметру, т. е. представляется в форме разложения в интеграл по собственным функциям.

На рисунке 5.5 приведена таблица, классифицирующая соответствующие задачи Штурма — Лиувилля.

Как нам уже известно, в случае регулярной задачи Штурма — Лиувилля мы имеем дискретный спектр, которому соответствует счетное множество собственных функций. В случае сингулярной задачи Штурма — Лиувилля спектр может быть непрерывным, дискретным или смешанным. Если спектр задачи

Решение задачи имеет вид:

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n R_n(r),$$

$$C_n = \frac{2u_n}{a^2 J_1^2(\gamma_n)}, \quad u_n = \int_0^a r R_n u dr$$

или явно:

$$u(r, t) = \frac{2v^2}{a^2 T_0} \sum_{n=1}^{\infty} q_n \left[ \frac{\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_n} \sin(\omega_n t)}{\omega_n^2 - \omega^2} \right] \frac{J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right)}{J_1^2(\gamma_n)}.$$

Рассмотрим в качестве примера случай сосредоточенной в центре нагрузки

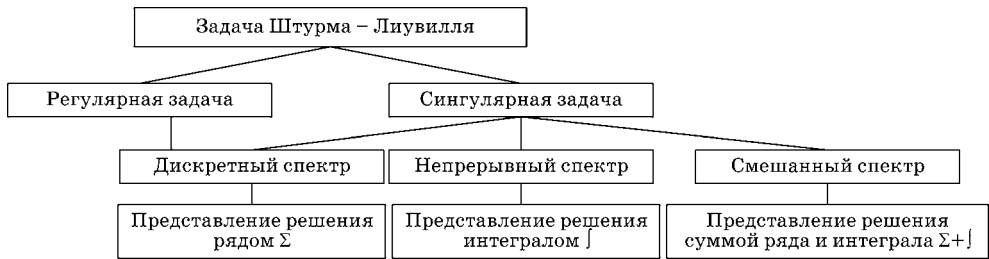


Рис. 5.5  
Классификация задач Штурма — Лиувилля

непрерывный, то мы имеем дело с несчетным множеством собственных функций. В этом случае решение задачи получается в виде разложения в интеграл. Для определения коэффициентов такого разложения используются теоремы о разложении функции в интеграл.

### НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧЕЙ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

К числу наиболее простых и важных интегральных разложений, встречающихся в математической физике, относятся классическое разложение функции, заданной в промежутке  $(-\infty, +\infty)$ , в интеграл Фурье и его различные модификации (разложение функции, заданной в промежутке  $(0, +\infty)$ , в синус- и косинус-интеграл Фурье и другие разложения по тригонометрическим функциям), разложение функции, определенной в промежутке  $(0, +\infty)$ , в интеграл Ханкеля по цилиндрическим функциям и некоторые другие разложения.

I. Простейшие интегральные разложения связаны со следующей задачей Штурма — Лиувилля:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < \infty; \quad (5.51)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{(I) } X(0) = 0 \text{ либо} \\ \text{(II) } X'(0) = 0 \text{ либо} \\ \text{(III) } X'(0) - hX(0) = 0 \quad (h > 0) \end{array} \right\} X|_{x \rightarrow \infty} \text{ — ограничена.} \quad (5.52)$$

Найдем собственные значения и собственные функции задачи (5.51), (5.52). Общий интеграл уравнения (5.51), очевидно, имеет вид

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad \lambda \neq 0.$$

Для условий первого рода будем иметь

$$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow X = B \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad X|_{x \rightarrow \infty} \text{ — ограничена} \Rightarrow \lambda > 0.$$

Таким образом, собственные значения будут

$$\lambda = \lambda_\nu = \nu^2, \quad 0 < \nu < \infty.$$

Собственные функции:

$$X = X_\nu(x) = \sin(\nu x).$$

Легко проверить, что  $\lambda = 0$  не является собственным значением. Таким образом, окончательно получаем, что в случае условий первого рода спектр задачи непрерывный:  $\lambda \in (0, +\infty)$ .

Для условий второго рода ( $\lambda \neq 0$ ) имеем:

$$X'(0) = B\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow B = 0; \quad X = A \cos(\sqrt{\lambda}x), \quad X|_{x \rightarrow \infty} \text{ — ограничена} \Rightarrow \lambda > 0.$$

Таким образом, собственные значения будут

$$\lambda = \lambda_v = v^2, \quad 0 < v < \infty.$$

Собственные функции:

$$X = X_v(x) = \cos(vx).$$

Легко проверить, что число  $\lambda = \lambda_0 = 0$  является собственным значением, которому соответствует собственная функция  $X_0(x) = 1$ .

Таким образом, в случае условий второго рода спектр задачи непрерывный:  $\lambda \in [0, +\infty)$ .

Для условий третьего рода ( $\lambda \neq 0$ )

$$B\sqrt{\lambda} - hA = 0 \Rightarrow B = A \frac{h}{\sqrt{\lambda}}.$$

Следовательно,

$$X(x) = A \left[ \cos(\sqrt{\lambda}x) + \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}x) \right].$$

Из условия ограниченности на бесконечности находим  $\lambda > 0$ . Итак, собственные значения и собственные функции будут

$$\lambda = \lambda_v = v^2, \quad 0 < v < \infty;$$

$$X_v(x) = A \left[ \cos(vx) + \frac{h}{v} \sin(vx) \right].$$

Здесь  $A$  — произвольная константа. Удобно принять

$$A = \frac{v}{\sqrt{v^2 + h^2}}.$$

Тогда условия первого и второго рода получаются из условий третьего рода как частные случаи. Очевидно,  $\lambda = 0$  не является собственным числом задачи (за исключением случая  $h = 0$ ).

Таким образом, окончательно

$$X = X_v(x) = \frac{v \cos(vx) + h \sin(vx)}{\sqrt{v^2 + h^2}}$$

— собственные функции задачи. Спектр — непрерывный  $\lambda \in (0, +\infty)$ .

Каждому из рассмотренных трех случаев соответствует своя теорема о разложении функции в интеграл.

Для условий первого рода это будет *синус-интеграл Фурье*:

$$f(x) = \int_0^{\infty} F(v) \sin(vx) dv, \quad 0 < x < +\infty, \quad (5.53.1a)$$

при этом

$$F(v) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin(vx) dx. \quad (5.53.1б)$$

Для условий второго рода — *косинус-интеграл Фурье*:

$$f(x) = \int_0^{\infty} F(v) \cos(vx) dv, \quad 0 < x < +\infty, \quad (5.53.2a)$$

при этом

$$F(v) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(vx) dx. \quad (5.53.2б)$$

Для условий третьего рода — *обобщенный интеграл Фурье*:

$$f(x) = \int_0^{\infty} F(v) \frac{v \cos(vx) + h \sin(vx)}{\sqrt{v^2 + h^2}} dv, \quad 0 < x < +\infty, \quad (5.53.3a)$$

при этом

$$F(v) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \frac{v \cos(vx) + h \sin(vx)}{\sqrt{v^2 + h^2}} dx. \quad (5.53.3б)$$

Сформулируем достаточные условия для применимости всех трех теорем — функция  $f(x)$  должна удовлетворять условиям Дирихле в любом замкнутом промежутке на полуоси  $(0, +\infty)$  и быть абсолютно интегрируемой на этой полуоси, т. е.  $f(x)$  — кусочно-непрерывна на  $(0, +\infty)$  и имеет конечное число максимумов и минимумов на любом  $[\alpha, \beta] \subset (0, +\infty)$ ;

$$\int_0^{\infty} |f(x)| dx \text{ — сходится.}$$

В точках разрыва интеграл Фурье сходится к значению

$$\frac{[f(x-0) + f(x+0)]}{2}.$$

Второе из сформулированных условий допускает обращение функции  $f(x)$  в бесконечность, если только несобственный интеграл сходится.

II. Рассмотрим следующую сингулярную задачу Штурма — Лиувилля:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$X|_{x \rightarrow \pm\infty} = O(1).$$

Имеем

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad \lambda \neq 0,$$

$$X(x) = A + Bx, \quad \lambda = 0. \quad (5.54)$$

Очевидно, условие ограниченности будет выполнено, если принять  $\lambda > 0$ ; ( $B = 0$  для (5.54)). Таким образом, собственные значения формируют непрерывный спектр  $\lambda \in [0, +\infty)$ ; обозначим

$$\lambda = \lambda_v = v^2, \quad 0 \leq v < +\infty.$$

Собственные функции будут

$$X(x) = X_v(x) = A_v \cos(vx) + B_v \sin(vx).$$

В этом случае теорема разложения имеет вид

$$f(x) = \int_0^{\infty} [M(v) \cos(vx) + N(v) \sin(vx)] dv, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (5.55a)$$

— обычный интеграл Фурье, где

$$M(v) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(vx) dx, \quad N(v) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(vx) dx. \quad (5.55b)$$

Сформулируем достаточные условия для применимости теоремы разложения — функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на всей оси и удовлетворяет условиям Дирихле в любом замкнутом промежутке, т. е.  $f(x)$  — кусочно-непрерывна на  $(-\infty, +\infty)$  и имеет конечное число максимумов и минимумов  $\forall x \in [\alpha, \beta] \subset$

$\subset (-\infty, +\infty)$ ;  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  — сходится.

Можно записать интеграл Фурье в комплексной форме:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(v) e^{-ivx} dv, \quad F(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ivx} dx. \quad (5.56)$$

III. Рассмотрим следующую задачу:

$$(rR)' + \lambda rR = 0, \quad 0 < r < +\infty;$$

$$R|_{r \rightarrow 0} = O(1); \quad R|_{r \rightarrow +\infty} = O(1).$$

Имеем

$$R(r) = AJ_0(\sqrt{\lambda}r) + BY_0(\sqrt{\lambda}r), \quad \lambda \neq 0;$$

$$R(r) = A + B \ln r, \quad \lambda = 0.$$

В обоих случаях  $B = 0$ , так как  $R(0) = O(1)$ . Условие  $R(+\infty) = O(1)$  приводит к тому, что  $\lambda > 0$ . Таким образом, собственные значения будут

$$\lambda = \lambda_v = v^2, \quad 0 \leq v < \infty.$$

Собственные функции:

$$R = R_v(r) = J_0(vr).$$

Спектр задачи непрерывный:  $\lambda \in [0, +\infty)$ .

Теоремой разложения в этом случае служит формула *интеграла Фурье — Бесселя*:

$$f(r) = \int_0^{\infty} F(v) J_0(vr) dv, \quad 0 < r < +\infty, \quad F(v) = v \int_0^{\infty} f(r) r J_0(vr) dr. \quad (5.57)$$

Сформулируем достаточные условия для применимости теоремы разложения — функция  $\sqrt{r}f(r)$  абсолютно интегрируема в интервале  $(0, +\infty)$  и удовлетворяет условиям Дирихле в любом замкнутом промежутке из этого интервала, т. е.  $f(r)$  — кусочно-непрерывна на  $(0, +\infty)$  и имеет конечное число максимумов и минимумов  $\forall r \in [\alpha, \beta] \subset (0, +\infty)$ ;

$$\int_0^{\infty} \sqrt{r} |f(r)| dr \text{ — сходится.}$$

Отметим [19], что имеет место аналогичная теорема для  $J_p(vr)$ , где  $p > -1/2$ . Соответствующее разложение называется *интегралом Ханкеля*.

Отметим в заключение, что приведенные формулы (5.53.1а), (5.53.1б), (5.53.2а), (5.53.2б), (5.53.3а), (5.53.3б), (5.55а), (5.55б) и (5.56) называются также *преобразованиями Фурье* (прямым и обратным). Формулы (5.57) представляют соответственно частный случай *преобразования Ханкеля*.

## 5.5. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ С НЕПРЕРЫВНЫМ СПЕКТРОМ

Здесь мы рассмотрим несколько примеров решения задач математической физики с непрерывным спектром, на которых продемонстрируем технику применения разложений в интеграл.

### ЗАДАЧА ОБ ОХЛАЖДЕНИИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ТЕЛА

Начнем с рассмотрения задачи теплопроводности. Если мы имеем *линейный* поток тепла в полубесконечной среде  $[0, +\infty)$ , т. е. изменением температуры относительно  $z$  и  $y$  можно пренебречь, и если источники тепла в среде отсутствуют, то дифференциальное уравнение теплопроводности примет следующий простой вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad \tau > 0, \quad \tau = \frac{kt}{c\rho}. \quad (5.58)$$

Предположим, что граница тела  $x = 0$  поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура задана в виде функции  $\varphi(x)$ . Тогда дополнительные условия будут:

$$T|_{x=0} = 0, \quad T|_{x \rightarrow \infty} = O(1); \quad (5.59)$$

$$T|_{\tau=0} = \varphi(x). \quad (5.60)$$

Будем искать решение в форме

$$T(x, \tau) = X(x)Y(\tau).$$

Разделяя переменные в уравнении (5.58), находим

$$X'' + \lambda X = 0; \quad (5.61)$$

$$Y' + \lambda Y = 0. \quad (5.62)$$

Кроме того, учитывая условия (5.59), будем иметь

$$X(0) = 0, \quad X(\infty) = O(1). \quad (5.63)$$

Таким образом, мы пришли к задаче Штурма — Лиувилля (5.61) и (5.63). Мы знаем, что  $\lambda = \lambda_\nu = \nu^2$ ,  $0 < \nu < +\infty$  — собственные значения и  $X = X_\nu(x) = \sin(\nu x)$  — собственные функции этой задачи. Спектр задачи — непрерывный:  $\lambda \in (0, \infty)$ .

Уравнение (5.62) принимает вид

$$Y' + \nu^2 Y = 0 \Rightarrow Y_\nu(\tau) = C_\nu e^{-\nu^2 \tau}.$$

Таким образом, совокупность частных решений нашей задачи имеет вид

$$T(x, \tau) = T_\nu(x, \tau) = C_\nu e^{-\nu^2 \tau} \sin(\nu x), \quad 0 < \nu < +\infty.$$

Применяя обобщенный принцип суперпозиции, составим интеграл

$$T(x, \tau) = \int_0^\infty C_\nu e^{-\nu^2 \tau} \sin(\nu x) d\nu. \quad (5.64)$$

Здесь мы предполагаем, что интеграл (5.64) сходится так, что можно переходить к пределу под знаком интеграла и дифференцировать. Тогда

$$T|_{\tau=0} = \varphi(x) = \int_0^\infty C_\nu \sin(\nu x) d\nu, \quad 0 < \nu < +\infty.$$

По теореме разложения в синус-интеграл Фурье, и предполагая, что функция  $\varphi(x)$  разлагается в синус-интеграл Фурье, находим

$$C_\nu = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varphi(x) \sin(\nu x) dx. \quad (5.65)$$

Таким образом, мы получили формальное решение нашей задачи в виде формул (5.64) и (5.65). Сейчас следовало бы доказать, что все наши рассуждения законны и интеграл (5.64) действительно сходится к функции  $T(x, \tau)$ , удовлетворяющей уравнению (5.58) и начальному условию (5.60). Вместо этого мы представим решение задачи в другой форме, которая позволяет проще обосновать это решение и оказывается справедливой для более широкого класса функций.

#### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОЛУЧЕННОГО РЕШЕНИЯ

Объединяя формулы (5.64) и (5.65), можно записать

$$T(x, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\nu^2 \tau} \sin(\nu x) d\nu \int_0^\infty \varphi(\xi) \sin(\nu \xi) d\xi. \quad (5.66)$$



Допустим, что можно переставить порядок интегрирования. Тогда

$$\begin{aligned} T(x, \tau) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) d\xi \int_0^{\infty} e^{-v^2 \tau} \sin(vx) \sin(v\xi) dv = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) d\xi \int_0^{\infty} e^{-v^2 \tau} [\cos(v(\xi - x)) - \cos(v(\xi + x))] dv. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Воспользуемся известной формулой:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos(bx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{b^2}{4a^2}}, \quad a > 0, \quad -\infty < b < +\infty. \quad (5.68)$$

Тогда (5.67) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} T(x, \tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\tau}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\tau}} e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4\tau}} \right] d\xi = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) \left[ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4\tau}} \right] d\xi. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Проведенное преобразование решения (5.66) упрощает вычисления; формула (5.69) справедлива для более широкого класса функций: функция  $\varphi(x)$  может быть уже и константой, в то время как в (5.66) это не имеет места.

Можно непосредственно проверить, что функция

$$K(x, \tau, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \left[ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4\tau}} \right]$$

является решением уравнения (5.58) при любом  $\xi$ .

**Пример.** Пусть  $\varphi(x) = T_0 = \text{const}$ , тогда в силу (5.69) имеем

$$T(x, \tau) = \frac{T_0}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^{\infty} \left[ e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4\tau}} \right] d\xi.$$

Здесь в первом интеграле делаем замену

$$\frac{\xi - x}{2\sqrt{\tau}} = s, \quad d\xi = 2\sqrt{\tau} ds,$$

а во втором — замену

$$\frac{\xi + x}{2\sqrt{\tau}} = s, \quad d\xi = 2\sqrt{\tau} ds.$$

Тогда

$$T(x, \tau) = \frac{T_0}{2\sqrt{\pi\tau}} 2\sqrt{\tau} \left[ \int_{\frac{x}{2\sqrt{\tau}}}^{\infty} e^{-s^2} ds - \int_{\frac{x}{2\sqrt{\tau}}}^{\infty} e^{-s^2} ds \right] = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{\tau}}}^{\frac{x}{2\sqrt{\tau}}} e^{-s^2} ds = \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\tau}}} e^{-s^2} ds.$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи выражается через интеграл вероятности

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds,$$

т. е.

$$T(x, \tau) = T_0 \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right). \quad (5.70)$$

Теперь, пользуясь известными свойствами интеграла вероятности, легко проверить граничные и начальные условия:

$$T|_{x=0} = T_0 \Phi(0) = 0; \quad T|_{x \rightarrow \infty} = T_0 \Phi(\infty) = T_0; \quad T|_{\tau=0} = T_0 \Phi(\infty) = T_0.$$

Непосредственным дифференцированием можно убедиться, что решение (5.70) удовлетворяет также и уравнению (5.58).

### ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Рассмотрим следующую задачу: найти функцию  $u \in C^{(2)}$ , удовлетворяющую уравнению Лапласа:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad y > 0,$$

и граничным условиям:

$$u|_{y=0} = f(x), \quad u|_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} = O(1) \quad (5.71)$$

в области  $y \geq 0$ ,  $-\infty < x < +\infty$ .

Ищем решение задачи в форме

$$u = X(x)Y(y).$$

Откуда, разделяя переменные, получаем:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X|_{x \rightarrow \pm\infty} = O(1); \quad (5.72)$$

$$Y' - \lambda Y = 0. \quad (5.73)$$

Собственные функции и собственные значения задачи (5.72) имеют вид:

$$\lambda = \lambda_\nu = \nu^2, \quad 0 \leq \nu < +\infty;$$

$$X(x) = X_\nu(x) = A_\nu \cos(\nu x) + B_\nu \sin(\nu x).$$

Из уравнения (5.73) при  $\lambda = \lambda_\nu = \nu^2$  находим

$$Y_\nu(y) = C_\nu e^{-\nu y} + D_\nu e^{\nu y}.$$

Учитывая ограниченность на бесконечности, получаем  $D_\nu = 0$ . Таким образом, частное решение задачи имеет вид:

$$u_\nu(x, y) = e^{-\nu y} [M_\nu \cos(\nu x) + N_\nu \sin(\nu x)], \quad 0 \leq \nu < +\infty.$$

Воспользуемся обобщенным принципом суперпозиции и составим интеграл

$$u(x, y) = \int_0^{\infty} e^{-vy} [M_v \cos(vx) + N_v \sin(vx)] dv. \quad (5.74)$$

Считая сходимость интеграла (5.74) достаточно «хорошей», можем записать

$$u|_{y=0} = f(x) = \int_0^{\infty} [M_v \cos(vx) + N_v \sin(vx)] dv.$$

Согласно теореме разложения и предполагая, что функция  $f(x)$  разлагается в интеграл Фурье, будем иметь:

$$\begin{aligned} M_v &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(vx) dx; \\ N_v &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(vx) dx. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Таким образом, получили формальное решение задачи в виде формул (5.74) и (5.75).

#### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОЛУЧЕННОГО РЕШЕНИЯ

Объединяя формулы (5.74) и (5.75) и предполагая возможной замену порядка интегрирования, запишем так:

$$\begin{aligned} u &= \int_0^{\infty} e^{-vy} dv \left[ \frac{\cos(vx)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos(v\xi) d\xi + \frac{\sin(v\xi)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin(v\xi) d\xi \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-vy} dv \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos(v(\xi - x)) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi \int_0^{\infty} e^{-vy} \cos(v(\xi - x)) dv. \end{aligned}$$

Воспользуемся известной формулой:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad a > 0, \quad -\infty < b < +\infty.$$

Тогда

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \frac{y}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi. \quad (5.76)$$

Формула (5.76) упрощает вычисления и справедлива для более широкого класса функций. Легко убедиться непосредственной проверкой, что функция

$$K(x, y) = \frac{y}{(\xi - x)^2 + y^2}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа при любом  $\xi$ . Убедимся в выполнении граничного условия (5.71). В формуле (5.76) предельный переход при  $y \rightarrow 0$  неприемлем.

Поэтому запишем так:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(\xi - x)^2 + y^2} [f(\xi) - f(x)] d\xi}_{\xrightarrow{y \rightarrow 0} 0} + f(x) \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi}_{=1} \xrightarrow{y \rightarrow 0} f(x).$$

Здесь первый интеграл справа стремится к нулю при  $y \rightarrow 0$ , а второй интеграл равен единице. Таким образом,  $u|_{y=0} = f(x)$ .

**Пример.** Рассмотрим следующую задачу: найти стационарное распределение температуры  $u = u(x, y)$  в полубесконечном теле, ограниченном плоскостью  $y = 0$ , часть которой ( $|x| < a$ ) находится при заданной температуре  $u_0$ , остальная часть ( $|x| > a$ ) — при температуре, равной нулю.

Ясно, что сформулированная задача является рассмотренной нами задачей Дирихле для полуплоскости в случае, когда

$$f(x) = \begin{cases} u_0, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

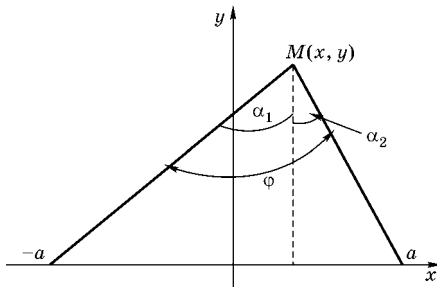


Рис. 5.6  
Пример

Из (5.76) будем иметь

$$\begin{aligned} u &= \frac{u_0}{\pi} \int_{-a}^a \frac{y}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi = \\ &= \frac{u_0}{\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{(\xi - x)}{y} \right) \Big|_{\xi=-a}^{\xi=+a} = \\ &= \frac{u_0}{\pi} \left[ \underbrace{\operatorname{arctg} \left( \frac{a-x}{y} \right)}_{=\alpha_1} + \underbrace{\operatorname{arctg} \left( \frac{a+x}{y} \right)}_{=\alpha_2} \right] = \frac{u_0}{\pi} \varphi, \end{aligned}$$

где  $\varphi = \alpha_1 + \alpha_2$  — угол, под которым отрезок  $-a \leq x \leq a$ ,  $y = 0$  виден из точки  $M(x, y)$  (рис. 5.6).

### ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < r < \infty, \quad z > 0, \\ u|_{r \rightarrow 0} &= O(1), \quad u|_{\sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty} = O(1), \\ u|_{z=0} &= f(r). \end{aligned} \tag{5.77}$$

Будем искать решение в виде

$$u(r, z) = R(r)Z(z).$$

Разделяя переменные, получим:

$$(rR)' + \lambda rR = 0; \tag{5.78}$$

$$R|_{r \rightarrow 0} = O(1), \quad R|_{r \rightarrow \infty} = O(1); \tag{5.79}$$

$$Z'' - \lambda Z = 0. \tag{5.80}$$

Задача Штурма — Лиувилля для уравнения (5.78) с граничными условиями (5.79) имеет непрерывный спектр собственных значений:

$$\lambda \in [0, +\infty), \quad \lambda_\nu = \nu^2, \quad 0 \leq \nu < +\infty.$$

Собственные функции будут

$$R_\nu(r) = J_0(\nu r).$$

Из уравнения (5.80) и условия ограниченности функции на бесконечности находим

$$Z_\nu(z) = C_\nu e^{-\nu z} + D_\nu e^{\nu z}, \quad D_\nu = 0.$$

Таким образом, совокупность частных решений имеет вид

$$u_\nu(r, z) = C_\nu e^{-\nu z} J_0(\nu r), \quad 0 \leq \nu < \infty.$$

Чтобы удовлетворить условию (5.77), запишем разложение в интеграл

$$u(r, z) = \int_0^\infty C_\nu e^{-\nu z} J_0(\nu r) d\nu. \quad (5.81)$$

Предполагая возможным предельный переход под знаком интеграла при  $z \rightarrow 0$ , получим

$$u|_{z=0} = f(r) = \int_0^\infty C_\nu J_0(\nu r) d\nu.$$

Предполагая, что функция  $f(r)$  разлагается в интеграл Фурье — Бесселя, находим

$$C_\nu = \nu \int_0^\infty f(r) r J_0(\nu r) dr. \quad (5.82)$$

Таким образом, получено формальное решение задачи в виде формул (5.81), (5.82).

**Пример.** В качестве примера использования полученного решения рассмотрим следующую задачу (рис. 5.7). Пусть массивное тело нагревается так, что на некотором круге радиуса  $a$  поддерживается постоянная температура  $u = T_0$ , а за пределами этого круга — температура  $u = 0$ . Требуется найти стационарное распределение температуры  $u = u(r, z)$ .

Математическая формулировка задачи:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad 0 < r < \infty, \quad z > 0; \\ u|_{r \rightarrow 0} &= O(1), \quad u|_{\sqrt{r^2+z^2} \rightarrow \infty} = O(1); \\ u|_{z=0} &= f(r) = \begin{cases} T_0, & r < a; \\ 0, & r > a. \end{cases} \end{aligned}$$

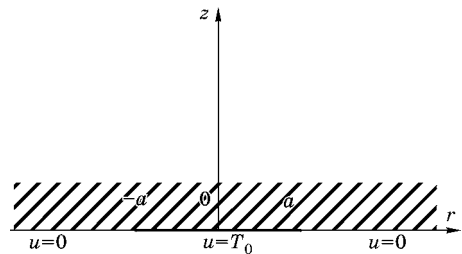


Рис. 5.7  
Пример

Воспользуемся полученным решением (5.81), (5.82) и вычислим интеграл

$$C_v = vT_0 \int_0^{\infty} r J_0(vr) dr.$$

Имеем, учитывая уравнение Бесселя, которому удовлетворяет функция  $J_0$ ,

$$\frac{d}{dr} \left[ r \frac{dJ_0(vr)}{dr} \right] + v^2 r J_0(vr) = 0 \Rightarrow r J_0(vr) = -\frac{1}{v^2} [r J_0'(vr)]'.$$

Следовательно,

$$C_v = -\frac{T_0}{v} r J_0'(vr) \Big|_{r=0}^{r=a} = T_0 a J_1(va).$$

Соответственно распределение температуры определяется формулой

$$u(r, z) = T_0 a \int_0^{\infty} e^{-vz} J_1(va) J_0(vr) dv.$$

Часто интерес представляет распределение температуры вдоль оси  $z$ . Будем иметь в этом случае

$$\begin{aligned} u|_{r=0} &= T_0 a \int_0^{\infty} e^{-vz} J_1(va) dv = -T_0 \int_0^{\infty} e^{-vz} dJ_0(va) = \\ &= -T_0 \left\{ e^{-vz} J_0(va) \Big|_{v=0}^{v=\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-vz} J_0(va) dv \right\} = T_0 \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, стационарное распределение температуры вдоль оси  $z$  дается формулой

$$u|_{r=0} = T_0 \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right).$$

#### ЗАМЕЧАНИЕ О ДРУГИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ

*Плоские задачи* — решаются для областей вида (рис. 5.8):

- а) полуплоскость;
- б) полоса.

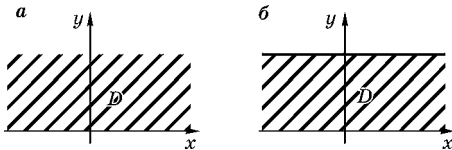


Рис. 5.8  
Плоские задачи:

а — полуплоскость; б — полоса.

При этом рассматриваются уравнения  $\Delta u = 0$  или  $\Delta u + k^2 u = 0$  в области  $D$ . Граничные условия — первого, второго или третьего рода. Аппарат решения — разложение функции в интеграл Фурье по координате  $x$ .

*Пространственные задачи* решаются для областей:

- а) полупространство;
- б) слой.

При этом искомая функция удовлетворяет условию  $\Delta u = 0$  или  $\Delta u + k^2 u = 0$ . Граничные условия — первого, второго или третьего рода. Решение ищется в виде разложения в интегралы Фурье — Бесселя.

#### ЗАДАЧА О РАДИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ГАЗА

Рассмотрим следующую задачу. Пусть задано начальное распределение плотности газа в пространстве. Требуется проследить дальнейшее распределение плотности — процесс выравнивания давления.

Будем рассматривать так называемые радиальные колебания газа, которые образуются в том случае, когда начальные условия зависят только от  $r$  — расстояния от колеблющейся частицы газа до начала координат.

Положение произвольной точки в пространстве в данном случае удобно характеризовать сферическими координатами  $(r, \theta, \varphi)$ .

Математическая формулировка задачи:

$$\Delta u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < r < \infty, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = \varphi(r), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0;$$

$$u|_{r \rightarrow 0} = O(1), \quad u|_{r \rightarrow \infty} = O(1).$$

Будем искать решение в виде

$$u(r, t) = R(r)T(t).$$

Разделяя переменные, получим

$$(r^2 R')' + \lambda r^2 R = 0; \tag{5.83}$$

$$T'' + \lambda v^2 T = 0. \tag{5.84}$$

Очевидно, необходимо потребовать

$$R|_{r \rightarrow 0} = O(1), \quad R|_{r \rightarrow \infty} = O(1). \tag{5.85}$$

Уравнение (5.83) можно записать так:

$$rR'' + 2R' + \lambda rR = 0 \Leftrightarrow (rR)'' + \lambda rR = 0.$$

Откуда

$$rR = A \cos(\sqrt{\lambda}r) + B \sin(\sqrt{\lambda}r), \quad \lambda \neq 0$$

или

$$rR = A + Br, \quad \lambda = 0.$$

Следовательно,

$$R = A \frac{\cos \sqrt{\lambda}r}{r} + B \frac{\sin \sqrt{\lambda}r}{r}, \quad \lambda \neq 0$$

или

$$R = \frac{A}{r} + B, \quad \lambda = 0.$$

Из граничных условий находим:  $\lambda \in [0, +\infty)$ . Спектр задачи непрерывный:

$$\lambda_v = v^2, \quad 0 \leq v < \infty$$

— собственные числа;

$$R_v(r) = B_v \frac{\sin(\sqrt{\lambda_v} r)}{r} = B_v \frac{\sin(vr)}{r}$$

— собственные функции задачи (5.83), (5.85).

Из уравнения (5.84) будем иметь

$$T_v(t) = C_v \cos(vt) + D_v \sin(vt),$$

и, так как  $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$ , то следует принять  $D_v = 0$ .

Итак, получаем совокупность частных решений

$$u_v = M_v \frac{\sin(vr)}{r} \cos(vt), \quad 0 \leq v < \infty,$$

откуда находим

$$u(r, t) = \int_0^{\infty} M_v \frac{\sin(vr)}{r} \cos(vt) dv.$$

Предполагая возможным предельный переход при  $t \rightarrow 0$ , получим

$$u|_{t=0} = \varphi(r) = \int_0^{\infty} M_v \frac{\sin(vr)}{r} dv, \quad 0 \leq r < \infty,$$

или, допуская, что функция  $r\varphi(r)$  разлагается в синус-интеграл Фурье, находим

$$r\varphi(r) = \int_0^{\infty} M_v \sin(vr) dv \Rightarrow M_v = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} r\varphi(r) \sin(vr) dv, \quad 0 \leq r < \infty. \quad (5.86)$$

Полученная форма решения часто неудобна из-за плохой сходимости интеграла, причиной которой является характер подынтегральных функций. Поэтому преобразуем полученное формальное решение.

Имеем

$$\begin{aligned} u &= \int_0^{\infty} M_v \frac{\sin(vr)}{r} \cos(vt) dv = \frac{1}{2r} \int_0^{\infty} M_v [\sin(v(r+vt)) + \sin(v(r-vt))] dv \Rightarrow \\ &\Rightarrow ru = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\infty} M_v \sin(v(r+vt)) dv + \int_0^{\infty} M_v \sin(v(r-vt)) dv \right\}. \end{aligned}$$

На основании формулы (5.86) можно записать ( $0 \leq r+vt < \infty$ )

$$ru = \frac{1}{2} \{ (r+vt)\varphi(r+vt) \pm |r-vt| \varphi(|r-vt|) \}.$$

Здесь выбираем знак «+» при  $r > vt$  и «-» при  $r < vt$ .



Таким образом, окончательно

$$u = \frac{1}{2r} \{(r+vt)\varphi(r+vt) + (r-vt)\varphi(|r-vt|)\}. \quad (5.87)$$

В формуле (5.87) первое слагаемое — сферическая волна, идущая из бесконечности к началу координат; второе слагаемое — сферическая волна, распространяющаяся из начала координат.

## 5.6. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Для решения задач математической физики с непрерывным спектром наряду с описанным выше методом во многих случаях может быть с успехом использован метод интегральных преобразований. Под интегральным преобразованием функции  $f(x)$  понимается значение определенного интеграла, взятого по заданному промежутку\* от произведения  $f(x)$  на ядро преобразования, представляющее собой функцию переменной  $x$  и некоторого параметра, который может принимать произвольные значения в заданной вещественной или комплексной области.

### ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Интегральные преобразования, встречающиеся в математической физике, могут быть условно разделены на «вещественные» и «комплексные», в зависимости от значений, принимаемых параметром преобразования.

Пусть задана некоторая функция  $K(x, v)$ , где  $a < x < \infty$ ,  $b < v < \infty$ . Будем предполагать эту функцию непрерывной от  $x$  и  $v$  в указанной области. Пусть  $f(x) \in A$  — функция вещественной переменной ( $A$  — некоторый класс функций). Если для каждой функции класса  $A$  интеграл

$$F(v) = \int_a^{\infty} K(x, v) f(x) dx \quad (5.88)$$

сходится, то в этом случае говорят, что определено *интегральное преобразование*  $F(v)$  от функции  $f(x)$  на классе  $A$ . При этом функция  $K(x, v)$  называется *ядром* интегрального преобразования.

Во многих случаях существует обратная зависимость для (5.88). Она имеет вид

$$f(x) = \int_b^{\infty} M(x, v) F(v) dv. \quad (5.89)$$

Функция  $M(x, v)$  называется *ядром обратного преобразования*. Формула (5.89) — обращение преобразования (5.88). Конкретная структура ядра  $M(x, v)$  зависит от ядра  $K(x, v)$  и пределов изменения переменных. Как правило, формула (5.89) имеет место в некотором классе  $B$  (не на всем классе  $A$ :  $B \subset A$ ), т. е.  $f(x) \in B$ .

Обе формулы (5.88) и (5.89) можно объединить в одну

$$f(x) = \int_a^{\infty} M(x, v) dv \int_a^{\infty} K(y, v) f(y) dy, \quad f(x) \in B, \quad a < x < \infty. \quad (5.90)$$

\* В задачах математической физики этот промежуток совпадает с интервалом изменения той переменной, по функциям которой ведется разложение.

Формула (5.90) — разложение функции  $f(x)$  по функциям  $M(x, v)$ . Часто случается, что формулы (5.88) и (5.89) взаимны.

В п. 5.4 мы уже встречались с интегральными преобразованиями Фурье и Ханкеля. К группе вещественных преобразований, общий вид которых может быть представлен в форме (5.88), относятся, например, следующие преобразования.

*Синус-преобразование Фурье:*

$$F(v) = \int_0^{\infty} f(x) \sin(vx) dx, \quad 0 < v < \infty. \quad (5.91)$$

Формула обращения синус-преобразования Фурье:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(v) \sin(vx) dv, \quad 0 < x < \infty. \quad (5.92)$$

Здесь  $K(x, v) = \sin(vx)$ ,  $M(x, v) = 2\sin(vx)/\pi$ . Обратим внимание, что теперь, в отличие от формул (5.53.1а), (5.53.1б), числовой коэффициент  $2/\pi$  стоит перед интегралом для функции  $f(x)$ . Положение этого коэффициента, вообще говоря, неважно. Иногда, чтобы сделать формулы типа (5.91) и (5.92) симметричными, ставится числовой коэффициент  $\sqrt{2}/\pi$  перед обоими интегралами в этих формулах. Аналогичное замечание справедливо и для других преобразований.

В качестве класса  $A$  можно взять класс кусочно-непрерывных и абсолютно интегрируемых функций на  $(0, +\infty)$ . Класс  $B$  — класс таких же функций, но имеющих конечное число максимумов и минимумов на любом  $[\alpha, \beta] \subset (0, +\infty)$ .

*Косинус-преобразование Фурье:*

$$F(v) = \int_0^{\infty} f(x) \cos(vx) dx, \quad 0 < v < \infty. \quad (5.93)$$

Формула обращения

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_a^{\infty} F(v) \cos(vx) dv, \quad 0 < x < \infty. \quad (5.94)$$

*Обобщенное преобразование Фурье:*

$$F(v) = \int_a^{\infty} f(x) \frac{v \cos(vx) + h \sin(vx)}{\sqrt{v^2 + h^2}} dx, \quad 0 < v < \infty. \quad (5.95)$$

Формула обращения

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_a^{\infty} F(v) \frac{v \cos(vx) + h \sin(vx)}{\sqrt{v^2 + h^2}} dv, \quad 0 < x < \infty. \quad (5.96)$$

Классическое преобразование Фурье:

$$F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ivx} dx, \quad -\infty < v < \infty. \quad (5.97)$$

Формула обращения

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(v)e^{-ivx} dv, \quad -\infty < x < \infty. \quad (5.98)$$

Ядра классического преобразования Фурье имеют структуру

$$K(x, v) = e^{ivx}, \quad M(x, v) = \frac{1}{2\pi} e^{-ivx}.$$

Преобразование Фурье — Бесселя:

$$F(v) = \int_a^{\infty} f(r)rJ_0(vr)dr, \quad 0 < v < \infty. \quad (5.99)$$

Формула обращения

$$f(r) = \int_a^{\infty} F(v)vJ_0(vr)dv, \quad 0 < r < \infty. \quad (5.100)$$

Здесь ядра имеют вид  $K(r, v) = rJ_0(vr)$ ,  $M(x, v) = vJ_0(vr)$ . Класс функций, для которых справедливо преобразование, определяется теоремой разложения в интеграл Фурье — Бесселя.

Типичными представителями другой группы преобразований, которые могут быть представлены в виде

$$F(p) = \int_a^{\infty} K(x, p)f(x)dx$$

( $a$  — заданное число;  $p = \sigma + it$  — параметр, изменяющийся в некоторой области  $D$  плоскости комплексного переменного;  $K$  — ядро преобразования), являются:

1) преобразование Лапласа:  $K(x, p) = e^{-xp}$ ,  $a = 0$ ,  $D$  — полуплоскость, лежащая правее некоторой прямой  $\sigma = \sigma_1$ , параллельной мнимой оси;

2) преобразование Меллина:  $K(x, p) = x^{p-1}$ ,  $a = 0$ ,  $D$  — полоса, заключенная между параллельными прямыми  $\sigma = \sigma_1$  и  $\sigma = \sigma_2$ .

С помощью интегральных преобразований можно решать неоднородные задачи математической физики по схеме метода Гринберга. Применение интегрального преобразования к дифференциальному уравнению в частных производных временно исключает одну из независимых переменных, вследствие чего интегрирование заданного дифференциального уравнения в частных производных сводится к интегрированию уравнения в частных производных, содержащих на единицу меньше независимых переменных, чем заданное уравнение.

Если исходное уравнение с двумя независимыми переменными, то применение интегрального преобразования сводит задачу к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения.

Решение преобразованного таким образом уравнения является функцией от  $v$  и остальных переменных. После того как указанное решение получено, требуется «обратить» его, чтобы восстановить «утраченную» переменную. Этот процесс обращения сводится, по существу, к решению одного из интегральных уравнений (5.91), (5.93), (5.95), (5.97), (5.99) относительно функции  $f(x)$ ; функция  $F(v)$  предполагается известной. Формальные решения этих интегральных уравнений даются соответственно формулами обращения (5.92), (5.94), (5.96), (5.98), (5.100).

Достоинствами метода интегральных преобразований являются возможность применения метода к однородным и неоднородным задачам, упрощение выкладок и разделение принципиальной и чисто вычислительной части решения, а также возможность построения операционного исчисления для данного ядра путем составления таблиц прямых и обратных преобразований различных, часто встречающихся в приложениях функций.

#### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Интегральное преобразование Фурье является важным частным случаем интегральных преобразований, широко используемым в математике, физике и технике. Напомним здесь некоторые основные свойства этого преобразования.

Пусть  $f(x)$  — произвольная функция, определенная на интервале  $(-\infty, +\infty)$  и удовлетворяющая условиям:

1)  $f(x)$  — кусочно-непрерывна на  $(-\infty, +\infty)$ ;

2)  $f(x)$  — абсолютно интегрируема на всей числовой оси, т. е.  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$  имеет конечное значение.

Будем говорить, что тогда  $f(x) \in A$ . При таких условиях функция  $f(x)$  может быть представлена в виде разложения в интеграл Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} ds \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{is\xi} d\xi, \quad -\infty < x < +\infty,$$

причем в точке разрыва первого рода  $x = c$  левая часть формулы должна быть заменена полусуммой  $[f(c-0) + f(c+0)]/2$ .

Преобразованием Фурье от функции  $f(x)$  называется интеграл

$$\tilde{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx} dx, \quad -\infty < s < +\infty. \quad (5.101)$$

Для функций, удовлетворяющих перечисленным условиям, преобразование Фурье всегда существует. Действительно, интеграл

$$\int_{-\alpha}^{\beta} f(x) e^{isx} dx,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — любые конечные числа, всегда существует (интеграл Римана), кроме того,  $|f(x)e^{isx}| = |f(x)|$ . Поэтому интеграл (5.101) сходится.

Преобразование Фурье обладает следующими свойствами.

1. Если  $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ , где функции  $f_1(x), f_2(x) \in A$ , а  $c_1$  и  $c_2$  — константы, то  $\tilde{f}(s) = c_1 \tilde{f}_1(s) + c_2 \tilde{f}_2(s)$  (свойство линейности преобразования Фурье).

2. Сверткой двух функций  $f_1(x), f_2(x) \in A$  называется функция, определяемая по формуле  $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_1(y) f_2(x-y) dy = \{f_1, f_2\}$ ; причем свертка коммутативна, т. е.  $\{f_1, f_2\} = \{f_2, f_1\}$ . Справедлива формула  $\tilde{f}(s) = \tilde{f}_1(s) \tilde{f}_2(s)$ .

3.  $\tilde{f}(s) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow \pm\infty$ .

Имеет место формула обращения, которая справедлива для функций  $f(x) \in B$ , удовлетворяющих условиям:

1)  $f(x)$  — кусочно-непрерывна и имеет конечное число максимумов и минимумов в любом замкнутом промежутке  $[a, b] \subset (-\infty, +\infty)$ ;

2)  $f(x)$  — абсолютно интегрируема на всей числовой оси, т. е.  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$  имеет конечное значение.

Формула обращения имеет вид (в точках непрерывности)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(s) e^{-isx} ds, \quad -\infty < x < +\infty.$$

#### НЕОДНОРОДНЫЕ ЗАДАЧИ С НЕПРЕРЫВНЫМ СПЕКТРОМ

Рассмотрим технику применения метода интегральных преобразований на примере следующей задачи: найти функцию  $u = u(x, y)$ , удовлетворяющую следующим условиям:

$$L_x(u) + M_y(u) = F(x, y), \quad a < x < \infty, \quad c < y < d,$$

где  $L_x, M_y$  — линейные дифференциальные операторы:

$$L_x(u) = \frac{1}{r(x)} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x)u \right];$$

$$M_y(u) = A(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + B(y) \frac{\partial u}{\partial y} + C(y)u.$$

Если  $x = a$  — регулярная граница, то удовлетворяются условия одного из следующих типов:

$$u|_{x=a} = f(y);$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} = f(y);$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} - hu \right|_{x=a} = f(y), \quad h > 0,$$

где  $f(y)$  — заданная функция.

На сингулярной границе выполняется условие:  $u|_{x \rightarrow \infty} = O(1)$ .

Если  $x = a$  — сингулярная граница, то  $u|_{x \rightarrow a} = O(1)$ ,  $u|_{x \rightarrow \infty} = O(1)$ .

Далее выполняются некоторые условия по переменной  $y$ , которые зависят от типа уравнения.

Соответствующая задача Штурма — Лиувилля имеет вид

$$(pX') + (\lambda r - q)X = 0.$$

Если  $x = a$  — регулярная граница, то

$$X|_{x=a} = 0,$$

либо

$$\frac{dX}{dx}\Big|_{x=a} = 0,$$

либо

$$\frac{dX}{dx} - hX\Big|_{x=a} = 0$$

и

$$X|_{x \rightarrow \infty} = O(1).$$

Если  $x = a$  — сингулярная граница, то

$$X|_{x \rightarrow a} = O(1), \quad X|_{x \rightarrow \infty} = O(1).$$

Будем считать, что сформулированная задача Штурма — Лиувилля имеет непрерывный спектр собственных значений, которые обозначим  $\lambda = \lambda_\nu = \nu^2$ ; а собственные функции —  $X = X_\nu(x)$ ,  $0 < \nu < \infty$ .

Поступим по аналогии с методом Гринберга:

$$\begin{aligned} & \int_a^\infty X_\nu \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x)u \right] dx + \int_a^\infty M_y(u) r X_\nu dx = \int_a^\infty F(x, y) r X_\nu dx \Rightarrow \\ & \Rightarrow p \left( X_\nu \frac{\partial u}{\partial x} - X'_\nu u \right) \Big|_{x=a}^{x=\infty} + \int_a^\infty u \underbrace{[(pX'_\nu)' - qX_\nu]}_{=-\lambda_\nu r X_\nu} dx + M_y \left( \int_a^\infty u r X_\nu dx \right) = \underbrace{\int_a^\infty F(x, y) r X_\nu dx}_{=\bar{F}_\nu(y)}. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение интегральное преобразование:

$$\bar{u}_\nu = \int_a^\infty u r X_\nu dx. \tag{5.102}$$

Тогда уравнение для трансформанты  $\bar{u}_\nu$  будет иметь вид

$$M_y(\bar{u}_\nu) - \lambda_\nu \bar{u}_\nu = \bar{F}_\nu(y) - G_\nu(y), \tag{5.103}$$

где

$$G_\nu(y) = p \left( X_\nu \frac{\partial u}{\partial x} - X'_\nu u \right) \Big|_{x=a}^{x=\infty}. \tag{5.104}$$

Пусть  $x = a$  — регулярная граница. Имеем

$$p \left( X_\nu \frac{\partial u}{\partial x} - X'_\nu u \right) \Big|_{x=a} = \begin{cases} -p(a)X'_\nu(a)f(y) & \text{для условий первого рода,} \\ p(a)X_\nu(a)f(y) & \text{для условий второго рода,} \\ p(a)X_\nu(a)f(y) & \text{для условий третьего рода.} \end{cases}$$

Таким образом, правая часть в формуле (5.104) при  $x = a$  — известная функция. Наложим некоторые дополнительные условия при  $x = \infty$ . Будем считать, что

$$p\left(X_v \frac{\partial u}{\partial x} - X'_v u\right)\Big|_{x=\infty} = 0.$$

При таких условиях  $G_v(y)$  — известная функция.

Если  $x = a$  — сингулярная граница, то потребуем, чтобы

$$p\left(X_v \frac{\partial u}{\partial x} - X'_v u\right)\Big|_{x=a} = 0, \quad p\left(X_v \frac{\partial u}{\partial x} - X'_v u\right)\Big|_{x=\infty} = 0.$$

При таких дополнительных условиях метод интегральных преобразований применим. Для полной постановки задачи для уравнения (5.103) необходимо еще трансформировать условия по переменной  $y$ .

Решив уравнение (5.103) с соответствующими условиями по переменной  $y$ , найдем функцию  $\bar{u}_v$ . Затем функцию  $u$  найдем по формуле обращения

$$u(x, y) = \int_a^{\infty} M(x, v) \bar{u}_v(y) dv,$$

где  $M(x, v)$  — ядро обратного преобразования для преобразования (5.102); ядро преобразования (5.102) имеет вид  $K(x, v) = r(x)X_v(x)$ .

Может оказаться так, что сформулированные дополнительные условия неприемлемы для рассматриваемой задачи. Тогда метод интегральных преобразований тоже неприменим.

## 5.7. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЗАДАЧ С НЕПРЕРЫВНЫМ СПЕКТРОМ

Здесь мы на нескольких примерах рассмотрим технику применения интегральных преобразований для решения неоднородных задач математической физики с непрерывным спектром.

### ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛУПОЛОСЫ

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа в области, представляющей собой полуполосу  $D = \{0 < x < \infty, 0 < y < b\}$  (рис. 5.9).

Требуется найти функцию  $u \in C^{(2)}(D)$ , удовлетворяющую условиям:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad (x, y) \in D; \\ u|_{x=0} &= f(y), \quad u|_{x \rightarrow \infty} = O(1); \\ u|_{y=0} &= \varphi_0(x), \quad u|_{y=b} = \varphi_b(x). \end{aligned} \quad (5.105)$$

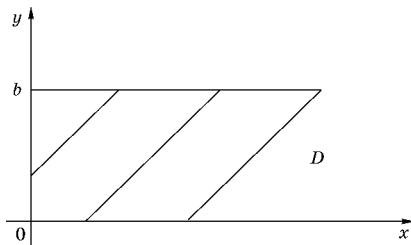


Рис. 5.9  
Полуполоса

Соответствующая задача Штурма — Лиувилля имеет вид ( $0 < x < \infty$ ):

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X|_{x \rightarrow \infty} = O(1). \quad (5.106)$$

Спектр задачи (5.106) непрерывный:  $\lambda \in (0, +\infty)$ . Собственные значения  $\lambda = \lambda_\nu = \nu^2$ , ( $0 < \nu < \infty$ ); собственные функции —  $X_\nu(x) = \sin(\nu x)$ .

В соответствие с общей теорией

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin(\nu x) dx + \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin(\nu x) dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \sin(\nu x) - \nu v \cos(\nu x) \right]_{x=0}^{x=\infty} - \nu^2 \int_0^\infty u \sin(\nu x) dx + \frac{d^2}{dy^2} \left( \int_0^\infty u \sin(\nu x) dx \right) = 0. \quad (5.107)$$

Потребуем, чтобы

$$u|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (5.108)$$

Условие (5.108) должно быть согласовано с поведением функций (5.105):  $\varphi_0 \rightarrow 0$ ,  $\varphi_b \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Теперь уравнение (5.107) примет вид

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} - \nu^2 \bar{u} = -\nu f(y), \quad (5.109)$$

где

$$\bar{u} = \int_0^\infty u \sin(\nu x) dx.$$

Трансформируем условия (5.105):

$$\bar{u}|_{y=0} = \bar{\varphi}_0, \quad \bar{u}|_{y=b} = \bar{\varphi}_b, \quad (5.110)$$

где введены обозначения:

$$\bar{\varphi}_0 = \int_0^\infty \varphi_0(x) \sin(\nu x) dx, \quad \bar{\varphi}_b = \int_0^\infty \varphi_b(x) \sin(\nu x) dx.$$

Решив уравнение (5.109) при условиях (5.110), найдем  $\bar{u} = \bar{u}_\nu(y)$ . Откуда по формуле обращения:

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \bar{u}_\nu(y) \sin(\nu x) d\nu.$$

**Пример.** Пусть  $f(y) = u_0$ ,  $\varphi_0(x) = 0$ ,  $\varphi_b(x) = 0$ . В этом случае уравнение (5.109) будет иметь вид

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} - \nu^2 \bar{u} = -\nu u_0.$$

Откуда находим

$$\bar{u} = A \operatorname{sh}(\nu y) + B \operatorname{sh}(\nu(b-y)) + \frac{u_0}{\nu}.$$



Имеем далее

$$\bar{u}|_{y=0} = 0 \Rightarrow B \operatorname{sh}(vb) + \frac{u_0}{v} = 0;$$

$$\bar{u}|_{y=b} = 0 \Rightarrow A \operatorname{sh}(vb) + \frac{u_0}{v} = 0,$$

откуда

$$A = -\frac{u_0}{v \operatorname{sh}(vb)}, \quad B = -\frac{u_0}{v \operatorname{sh}(vb)}.$$

Таким образом,

$$\bar{u} = \frac{u_0}{v} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{sh}(vy)}{\operatorname{sh}(vb)} - \frac{\operatorname{sh}(v(b-y))}{\operatorname{sh}(vb)} \right\},$$

откуда окончательно получаем

$$u = \frac{2u_0}{\pi} \int_0^\infty \left\{ 1 - \frac{\operatorname{sh}(vy)}{\operatorname{sh}(vb)} - \frac{\operatorname{sh}(v(b-y))}{\operatorname{sh}(vb)} \right\} \frac{\sin(vx)}{v} dv.$$

#### ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ ПЛИТЫ

Рассмотрим пластину в виде бесконечной полосы ширины  $b$  (рис. 5.10). Будем считать, что края плиты жестко заделаны.

Известно, что прогиб такой пластины удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\Delta^2 u \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < b. \quad (5.111)$$

Здесь  $q(x, y)$  — плотность заданной распределенной нагрузки, действующей на плиту;  $D$  — так называемая цилиндрическая жесткость плиты. Уравнение (5.111) — уравнение Софи Жермен — Лагранжа.

Сформулируем граничные условия:

$$u|_{x \rightarrow \pm\infty} = O(1), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow \pm\infty} = O(1); \quad (5.112)$$

$$u|_{y=0,b} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0,b} = 0. \quad (5.113)$$

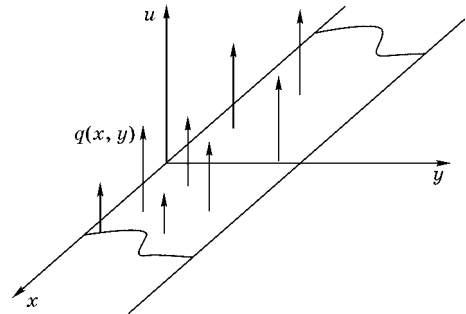


Рис. 5.10  
Изгиб плиты

Условия (5.112) означают, что прогиб и угол поворота на бесконечности ( $x \rightarrow \pm\infty$ ) должны быть ограничены; условия (5.113) — условия заделки кромок плиты (прогиб и угол поворота должны быть равны нулю).

Умножим уравнение (5.111) на  $e^{ivx}$  и проинтегрируем от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Обозначим

$$\bar{u} = \int_{-\infty}^{+\infty} ue^{ivx} dx.$$

Будем требовать, чтобы в соответствие с (5.112) дополнительно выполнялись условия:

$$u|_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0, \quad \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0. \quad (5.114)$$

Это требование должно быть согласовано с поведением функции  $q(x, y)$ . После интегрирования получим:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{ivx} dx &= \left. \frac{\partial u}{\partial x} e^{ivx} \right|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - iv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{ivx} dx = \left[ \frac{\partial u}{\partial x} e^{ivx} - ive^{ivx} u \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} - v^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{ivx} dx = -v^2 \bar{u}; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} e^{ivx} dx &= \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} e^{ivx} \right|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - iv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} e^{ivx} dx = \\ &= \left[ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} e^{ivx} - ive^{ivx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} - v^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{ivx} dx = v^4 \bar{u}; \\ 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} e^{ivx} dx &= 2 \frac{d^2}{dy^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{ivx} dx = -2v^2 \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2}; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} e^{ivx} dx &= \frac{d^4}{dy^4} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{ivx} dx = \frac{d^4 \bar{u}}{dy^4}. \end{aligned}$$

Таким образом, вместо уравнения в частных производных (5.111) имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4 \bar{u}}{dy^4} - 2v^2 \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} + v^4 \bar{u} = \bar{q}_v(y), \quad (5.115)$$

где введено обозначение

$$\bar{q}_v = \int_{-\infty}^{+\infty} q(x, y) e^{ivx} dx.$$

Условия (5.113) трансформируются в следующие условия:

$$\bar{u}|_{y=0, b} = 0, \quad \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|_{y=0, b} = 0. \quad (5.116)$$

Решив уравнение (5.115) при условиях (5.116), мы найдем функцию  $\bar{u} = \bar{u}_v(y)$ , а тогда прогиб плиты определится по формуле

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}_v(y) e^{-ivx} dv.$$

### Примечание.

Дополнительные условия (5.114) физически означают, что на бесконечности прогибы, углы поворотов (первые производные от прогибов), изгибающие моменты (пропорциональны вторым производным от прогибов) и поперечные силы (пропорциональны третьим производным от прогибов) исчезающе малы. Такое требование представляется физически разумным, если, конечно, оно согласовано с поведением функции  $q(x, y)$ .

## 5.8. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Применение преобразования Лапласа к решению нестационарных задач математической физики в настоящее время получило всеобщее признание как наиболее эффективный метод рассмотрения проблем данного типа. В этом разделе мы рассмотрим преобразование Лапласа, делая главный упор на приложения. За подробной информацией мы отсылаем к соответствующей специальной литературе [11, 12, 26]\*.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Пусть задана некоторая функция  $f(t)$ ,  $t \in (0, +\infty)$ . Рассмотрим интеграл (*интеграл Лапласа*)

$$\bar{f}(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad (5.117)$$

где  $p$  — некоторое комплексное число,  $\operatorname{Re}(p) > a$  ( $a$  — любое).

Если интеграл (5.117) сходится при некотором конкретном значении  $a$  для данной функции  $f(t)$ , то говорят, что этот интеграл определяет *преобразование Лапласа* от функции  $f(t)$ . В этом случае комплексная, вообще говоря, функция  $f(t)$  действительного аргумента  $t$  называется *оригиналом* или *начальной функцией*, а  $\bar{f}(p)$  — *изображением* или *трансформантой Лапласа*.

Для обозначения того, что  $\bar{f}(p)$  служит изображением  $f(t)$ , будем применять символ  $\Leftrightarrow$ , т. е. будем писать  $f(t) \Leftrightarrow \bar{f}(p)$ ,  $\operatorname{Re}(p) > a$ .

Как мы знаем, преобразование Лапласа можно рассматривать как частный случай некоторого интегрального преобразования с ядром  $K(p, t) = \exp(-pt)$ . Например, преобразование Лапласа существует для следующих функций:

$$f(t) = t^2 \quad (a = 0); \quad f(t) = e^{2t} \quad (a = 2); \quad f(t) = t^{-1/2} \quad (a = 0).$$

Для функций

$$f(t) = e^{t^2}; \quad f(t) = \frac{1}{t}$$

преобразование Лапласа не существует (интеграл (5.117) расходится при любом  $p$ ).

---

\* См. также: Лурье, А. И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. — М.; Л., ГИТТЛ, 1950; Ершова, В. В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление. — Минск: Вышэйш. школа, 1976.

Введем в рассмотрение класс функций  $M$ , для которых преобразование Лапласа заведомо существует. Мы скажем, что  $f(t) \in M$ , если

- 1) функция  $f(t)$  — кусочно-непрерывна на  $(0, +\infty)$ ;
- 2) интеграл  $\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-ct} dt$  — сходится при соответствующем значении  $c$ .

Нетрудно убедиться, что для функций класса  $M$  преобразование Лапласа всегда существует. Действительно ясно, что интеграл

$$\int_{\alpha}^A |f(t)| e^{-pt} dt$$

существует в обычном римановом смысле для  $f(t) \in M$ . Далее

$$|f(t)e^{-pt}| = |f(t)|e^{-t\operatorname{Re}(p)} \leq |f(t)|e^{-ct}, \operatorname{Re}(p) \geq c.$$

Таким образом, если  $\operatorname{Re}(p) \geq c$ , то интеграл

$$\bar{f}(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

будет сходиться, т. е. преобразование Лапласа определено. Число  $c$  не обязательно должно совпадать с числом  $a$  ( $a \leq c$ ). Сходимость в указанной области будет абсолютной и равномерной.

#### Примечание.

Имея в виду прикладную цель нашего анализа, мы можем ограничить класс рассматриваемых функций кусочно-непрерывными функциями  $f(t)$  вещественной переменной  $t$ , определенными при  $t > 0$  и принимаемыми равными нулю при  $t < 0$ . Из класса кусочно-непрерывных функций мы выделяем подкласс функций, характеризуемых определенным порядком роста при весьма больших значениях аргумента  $t$ . Мы предполагаем, что можно указать такие, независимые от  $t$  числа  $L$  и  $c$ , что каково бы ни было  $t$ , будет  $|f(t)| < Le^{ct}$ , т. е. при любом  $t > 0$  модуль  $f(t)$  растет медленнее, чем некоторая экспоненциальная функция.

Таким образом, функция  $f(t)$  называется оригиналом, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $f(t)$  — дифференцируемая достаточное число раз на всей оси  $t$ , кроме точек, где она и ее производные претерпевают разрыв первого рода, причем число таких точек в конечном промежутке конечно;
- 2) для всех отрицательных  $t$  функция  $f(t) = 0$ ;
- 3)  $f(t)$  возрастает не быстрее показательной функции.

Как известно, преобразование Лапласа

$$\bar{f}(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt, \operatorname{Re}(p) \geq c$$

представляет собой функцию комплексного переменного  $p$ , регулярную в полуплоскости  $\operatorname{Re}(p) \geq c$  (во всякой конечной части этой полуплоскости).

За пределами области  $D = \{p: \operatorname{Re}(p) \geq c\}$ , вообще говоря, интеграл (5.117) расходится. Пусть  $E$  — множество всех действительных значений  $p$ , для которых интеграл Лапласа сходится. Пусть  $a = \inf E$  — нижняя грань множества  $E$ . Число  $a$ , очевидно, может быть конечным или  $-\infty$ . Таким образом, обязательно существует предельная линия  $x = a$ , называемая *абсциссой сходимости*, такая, что левее нее преобразование Лапласа не существует (интеграл расходится). Значения преобразования Лапласа в области вне области  $D$  находятся с помощью аналитического продолжения. При этом может получиться неоднозначная функция. Те точки, на которые нельзя аналитически продолжить функцию, называются особыми точками функции. Аналитическое продолжение преобразования Лапласа возможно только в случае, когда интеграл удается выразить через элементарные функции. Например, для функции  $f(t) = 1$  будем иметь

$$\bar{f}(p) = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{p}, \operatorname{Re}(p) > 0.$$

Эта функция дает аналитическое продолжение всюду, за исключением точки  $O(0, 0)$ . Следовательно, точка  $O$  — особая точка функции (в данном случае точка  $O$  — полюс первого порядка).

В Приложении приведена сводная таблица наиболее часто встречающихся функций и их преобразований Лапласа.

#### Примечание.

В таблицах преобразований Лапласа неявно подразумевается, что функции  $f(t)$  равны нулю при  $t < 0$ . Значения этих функций приводятся только при  $t > 0$ . Это обстоятельство может привести к серьезным ошибкам, если не обращать на него внимания.

### СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Перечислим без доказательств некоторые основные свойства, которые используются в приложениях. Эти свойства преобразования Лапласа представляют собой основные правила (аппарат) операционного исчисления.

Будем предполагать, что все рассматриваемые функции принадлежат классу  $M$ .

**Свойство 1 (свойство линейности).** Пусть

$$f_1(t) \in M, f_2(t) \in M, F(t) = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t).$$

Тогда

$$\bar{F}(p) = C_1 \bar{f}_1(p) + C_2 \bar{f}_2(p).$$

**Пример.** Пусть  $f(t) = \cos^2(\beta t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\beta t)$ .

По таблице находим (см. Приложение)

$$1 \Leftrightarrow \frac{1}{p}, \cos(\beta t) \Leftrightarrow \frac{p}{p^2 + \beta^2}.$$

Следовательно,

$$\bar{f} = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2} \frac{p}{p^2 + 4\beta^2}.$$

**Определение.** Пусть  $f_1(t) \in M$ ,  $f_2(t) \in M$ . Сверткой двух функций  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  называется интеграл

$$\bar{F}(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \{f_1(t), f_2(t)\}.$$

Нетрудно показать, что этот интеграл существует и  $F(t)$  — непрерывная функция в интервале  $(0, +\infty)$ . Если в интеграле заменить  $\tau \rightarrow t - \tau$ , то получим

$$\{f_1(t), f_2(t)\} = \{f_2(t), f_1(t)\}$$

(свойство коммутативности свертки).

Свертка двух функций играет роль произведения в теории преобразования Лапласа. А именно справедливо

**Свойство 2.**  $\bar{F}(p) = \bar{f}_1(p) \cdot \bar{f}_2(p)$ .

**Пример.** Найти оригинал функции  $\bar{f}(p) = \frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2}$ .

Имеем

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2} = \frac{1}{(p^2 + \omega^2)} \cdot \frac{1}{(p^2 + \omega^2)}.$$

По таблице находим (см. Приложение)

$$\frac{1}{(p^2 + \omega^2)} \Leftrightarrow \frac{\sin(\omega t)}{\omega}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{f}(p) &\Leftrightarrow \int_0^t \frac{\sin(\omega \tau)}{\omega} \cdot \frac{\sin(\omega(t - \tau))}{\omega} d\tau = \frac{1}{2\omega^2} \int_0^t [\cos(\omega(2\tau - t)) - \cos(\omega t)] d\tau = \\ &= \frac{1}{2\omega^3} [\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2\omega^3} [\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)].$$

**Свойство 3 (интегрирование оригинала).** Пусть

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad f(t) \in M. \quad (5.118)$$

Легко видеть, что интеграл (5.118) существует и  $F(t)$  — непрерывная функция от  $t$ . Тогда

$$\bar{F}(p) = \frac{1}{p} \bar{f}(p).$$

**Свойство 4 (интегрирование изображения).** Если интеграл  $\int_p^{\infty} \bar{f}(p) dp$  сходится, то  $\int_p^{\infty} \bar{f}(p) dp \Leftrightarrow \frac{f(t)}{t}$ .

**Пример.** Найти изображение функции  $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ ; найти изображение интегрального синуса  $\int_0^t \frac{\sin(\tau)}{\tau} d\tau$ .

По таблице находим (см. Приложение)

$$\sin(t) \Leftrightarrow \frac{1}{p^2 + 1} \Rightarrow \frac{\sin(t)}{t} \Leftrightarrow \int_p^{\infty} \frac{dp}{p^2 + 1} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(p).$$

Итак,  $\frac{\sin(t)}{t} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(p) = \operatorname{arctg}(p)$ .

Применяя свойство интегрирования оригинала, получаем

$$\int_0^t \frac{\sin(\tau)}{\tau} d\tau \Leftrightarrow \frac{\pi}{2p} - \frac{\operatorname{arctg}(p)}{p}.$$

**Свойство 5.** Пусть

$$F(t) = f'(t), \quad f(t) \in M_1 \subset M.$$

Тогда

$$\bar{F}(p) = p\bar{f}(p) - f(0).$$

Здесь класс  $M_1$  определяется следующими свойствами:  $f(t) \in M_1$  если:

- 1) функция  $f(t)$  непрерывна на  $[0, +\infty)$ ;
- 2) функция  $f'(t)$  кусочно-непрерывна на  $(0, +\infty)$ ;

- 3) интеграл  $\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-ct} dt$  сходится при соответствующем значении  $c$ .

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)| e^{-ct} = 0.$$

Все эти условия являются достаточными.

Свойство 4 обобщается на случай функций, имеющих разрывы первого рода. Пусть функция  $f(t)$  удовлетворяет всем поставленным выше условиям за исключением того, что в точках  $t = c_i, i = 1, 2, \dots, n$  она имеет разрывы первого рода. Тогда

$$\bar{F}(p) = p\bar{f}(p) - f(0) + \sum_{i=1}^n e^{-c_i p} [f(c_i - 0) - f(c_i + 0)].$$

**Свойство 6 (дифференцирование оригинала).** Пусть

$$F(t) = f^{(n)}(t), \quad f(t) \in M_n \subset M.$$

Тогда

$$\bar{F}(p) = p^n \bar{f}(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Здесь класс  $M_n$  определяется следующими свойствами:  $f(t) \in M_n$ , если:

1) функции  $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$  непрерывны на  $[0, +\infty)$ ;

2) функция  $f^{(n)}(t)$  кусочно-непрерывна на  $(0, +\infty)$ ;

3) интеграл  $\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-ct} dt$  сходится при соответствующем значении  $c$ .

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)| e^{-ct} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} |f'(t)| e^{-ct} = 0, \dots, \lim_{t \rightarrow \infty} |f^{(n-1)}(t)| e^{-ct} = 0.$$

**Частный случай.** Пусть  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ .

Тогда  $\bar{F}(p) = p^n \bar{f}(p)$ .

Свойство дифференцирования оригинала вместе со свойством линейности используется при решении линейных дифференциальных уравнений.

**Свойство 7 (дифференцирование изображения).**  $\bar{f}^{(n)}(p) \Leftrightarrow (-1)^n t^n f(t)$ .

**Пример.** Найти изображение функции  $f(t) = t^n, n \in \mathbb{N}$ .

Так как  $1 \Leftrightarrow \frac{1}{p}$ , то в силу свойства дифференцирования изображения имеем:

$$-t \cdot 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{p^2} \Rightarrow t \Leftrightarrow \frac{1}{p^2};$$

$$-t^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{p^2}\right)' = -\frac{2}{p^3} \Rightarrow t^2 \Leftrightarrow \frac{2!}{p^3}.$$

Продолжая дифференцирование, получим

$$t^n \Leftrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Доказательство последней формулы завершается переходом по индукции.

**Свойство 8 (теорема смещения).**

$$e^{at} f(t) \Leftrightarrow \bar{f}(p-a), a = \text{const},$$

т. е. умножение оригинала на функцию  $e^{at}$  влечет за собой смещение переменной  $p$ .

**Свойство 9 (теорема запаздывания).**

$$f(t-\tau) \Leftrightarrow e^{-p\tau} \bar{f}(p), \tau > 0,$$

т. е. запаздывание оригинала на положительную величину  $\tau$  приводит к умножению изображения оригинала без запаздывания на величину  $e^{-p\tau}$ .

**Свойство 10 (теорема подобия).** Изменение масштаба аргумента оригинала

$$f(\alpha t) \Leftrightarrow \bar{f}\left(\frac{p}{\alpha}\right), \alpha > 0.$$

Отметим еще одно свойство преобразования Лапласа, которое сформулируем в виде **теоремы**: пусть  $f(t) \in M$  и имеет место формула

$$\bar{f}(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt, \text{Re}(p) \geq c.$$

Тогда  $\bar{f}(p) \rightarrow 0$  при  $|p| \rightarrow \infty, |\arg(p)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \delta > 0$  равномерно относительно  $\arg(p)$ .



## ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Проблема обращения — это определение функции (оригинала) по ее преобразованию (изображению). При этом возникают два вопроса: 1) как построить обращение; 2) будет ли обращение единственно? Вообще говоря, обращение преобразования Лапласа не единственно. Единственность обращения достигается, если усилить требования для функций — потребовать непрерывности в интервале  $(0, +\infty)$ . Это утверждение известно как *теорема Лерха* [15].

Формула обращения имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \bar{f}(p) e^{pt} dp. \quad (5.119)$$

Предполагается, что  $t > 0$ ,  $a > c$  ( $t > 0$  — точки непрерывности). Здесь интеграл в (5.119) понимается в смысле главного значения, т. е.

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \bar{f}(p) e^{pt} dp = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{a-iT}^{a+iT} \bar{f}(p) e^{pt} dp.$$

Формула (5.119) называется *формулой Римана — Меллина*, а интеграл справа — *интегралом Римана — Меллина*. Формулу обращения часто записывают в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \bar{f}(p) e^{pt} dp, \quad (5.120)$$

$t > 0$  — точки непрерывности; значение интеграла обращения не зависит от  $a$ . Если величина  $c$  известна, то путь интегрирования (прямая) должен быть проведен правее  $c$ . Если величина  $c$  не известна, то прямую интегрирования нужно провести правее всех особых точек функции  $\bar{f}(p)$  (в области регулярности  $\bar{f}(p)$ ).

В некоторых случаях важно найти значение интеграла (5.120) для  $t < 0$ . Можно показать, что при  $t < 0$  интеграл (5.120) равен нулю. Таким образом, будем иметь

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \bar{f}(p) e^{pt} dp = \begin{cases} f(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (5.121)$$

Иногда возникает следующая задача. Задана функция  $F(p)$  комплексного переменного  $p$ . Требуется определить, при каких условиях эта функция может рассматриваться как преобразование Лапласа. Ответ на этот вопрос дают следующие достаточные условия:

1) функция  $F(p)$  — регулярная функция  $p$  при  $\text{Re}(p) > c$  (в конечной части этой области);

2)  $F(p) \approx \frac{M}{p^\alpha}$ ,  $M = \text{const}$ ,  $\alpha > 0$  ( $\text{Re}(p) > c, |p| \rightarrow \infty$ ).

**Пример.** Пусть даны функции:

$$F_1(p) = \frac{p^2 + 1}{p^2 + p + 1}; \quad F_2(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Здесь  $F_1(p)$  не является преобразованием Лапласа, так как  $F_1(p) \rightarrow 1$  при  $|p| \rightarrow \infty$ ;  $F_2(p)$  является преобразованием Лапласа.

Можно применять обычные методы теории функций комплексной переменной для вычисления интеграла Римана — Меллина. Например, если функция  $\bar{f}(p)$  — рациональная функция от  $p$ :

$$\bar{f}(p) = \frac{P(p)}{Q(p)},$$

причем степень числителя не выше степени знаменателя. Будем также считать, что  $P(p)$  и  $Q(p)$  не имеют общих множителей. Особые точки  $\bar{f}(p)$  — нули знаменателя. Пусть  $p = p_k$  — корни многочлена  $Q(p)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). Эти точки являются полюсами подынтегрального выражения в (5.120).

Тогда

$$f(t) = \sum_{k=1}^N \operatorname{res}_{p=p_k} [\bar{f}(p)e^{pt}],$$

где  $\operatorname{res}_{p=p_k} [\bar{f}(p)e^{pt}]$  — вычет функции  $\bar{f}(p)e^{pt}$  относительно особой точки  $p = p_k$ .

Вычисление вычетов осуществляется по правилам теории функций комплексной переменной. Так, например, если  $p = p_k$  простой полюс, то

$$\operatorname{res}_{p=p_k} [\bar{f}(p)e^{pt}] = \lim_{p \rightarrow p_k} [\bar{f}(p)e^{pt} (p - p_k)],$$

если  $p = p_k$  полюс кратности  $n$ , то

$$\operatorname{res}_{p=p_k} [\bar{f}(p)e^{pt}] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} [\bar{f}(p)e^{pt} (p - p_k)^n].$$

В случае, когда все полюсы простые, формула упрощается. Именно раскрывая предел по правилу Лопиталья, находим

$$\operatorname{res}_{p=p_k} [\bar{f}(p)e^{pt}] = \lim_{p \rightarrow p_k} \left[ \frac{P(p)e^{pt}}{Q(p)} (p - p_k) \right] = \frac{P(p_k)e^{p_k t}}{Q'(p_k)}.$$

Таким образом, получим

$$f(t) = \sum_{k=1}^N \frac{P(p_k)e^{p_k t}}{Q'(p_k)}.$$

Последняя формула называется *разложением Хевисайда*.

Существуют и специальные приемы, позволяющие часто получить результат без непосредственного вычисления интеграла. Перечислим некоторые из них:

- 1) использование таблиц преобразований Лапласа;
- 2) разложение изображения на сумму;
- 3) разложение изображения на произведение;
- 4) комбинированные — 2 и 3.

Приемы 2 и 3 предполагают также использование таблиц преобразований.

Рассмотрим примеры.

**1. Разложение изображения на сумму.** Пусть

$$\bar{f} = \sum_{k=1}^N C_k \bar{f}_k,$$

где  $\bar{f}_k(p)$  — преобразования Лапласа от известных функций  $f_k(t)$ . Тогда на основании свойства линейности

$$f(t) = \sum_{k=1}^N C_k f_k(t).$$

Этот прием можно использовать и в случае, когда  $N$  — несобственное число, т. е.  $N = \infty$ . Необходимым условием тогда является требование сходимости на прямой  $L$  ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} C_k \bar{f}_k$ .

**Пример 1.** Пусть  $\bar{f}(p) = \frac{1}{p^2(p+1)}$ . Представим  $\bar{f}(p)$  как сумму простых дробей

$$\bar{f} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p+1} \Rightarrow A=1, C=1, B=-1.$$

Таким образом,

$$\bar{f} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} \Rightarrow f(t) = t - 1 + e^{-t}.$$

**Пример 2.** Пусть  $\bar{f} = \frac{1}{p^8 + 1}$ .

Имеем

$$\bar{f} = \frac{1}{p^8 \left(1 + \frac{1}{p^8}\right)}.$$

Выберем прямую интегрирования  $L$  так, чтобы  $|p|_L > 1$ . Тогда

$$\bar{f} = \frac{1}{p^8} \left(1 - \frac{1}{p^8} + \frac{1}{p^{16}} - \dots\right) = \frac{1}{p^8} - \frac{1}{p^{16}} + \frac{1}{p^{24}} - \dots \Rightarrow f(t) = \frac{t^7}{7!} - \frac{t^{15}}{15!} + \frac{t^{23}}{23!} - \dots$$

**2. Разложение изображения на произведение.** Допустим, что можно представить изображение в виде  $\bar{f} = \bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2$ , где  $\bar{f}_1(p)$  — преобразование Лапласа от функции  $f_1(t)$ ,  $\bar{f}_2(p)$  — преобразование Лапласа от функции  $f_2(t)$ . Отметим, что  $\bar{f}_1(p)$  и  $\bar{f}_2(p)$  должны убывать вдоль  $L$ . Тогда

$$f(t) = \int_0^t \bar{f}_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau.$$

**Пример 3.**

$$\bar{f} = \frac{1}{\sqrt{p(p-1)}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{1}{\sqrt{p-1}} = \bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2, \quad \bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{p-1}}.$$

Имеем

$$t^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} \Rightarrow f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}};$$

$$e^{-\alpha t} \Leftrightarrow \frac{1}{p + \alpha} \Rightarrow f_2(t) = e^t.$$

Таким образом,

$$f(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi \tau}} e^{t-\tau} d\tau = \frac{e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}} d\tau = \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-s^2} ds = e^t \Phi(\sqrt{t}).$$

**3. Комбинированный способ.** Здесь комбинируются способы разложения изображения на сумму и произведение.

**Пример 4.** Пусть  $\bar{f} = \frac{\sqrt{p}}{p-1}$ .

Имеем

$$\bar{f} = \frac{p}{\sqrt{p(p-1)}} = \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{p(p-1)}} = \bar{f}_1 + \bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2,$$

где

$$\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{p}} \Rightarrow f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}},$$

$$\bar{f}_2 = \frac{1}{p-1} \Rightarrow f_2(t) = e^t.$$

С учетом решения примера 3 будем иметь

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + e^t \Phi(\sqrt{t}).$$

## 5.9. ПРИЛОЖЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К ЗАДАЧАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

### ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И СИСТЕМ ТАКИХ УРАВНЕНИЙ

Задача Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t), \quad a_0 \neq 0 \quad (5.122)$$

состоит в нахождении решения  $y = y(t)$  этого уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям:

$$y|_{t=t_0} = y_0, \quad y'|_{t=t_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}|_{t=t_0} = y_0^{(n-1)}. \quad (5.123)$$

Операционным методом (т. е. с помощью преобразования Лапласа) эта задача может быть решена в предположении, что функция  $f(t)$  удовлетворяет

условиям, определяющим оригинал, а следовательно, тем же условиям удовлетворяет и искомая функция  $y(t)$  со своими производными до  $n$ -го порядка включительно и начальные условия заданы при  $t_0 = 0$ .

Пусть

$$\bar{y}(p) = \int_0^{+\infty} y(t)e^{-pt} dt, \quad \bar{f}(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (5.124)$$

Будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} y'(t)e^{-pt} dt &= \bar{y}' = p\bar{y} - y_0; \\ \int_0^{\infty} y''(t)e^{-pt} dt &= \bar{y}'' = p^2\bar{y} - py_0 - y_0'; \\ &\dots \\ \int_0^{\infty} y^{(n)}(t)e^{-pt} dt &= \bar{y}^{(n)} = p^n\bar{y} - p^{n-1}y_0 - p^{n-2}y_0' - \dots - y_0^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (5.125)$$

Пользуясь свойством линейности изображений и соотношениями (5.124) и (5.125), от уравнения (5.122) переходим к так называемому *операционному* или *изображающему уравнению*:

$$\bar{y}(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_n) - Q_{n-1}(p) = \bar{f}$$

или

$$\bar{y}P_n(p) - Q_{n-1}(p) = \bar{f}, \quad (5.126)$$

где

$$P_n(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_n$$

— *характеристический многочлен* степени  $n$ ,  $Q_{n-1}(p)$  — многочлен, не выше  $(n-1)$ -й степени относительно  $p$ , определяемый начальными значениями (5.123). Из (5.126) находим

$$\bar{y} = \frac{\bar{f} + Q_{n-1}(p)}{P_n(p)}. \quad (5.127)$$

Откуда

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \bar{y}(p)e^{pt} dp,$$

причем прямая  $L$  проходит правее всех особых точек функции  $\bar{y}(p)$ .

Если начальные условия нулевые, т. е.

$$y|_{t=t_0} = 0, \quad y'|_{t=t_0} = 0, \dots, y^{(n-1)}|_{t=t_0} = 0,$$

то в этом случае  $Q_{n-1}(p) = 0$  и

$$y(p) = \frac{\bar{f}}{P_n(p)} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{f}(p)e^{pt}}{P_n(p)} dp.$$

Преимущество операционного метода решения задачи Коши перед классическими методами состоит в том, что, во-первых, изображающее уравнение является линейным алгебраическим уравнением относительно  $\bar{y}(p)$  и, следовательно, в математическом отношении более простым, чем исходное дифференциальное уравнение. Во-вторых, операционным методом сразу находится частное решение уравнения (5.122), удовлетворяющее заданным начальным условиям (5.123), и не надо искать общее решение этого уравнения.

Операционным методом можно найти и общее решение уравнения (5.122), для чего в начальных условиях (5.123) нужно положить

$$y_0 = C_1, y'_0 = C_2, \dots, y_0^{(n-1)} = C_n.$$

Тогда оригинал, соответствующий изображению (5.127), будет содержать  $n$  произвольных постоянных.

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом решаются так же, как и одно уравнение. Отличие будет лишь в том, что вместо одного изображающего уравнения будем иметь систему таких уравнений, причем эта система в отношении изображений искомых функций будет линейной алгебраической системой. Всякую систему можно интегрировать в ее первоначальном виде, без каких бы то ни было предварительных преобразований.

Операционным методом можно найти и общее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом случае соответствующие начальные значения берутся произвольными.

Отметим, что в общем случае операционный метод для интегрирования уравнений с переменными коэффициентами неприменим. Однако в некоторых специальных случаях удается получить решение уравнения с переменными коэффициентами с помощью преобразования Лапласа [8]. Отметим также, что метод преобразования Лапласа к нелинейным уравнениям неприменим.

Продемонстрируем технику применения преобразования Лапласа на примерах.

**Пример 1.** Найти решение задачи Коши:

$$y'' + 4y = 2\sin(2t); y(0) = -1, y'(0) = 0.$$

*Решение.* Пусть

$$\bar{y}(p) = \int_0^{+\infty} y(t)e^{-pt} dt,$$

тогда

$$\int_0^{\infty} y''(t)e^{-pt} dt = \bar{y}'' = p^2\bar{y} + p$$

и изображающее уравнение имеет вид

$$\bar{y}(p^2 + 4) = \frac{4}{p^2 + 4} - p.$$

Откуда находим

$$\bar{y} = \frac{4}{(p^2 + 4)^2} - \frac{p}{p^2 + 4}.$$

Правую часть последнего равенства приводить к общему знаменателю не имеет смысла, так как оригинал для второго слагаемого известен (см. Приложение)

$$\frac{p}{p^2 + 4} \Leftrightarrow \cos(2t),$$

а оригинал для первого слагаемого

$$\frac{4}{(p^2 + 4)^2}$$

удобнее найти по теореме свертывания. Известно, что

$$\frac{2}{p^2 + 4} \Leftrightarrow \sin(2t),$$

поэтому

$$\frac{4}{(p^2 + 4)^2} = \frac{2}{(p^2 + 4)} \cdot \frac{2}{(p^2 + 4)} \Leftrightarrow \int_0^t \sin(2\tau) \sin(2(t - \tau)) d\tau.$$

Далее

$$\begin{aligned} \int_0^t \sin(2\tau) \sin(2(t - \tau)) d\tau &= \frac{1}{2} \int_0^t [\cos(4\tau - 2t) - \cos(2t)] d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(4\tau - 2t)}{4} - \tau \cos(2t) \right] \Big|_0^t = \frac{\sin(2t)}{4} - \frac{t}{2} \cos(2t). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$y(t) = \frac{\sin(2t)}{4} - \frac{t}{2} \cos(2t) - \cos(2t) = \frac{\sin(2t)}{4} - \frac{t+2}{2} \cos(2t).$$

**Пример 2.** Решить систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' + 3x + y = 0, \\ y' - x + y = 0 \end{cases}$$

при начальных условиях  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 1$ .

*Решение.* Пусть

$$\bar{x}(p) = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt, \quad \bar{y}(p) = \int_0^{+\infty} y(t) e^{-pt} dt,$$

тогда в силу начальных условий

$$\int_0^{\infty} y'(t) e^{-pt} dt = \bar{y}' = p\bar{y} - 1, \quad \int_0^{\infty} x'(t) e^{-pt} dt = \bar{x}' = p\bar{x} - 1.$$

Изображающая система будет иметь вид

$$\begin{cases} (p+3)\bar{x} + \bar{y} = 1, \\ -\bar{x} + (p+1)\bar{y} = 1. \end{cases}$$

Решение ищем по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+3 & 1 \\ -1 & p+1 \end{vmatrix} = (p+2)^2, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & p+1 \end{vmatrix} = p,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} p+3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = p+4,$$

тогда

$$\bar{x} = \frac{p}{(p+2)^2}, \quad \bar{y} = \frac{p+4}{(p+2)^2}.$$

Известно, что

$$\frac{p}{(p-a)^2} \Leftrightarrow (1+at)e^{at}, \quad \frac{1}{(p-a)^2} \Leftrightarrow te^{at}.$$

Следовательно,

$$\bar{x} = \frac{p}{(p+2)^2} \Leftrightarrow x(t) = (1-2t)e^{-2t},$$

$$\bar{y} = \frac{p+4}{(p+2)^2} = \frac{p}{(p+2)^2} + \frac{4}{(p+2)^2} \Leftrightarrow y(t) = (1+2t)e^{-2t} + 4te^{-2t} = (1+2t)e^{-2t}.$$

Итак, решением нашей системы будут функции:

$$\begin{aligned} x(t) &= (1-2t)e^{-2t}, \\ y(t) &= (1+2t)e^{-2t}. \end{aligned}$$

### ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Пусть  $u = u(x, t)$ . Рассмотрим уравнение

$$L_x(u) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b \frac{\partial u}{\partial t} - cu = F(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (5.128)$$

где

$$L_x(u) = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial u}{\partial x} \right) - qu \right],$$

$v, b, c$  — постоянные или вещественные функции от  $x$ ;  $p, p', q, r$  — непрерывные функции от  $x$  на  $[0, l]$ ;  $p, r > 0$ . Уравнение (5.128) — гиперболического или параболического типа (в зависимости от  $v^2$ ).



Пусть по переменной  $x$  выполняются граничные условия первого, второго или третьего рода, т. е. либо

$$u|_{x=0} = f_0(t); \quad u|_{x=l} = f_l(t), \quad (5.129a)$$

либо

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = f_0(t); \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = f_l(t), \quad (5.129б)$$

либо

$$\frac{\partial u}{\partial x} - h_0 u\Big|_{x=0} = f_0(t); \quad \frac{\partial u}{\partial x} + h_l u\Big|_{x=l} = f_l(t). \quad (5.129в)$$

Кроме того, поставлены начальные условия, например для гиперболического уравнения условия имеют вид

$$u|_{t=0} = \varphi(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x).$$

Обозначим

$$\bar{u}(x, p) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-pt} dt.$$

Умножим уравнение (5.128) на  $\exp(-pt)$  и проинтегрируем от 0 до  $+\infty$ . Получим

$$\int_0^{\infty} L_x(u) e^{-pt} dt - \frac{1}{v^2} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} e^{-pt} dt - b \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-pt} dt - c \int_0^{\infty} u e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} F(x, t) e^{-pt} dt.$$

Откуда

$$L_x(\bar{u}) - \frac{1}{v^2} \left[ p^2 \bar{u} - pu|_{t=0} - \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} \right] - b[p\bar{u} - u|_{t=0}] - c\bar{u} = \bar{F}(x, p), \quad (5.130)$$

где

$$\bar{F}(x, p) = \int_0^{\infty} F(x, t) e^{-pt} dt.$$

Уравнение (5.130) можно переписать в виде

$$L_x(\bar{u}) - \left[ \frac{p^2}{v^2} + bp + c \right] \bar{u} = g(x, p), \quad (5.131)$$

где

$$g(x, p) = \bar{F}(x, p) - \frac{p}{v^2} \varphi(x) - \frac{1}{v^2} \psi(x) - b\varphi(x)$$

— известная функция.

Граничные условия (5.129a)–(5.129в) соответственно трансформируются в следующие условия:

$$\bar{u}|_{x=0} = \bar{f}_0; \quad \bar{u}|_{x=l} = \bar{f}_l, \quad (5.132a)$$

либо

$$\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right|_{x=0} = \bar{f}_0; \quad \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right|_{x=l} = \bar{f}_l, \quad (5.132б)$$

либо

$$\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - h_0 \bar{u} \right|_{x=0} = \bar{f}_0(p); \quad \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + h_l \bar{u} \right|_{x=l} = \bar{f}_l(p). \quad (5.132в)$$

Решая уравнение (5.131) с соответствующими условиями (5.132а), (5.132б) или (5.132в), найдем  $\bar{u} = \bar{u}(x, p)$ . Тогда

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \bar{u}(x, p) e^{pt} dp,$$

где прямая интегрирования  $L$  проходит правее всех особых точек подынтегральной функции.

Изложенный метод справедлив, если вместо условий (5.129) рассматриваются условия:

$$\alpha_0 u + \beta_0 \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} + \gamma_0 \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=0} = f_0(t); \quad \alpha_l u + \beta_l \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} + \gamma_l \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=l} = f_l(t),$$

где  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha_l, \beta_l, \gamma_l$  — некоторые константы.

В этом случае вместо (5.132) будем иметь

$$\alpha_0 \bar{u} + \beta_0 \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right|_{x=0} + \gamma_0 (p\bar{u} - u|_{t=0}) \Big|_{x=0} = \bar{f}_0; \quad \alpha_l \bar{u} + \beta_l \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right|_{x=l} + \gamma_l (p\bar{u} - u|_{t=0}) \Big|_{x=l} = \bar{f}_l.$$

При этом величины  $u|_{t=0, x=0}, u|_{t=0, x=l}$  должны быть заданы.

Отметим, что для уравнений эллиптического типа метод преобразования Лапласа, как правило, неприменим, так как в задачах эллиптического типа почти никогда не заданы одновременно производная и функция на одной из границ. Кроме того, для успешного применения преобразования Лапласа необходимо, чтобы одна из переменных изменялась в бесконечном интервале  $(0, +\infty)$ . Задача для уравнения эллиптического типа (для бесконечной области), демонстрирующая исключение из этого правила, рассмотрена далее (см. «Примеры решения типовых задач», Пример 8).

### ПОСТРОЕНИЕ МЕТОДА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА НА СЛУЧАЙ БОЛЬШЕГО ЧИСЛА НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть, например,  $u = u(x, y, t)$ . Рассмотрим уравнение

$$\Delta u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b \frac{\partial u}{\partial t} - cu = F(x, y, t), \quad (x, y) \in D, \quad t > 0, \quad (5.133)$$

где  $D$  — некоторая плоская область с границей  $\Gamma$  ( $\Gamma$  — простой самонепересекающийся контур),

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Станем рассматривать для определенности граничные условия третьего рода:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu \Big|_{\Gamma} = f(P, t), \quad h = h(P) \geq 0, \quad P \in \Gamma.$$

Кроме того, выполняются начальные условия:

$$u|_{t=0} = \varphi(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x).$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (5.133), получим

$$\Delta \bar{u} - \left[ \frac{p^2}{v^2} + bp + c \right] \bar{u} = g(x, y, p), \quad (5.134)$$

где

$$g(x, y, p) = \bar{F}(x, y, p) - \frac{p}{v^2} \varphi(x, y) - \frac{1}{v^2} \psi(x, y) - b\varphi(x, y)$$

— известная функция.

Граничные условия преобразуются к виду

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} + h\bar{u} \Big|_{\Gamma} = \bar{f}(P, p). \quad (5.135)$$

Таким образом, если мы можем решить краевую задачу (5.134)–(5.135) и найти функцию  $\bar{u} = \bar{u}(x, y, p)$ , то

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \bar{u}(x, y, p) e^{pt} dp.$$

Отметим, что краевую задачу (5.134)–(5.135) методом преобразования Лапласа решить нельзя, так как уравнение (5.134) эллиптического типа. Эта задача должна решаться независимо.

### ЗАДАЧА О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЯ

Продемонстрируем технику применения преобразования Лапласа на следующих примерах.

**Пример 1.** Рассмотрим продольные колебания полубесконечного стержня, занимающего область  $x \geq 0$  вещественной оси.

Математическая формулировка задачи: найти функцию  $u = u(x, t)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0,$$

граничным условиям:

$$u|_{x=0} = f(t), \quad u|_{x \rightarrow \infty} = 0$$

и начальным условиям:

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0.$$

Будем решать поставленную задачу с помощью преобразования Лапласа. Пусть

$$\bar{u}(x, p) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-pt} dt.$$

Применим преобразование Лапласа к уравнению колебаний стержня и граничным условиям. Получим следующую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения относительно трансформанты  $\bar{u}(x, p)$ :

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - \frac{p^2}{v^2} \bar{u} = 0, \quad \bar{u}|_{x=0} = \bar{f}(p), \quad \bar{u}|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0.$$

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид

$$\bar{u} = A e^{-\frac{p}{v}x} + B e^{\frac{p}{v}x}.$$

Из граничных условий находим  $B = 0, A = \bar{f}$ . Таким образом, будем иметь  $\bar{u} = \bar{f} e^{-\frac{p}{v}x}$  и, следовательно,

$$u(x, t) = \frac{1}{2i\pi} \int_L \bar{f} e^{p\left(t - \frac{x}{v}\right)} dp, \quad x > 0, \quad t > 0.$$

По формуле Римана — Меллина:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_L \bar{f}(p) e^{pt} dp = \begin{cases} f(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

решение можно переписать в виде

$$u(x, t) = \begin{cases} f\left(t - \frac{x}{v}\right), & t > \frac{x}{v}, \\ 0, & t < \frac{x}{v}. \end{cases}$$

Таким образом, процесс представляет собой бегущую волну, распространяющуюся со скоростью  $v$  от конца стержня  $x = 0$ .

**Пример 2.** Рассмотрим теперь задачу о продольных колебаниях конечного стержня  $0 \leq x \leq l$ . Математическая формулировка задачи: найти функцию  $u = u(x, t)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

граничным условиям:

$$u|_{x=0} = f(t), \quad u|_{x=l} = 0$$

и начальным условиям:

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

Будем решать поставленную задачу с помощью преобразования Лапласа. Пусть

$$\bar{u}(x, p) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-pt} dt.$$

Рассуждая, как и в случае полубесконечного стержня, мы приходим к задаче:

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - \frac{p^2}{v^2} \bar{u} = 0, \quad \bar{u}|_{x=0} = \bar{f}(p), \quad \bar{u}|_{x=l} = 0.$$

Откуда находим

$$\bar{u}(x, p) = \bar{f}(p) \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{p}{v}(l-x)\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{p}{v}l\right)}$$

и, следовательно,

$$u(x, t) = \frac{1}{2i\pi} \int_L \bar{f}(p) \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{p}{v}(l-x)\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{p}{v}l\right)} e^{pt} dp.$$

Для вычисления интеграла воспользуемся разложением в ряд

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{p}{v}(l-x)\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{p}{v}l\right)} &= \frac{e^{\frac{p}{v}(l-x)} - e^{-\frac{p}{v}(l-x)}}{e^{\frac{p}{v}l} - e^{-\frac{p}{v}l}} = \frac{e^{-\frac{p}{v}x} - e^{\frac{p}{v}(2l-x)}}{1 - e^{-\frac{2p}{v}l}} = \\ &= \left[ e^{-\frac{p}{v}x} - e^{\frac{p}{v}(2l-x)} \right] \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{2p}{v}lk} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ e^{-\frac{p}{v}(2lk+x)} - e^{\frac{p}{v}(2lk+2l-x)} \right], \quad \left\| e^{-\frac{2p}{v}l} \right\|_L < 1. \end{aligned}$$

Получаем (предполагается, что можно интегрировать почленно)

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{p\left(t - \frac{2lk+x}{v}\right)} \bar{f}(p) dp - \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{p\left(t - \frac{2lk+2l-x}{v}\right)} \bar{f}(p) dp \right].$$

В силу формулы Римана — Меллина заключаем, что каждый из рядов содержит конечное число членов. Это снимает вопрос о сходимости.

Будем иметь:

$$0 < t < \frac{x}{v} \Rightarrow u = 0;$$

$$\frac{x}{v} < t < \frac{2l-x}{v} \Rightarrow u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right);$$

$$\frac{2l-x}{v} < t < \frac{2l+x}{v} \Rightarrow u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) - f\left(t - \frac{2l-x}{v}\right);$$

$$\frac{2l+x}{v} < t < \frac{4l-x}{v} \Rightarrow u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) - f\left(t - \frac{2l-x}{v}\right) + f\left(t - \frac{2l+x}{v}\right)$$

и т. д. Таким образом, решение для каждого интервала времени представляется в конечной форме. В стержне движутся плоские волны. Они отражаются от стенок и постепенно накладываются друг на друга.

### ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 5

1. Дайте характеристику неоднородных задач математической физики. Какие методы служат для решения неоднородных задач?
2. В чем заключается сущность метода приведения к однородной задаче? Приведите примеры.
3. Сформулируйте основную идею метода Гринберга.
4. Изложите применение метода Гринберга для уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными.
5. Приведите краткую схему решения задачи методом Гринберга.
6. Как связаны между собой методы Гринберга и Фурье?
7. Дайте решение задачи Дирихле для прямоугольника методом приведения к однородной задаче.
8. Дайте решение задачи Дирихле для прямоугольника методом Гринберга.
9. Дайте решение задачи о вынужденных колебаниях круглой мембраны методом приведения к однородной задаче.
10. Дайте решение задачи о вынужденных колебаниях круглой мембраны методом Гринберга.
11. Что можно сказать о сходимости рядов, получаемых при решении методом Гринберга?
12. Дайте классификацию задач Штурма — Лиувилля.
13. Приведите примеры интегральных разложений, связанных с сингулярной задачей Штурма — Лиувилля.
14. Сформулируйте теорему разложения функции в синус-интеграл Фурье. С какой краевой задачей связано это разложение?
15. Сформулируйте теорему разложения функции в косинус-интеграл Фурье. С какой краевой задачей связано это разложение?
16. Напишите формулы интегрального разложения, связанного с граничными условиями третьего рода на полуоси.
17. Сформулируйте теорему разложения в интеграл Фурье — Бесселя. С какой краевой задачей связано это разложение?
18. Дайте решение задачи об охлаждении полубесконечного тела.
19. Дайте решение задачи Дирихле для полуплоскости.
20. Дайте решение задачи Дирихле для полупространства.
21. Дайте решение задачи о радиальных колебаниях газа.
22. Сформулируйте понятие интегрального преобразования. Приведите примеры интегральных преобразований.
23. Напишите формулы прямого и обратного преобразования Фурье.
24. Напишите формулы прямого и обратного преобразования Фурье — Бесселя.
25. Напишите формулы прямого и обратного обобщенного преобразования Фурье.
26. Напишите формулы прямого и обратного синус-преобразования Фурье.
27. Напишите формулы прямого и обратного косинус-преобразования Фурье.

28. Изложите применение метода интегральных преобразований для уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными.
29. Дайте решение задачи Дирихле для полуполосы.
30. Дайте решение задачи об изгибе плиты.
31. Напишите формулы прямого и обратного преобразования Лапласа.
32. Какая функция называется оригиналом и каковы его свойства? Приведите примеры функций, являющихся оригиналами. Приведите пример функции, которую нельзя назвать оригиналом. Почему?
33. Каким свойствам должна удовлетворять функция, чтобы для нее существовало преобразование Лапласа?
34. Какая существует связь между оригиналом и его изображением? Укажите область существования изображения и назовите его свойства.
35. Сформулируйте свойства преобразования Лапласа.
36. Что называется сверткой двух функций?
37. Как вычисляется интеграл Римана — Меллина в случае рациональной функции  $\bar{f}(p)$ ?
38. Приведите примеры специальных методов обращения преобразования Лапласа, позволяющих получить результат без непосредственного вычисления интеграла Римана — Меллина.
39. В чем состоит преимущество решения дифференциального уравнения операционным методом перед классическим методом?
40. Приведите схему решения дифференциального уравнения операционным методом. К каким последовательным шагам можно свести решение дифференциального уравнения операционным методом?
41. Как решаются системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом Лапласа?
42. К каким дифференциальным уравнениям и системам уравнений применим метод преобразования Лапласа?
43. Изложите схему применения преобразования Лапласа для интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных.
44. Дайте решение задачи о продольных колебаниях полубесконечного стержня с помощью преобразования Лапласа.
45. Дайте решение задачи о продольных колебаниях конечного стержня с помощью преобразования Лапласа.

### ЗАДАЧИ С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ

1. Решить смешанную задачу для неоднородного уравнения гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - G, \quad v^2 = \frac{T_0}{\rho};$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0; \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0.$$

2. Решить смешанную задачу для неоднородного уравнения гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = x;$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = t.$$

3. Решить смешанную задачу для неоднородного уравнения параболического типа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t(x+1), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = t^2, \quad u|_{x=1} = t^2.$$

4. Решить смешанную задачу для неоднородного уравнения гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b, \quad b = \text{const}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0;$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0.$$

5. Решить смешанную задачу для неоднородного уравнения гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos(t), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0;$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0.$$

6. Решить задачу о колебаниях однородной струны ( $0 < x < l$ ), закрепленной на концах  $x = 0$ ,  $x = l$ , под действием внешней непрерывно распределенной силы с плотностью  $p(x, t) = A \sin(\omega t)$ ,  $\omega \neq k\pi v/l$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  Начальные условия — нулевые.

7. Решить задачу о вынужденных поперечных колебаниях струны, закрепленной на одном конце  $x = 0$  и подверженной на другом конце  $x = l$  действию возмущающей силы, которая вызывает смещение, равное  $A \sin(\omega t)$ , где  $\omega \neq k\pi v/l$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  Начальные условия — нулевые.

8. Решить смешанную задачу для уравнения гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0;$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = t.$$

9. Решить смешанную задачу для уравнения гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = x+1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0;$$

$$u|_{x=0} = t+1, \quad u|_{x=1} = t^3+2.$$



10. Решить смешанную задачу для уравнения гиперболического типа:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} &= 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0; \\ u|_{x=0} &= 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \frac{Q}{ES} = \text{const}.\end{aligned}$$

11. Решить смешанную задачу для уравнения гиперболического типа:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} &= 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0; \\ u|_{x=0} &= 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \frac{A \sin \omega t}{ES}.\end{aligned}$$

12. Найти стационарное распределение температуры в бруске, сечение которого имеет форму криволинейного прямоугольника ( $a \leq r \leq b$ ,  $0 \leq \varphi \leq \alpha$ ) при следующих условиях:

$$u|_{r=a} = 0; \quad u|_{r=b} = T_0; \quad u|_{\varphi=0} = 0; \quad u|_{\varphi=\alpha} = T_0.$$

13. Решить смешанную задачу для уравнения гиперболического типа:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Y(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} &= f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x); \\ u|_{x=0} &= 0, \quad u|_{x=l} = 0.\end{aligned}$$

14. Изучить вынужденные поперечные колебания струны, закрепленной на концах  $x = 0$ ,  $x = l$  и подверженной действию внешней возмущающей силы  $F_0 \sin(\omega t)$ ,  $\omega \neq k\pi v/l$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , сосредоточенной в точке  $x = c$ ,  $c \in (0, l)$ , струны.

15. Решить краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x, t < +\infty, \quad u|_{x=0} = U_0, \quad u|_{t=0} = 0.$$

16. Решить краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x, t < +\infty, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{t=0} = \psi(x) = \begin{cases} U_0, & 0 < x < 1; \\ 0, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

17. Решить краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x, t < +\infty, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad u|_{t=0} = f(x).$$

18. Решить краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x, t < +\infty, \quad \frac{\partial u}{\partial x} - hu \Big|_{x=0} = 0, \quad u|_{t=0} = f(x), \quad h > 0.$$

19. Найти решение уравнения теплопроводности, если начальная температура имеет вид

$$u|_{t=0} = \psi(x) = \begin{cases} T_1, & x > 0, \\ T_2, & x < 0. \end{cases}$$

20. Найти какое-нибудь ограниченное решение уравнения теплопроводности в области  $x > 0$ , удовлетворяющее граничному условию  $u(0, t) = A \cos(\omega t)$ .

21. Решить краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x, t < +\infty, \quad u|_{x=0} = f(t), \quad u|_{t=0} = 0.$$

22. Решить краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x, t < +\infty, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = f(t), \quad u|_{t=0} = 0.$$

23. Решить краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} &= A, \quad u|_{x=l} = B, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

24. Решить краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= A, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = B, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

25. Решить краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

26. Решить краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A \sin \omega t, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

27. Решить краевую задачу:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$
$$u|_{x=0} = A \cos \omega t, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

28. Решить краевую задачу в полукруге радиуса  $b$ :

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \quad 0 \leq \rho \leq b, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi;$$
$$u(\rho, \varphi)|_{\rho=b} = b \sin \varphi, \quad u(\rho, 0) = u(\rho, \pi) = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

29. Решить краевую задачу в круге радиуса  $b$ :

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + A \sin \omega t;$$
$$u(\rho, \varphi)|_{\rho=b} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

30. Решить краевую задачу в полукруге радиуса  $b$ :

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + \rho \sin \varphi \sin \omega t, \quad 0 \leq \rho \leq b, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi;$$
$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

31. Решить краевую задачу в цилиндре радиуса  $b$ , высоты  $h$ :

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0;$$
$$u(\rho, \varphi, z, t)|_{z=0} = A, \quad u(\rho, \varphi, z, t)|_{z=h} = B, \quad u(\rho, \varphi, z, t)|_{\rho=b} = 0.$$

32. Решить краевую задачу в цилиндре радиуса  $b$ , высоты  $h$ :

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad u|_{t=0} = 0;$$
$$u|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=h} = 0, \quad u|_{\rho=b} = kt \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right).$$

33. Решить уравнение Пуассона в параллелепипеде  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ :

$$\Delta u = A, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=a} = C, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=b} = 0, \quad u|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=c} = 0.$$

34. Решить уравнение Пуассона в цилиндре  $0 \leq \rho \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h$ :

$$\Delta u = A, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{\rho=b} = 0, \quad u|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=h} = \rho \cos \varphi.$$

35. Стержень подвешен вертикально и закреплён так, что смещение во всех точках равно нулю. В момент времени  $t = 0$  стержень освобождается, оставаясь закрепленным в верхней точке. Определить колебания стержня под действием

собственного веса. *Указание:* задача сводится к интегрированию уравнения колебаний  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g$  при следующих начальных и граничных условиях:

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0.$$

**36.** Температура  $u = u(x, t)$  в тонком стержне удовлетворяет одномерному уравнению теплопроводности  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , где  $a^2$  — постоянный коэффициент. Рассмотреть распределение температур в полуграниченном стержне  $0 < x < \infty$ , если на левом конце стержня происходит теплоизлучение в среду с нулевой температурой, начальная температура стержня  $u_0 = \text{const}$ . *Указание:* задача сводится к интегрированию уравнения теплопроводности при следующих начальных и граничных условиях:

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = hu|_{x=0}, \quad h > 0.*$$

**37.** Рассмотреть распределение температур в ограниченном стержне  $0 < x < l$ , левый конец которого теплоизолирован, а на правом поддерживается постоянная температура  $u_1$ ; начальная температура  $u_0$  также постоянна.

**38.** Материальная точка массы  $m$  совершает прямолинейное движение под действием возмущающей силы  $a \sin(\omega t)$ , восстанавливающей силы  $mk^2 x$ , пропорциональной смещению, и силы сопротивления  $2m\eta \dot{x}$ , пропорциональной скорости. Начальное отклонение и скорость равны соответственно  $x_0$  и  $\dot{x}_0$ . Найти движение точки в случае малого сопротивления ( $k > n$ ). Считая  $n = 0$ , рассмотреть случай  $\omega \neq k$  и резонансный случай  $\omega = k$ . *Примечание:* как принято в механике, точкой сверху обозначена производная по времени  $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$ .

**39.** Конденсатор емкости  $C_0$ , заряженный до потенциала  $V$ , разряжается в момент времени  $t = 0$  на бесконечную линию без потерь ( $R = g = 0$ ) с параметрами  $(L, C)$ . Найти распределение тока  $I(x, t)$  в линии. *Указание:* граничные и начальные условия имеют вид

$$u|_{x=0} = Ve^{-\frac{t}{\tau}}, \quad u|_{x \rightarrow \infty} = O(1), \quad u|_{t=0} = 0, \quad I|_{t=0} = 0,$$

где  $\tau = \rho C_0$  — постоянное время разряда;  $\rho = \sqrt{L/C_0}$  — волновое сопротивление цепи.

**40.** Конец  $x = 0$  полубесконечной линии, обладающей самоиндукцией  $L$  и емкостью  $C$  на единицу длины, присоединяется в момент времени  $t = 0$  к источнику э. д. с.  $E = f(t)$ . Найти напряжение  $u(x, t)$  в каждой точке линии. *Указание:* граничные и начальные условия имеют вид  $u|_{x=0} = f(t)$ ,  $u|_{x \rightarrow \infty} = O(1)$ ,  $u|_{t=0} = 0$ ,  $I|_{t=0} = 0$ .

\* Задачи 36 и 37 рассмотрены в Лаврентьев, М. А., Шабат, Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М. : Физматгиз, 1958.

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

**Пример 1.** Найти распределение температуры в пластине толщиной  $a$ , грань  $x = 0$  которой излучает тепло в окружающую среду по закону Ньютона (температура окружающей среды равна нулю), а другая грань  $x = a$  поддерживается при постоянной температуре  $T_0$ , равной начальной температуре пластины.

*Решение.* Математическая формулировка задачи: требуется найти функцию  $u(x, \tau)$ , удовлетворяющую следующим условиям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \quad 0 < x < a, \quad \tau > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} - hu \Big|_{x=0} &= 0, \quad u|_{x=a} = T_0, \quad u|_{\tau=0} = T_0, \quad h > 0. \end{aligned}$$

Здесь для простоты записи введено приведенное время  $\tau = kt/(c\rho)$ . Задача является неоднородной в граничных условиях.

Наметим план решения задачи. Можно искать решение задачи в виде суммы двух функций  $u(x, \tau) = U(x) + w(x, \tau)$ , причем функцию  $U(x)$  выбрать так, чтобы она удовлетворяла исходному уравнению и неоднородным граничным условиям. Тогда для функции  $w(x, \tau)$  получим однородную задачу, решение которой можно построить методом Фурье:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{dx^2} &= 0, \quad \frac{dU}{dx} - hU \Big|_{x=0} = 0, \quad U|_{x=a} = T_0 \Rightarrow U(x) = \frac{T_0(1+hx)}{(1+ha)}, \\ \frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0, \quad 0 < x < a, \quad \tau > 0, \\ \frac{\partial w}{\partial x} - hw \Big|_{x=0} &= 0, \quad w|_{x=a} = 0, \quad w|_{\tau=0} = T_0 - U(x). \end{aligned}$$

Можно поступить иначе. Будем ориентироваться на применение метода Гринберга. По-прежнему будем искать решение в виде  $u(x, \tau) = U^*(x) + w^*(x, \tau)$ , но теперь от функции  $U^*(x)$  потребуем только, чтобы она удовлетворяла неоднородным граничным условиям, а в остальном она может быть произвольной. В этом случае в качестве функции  $U^*(x)$  можно взять, например, такую функцию  $U^*(x) = T_0 x^2/a^2$ . Тогда для функции  $w^*(x, \tau)$  мы получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^*}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + \frac{2T_0}{a^2}, \quad 0 < x < a, \quad \tau > 0, \\ \frac{\partial w^*}{\partial x} - hw^* \Big|_{x=0} &= 0, \quad w^*|_{x=a} = 0, \quad w^*|_{\tau=0} = T_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right). \end{aligned}$$

Реализуем, например, первую возможность с привлечением системы Maple. Построим сначала функцию  $U(x)$ :

```
>restart;
>u:=(x,tau)->U(x)+w(x,tau);
```

$$u := (x, \tau) \rightarrow U(x) + w(x, \tau)$$

>ode:=diff(U(x),x,x)=0;

$$ode := \frac{d^2}{dx^2}U(x) = 0$$

>dsolve(ode,U(x));assign(%);U:=unapply(U(x),x,\_C1,\_C2);

$$U(x) = \_C1x + \_C2$$
$$U := (x, \_C1, \_C2) \rightarrow \_C1x + \_C2$$

>eq1:=D[1](U)(0,\_C1,\_C2)-h\*U(0,\_C1,\_C2)=0;

eq2:=U(a,\_C1,\_C2)=T0;

$$eq1 := -\_C2h + \_C1 = 0$$

$$eq2 := \_C1a + \_C2 = T0$$

>solve({eq1,eq2},{\_C1,\_C2});assign(%);

factor(U(x,\_C1,\_C2));U:=unapply(% ,x);

$$\left\{ \_C1 = \frac{hT0}{ah+1}, \_C2 = \frac{T0}{ah+1} \right\}$$
$$\frac{T0(hx+1)}{ah+1}$$
$$U := x \rightarrow \frac{T0(hx+1)}{ah+1}$$

Итак, функцию  $U(x)$  мы построили:

$$U(x) = \frac{T_0(1+hx)}{(1+ha)}$$

Определим теперь дифференциальное уравнение для функции  $w(x, \tau)$ :

>eqW:=diff(w(x,tau),tau)-diff(w(x,tau),x,x)=0;

$$eqW := \frac{\partial}{\partial \tau}w(x, \tau) - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2}w(x, \tau) \right) = 0$$

и выполним разделение переменных

>res:=pdsolve(eqW,HINT='\*');

res := (w(x, \tau) =

$$= \_F1(x) \_F2(\tau) \& \left[ \left\{ \frac{d^2}{dx^2} + F1(x) = \_c1 \_F1(x), \frac{d}{d\tau} \_F2(\tau) = -c1 \_F2(\tau) \right\} \right]$$

>res1:=op(1,op(2,res));

$$res1 := \left\{ \frac{d^2}{dx^2} \_F1(x) = \_c1 \_F1(x), \frac{d}{d\tau} \_F2(\tau) = -c1 \_F2(\tau) \right\}$$

> s1:=res1[1];s2:=res1[2];

$$s1 := \frac{d}{d\tau} F2(\tau) = c1 F2(\tau)$$

$$s2 := \frac{d^2}{dx^2} F1(x) = c1 F1(x)$$

Сформулируем соответствующую задачу Штурма — Лиувилля (параметр разделения, как обычно, обозначим  $\lambda$ ):

> eq2:=lhs(s2)+lambda\*\_F1(x)=0;

e1:=\_F1(a)=0; e2:=D(\_F1)(0)-h\*\_F1(0)=0;

$$eq2 := \frac{d^2}{dx^2} F1(x) + \lambda F1(x) = 0$$

$$e1 := F1(a) = 0$$

$$e2 := D(F1)(0) - h F1(0) = 0$$

Находим общее решение дифференциального уравнения Штурма — Лиувилля

> dsolve(eq2, \_F1(x));

$$_F1(x) = C3 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C4 \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

Подставляем это решение в граничные условия и получаем уравнение для определения собственных значений — характеристическое уравнение:

> \_F1:=unapply(rhs(%),x);sist:={e1,e2};

$$_F1 := x \rightarrow C3 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C4 \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

$$sist := \{ C3\sqrt{\lambda} - h C4 = 0, C3 \sin(\sqrt{\lambda}a) + C4 \cos(\sqrt{\lambda}a) = 0 \}$$

> A:=linalg[genmatrix](sist,{C3,C4});

$$A := \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda} & -h \\ \sin(\sqrt{\lambda}a) & \cos(\sqrt{\lambda}a) \end{bmatrix}$$

> Delta:=convert(linalg[det](A),trig);

$$\Delta := \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}a) + h \sin(\sqrt{\lambda}a)$$

> ch:=expand(Delta/cos(sqrt(lambda)\*a))=0;

$$ch := \sqrt{\lambda} + \frac{h \sin(\sqrt{\lambda}a)}{\cos(\sqrt{\lambda}a)} = 0$$

> ch:=convert(lhs(ch),tan)=0;

$$ch := \sqrt{\lambda} + h \tan(\sqrt{\lambda}a) = 0$$

> e\_ch:=isolate(%,tan(sqrt(lambda)\*a));

$$e\_ch := \tan(\sqrt{\lambda}a) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}$$

Удобно ввести обозначение  $\sqrt{\lambda}a = \mu$ , тогда последнее уравнение переписется в виде

>e\_ch:=subs(sqrt(lambda)=mu/a,e\_ch);

$$e\_ch := \tan(\mu) = -\frac{\mu}{ah}$$

Пусть  $\mu_n$  — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg}(\mu) = -\frac{\mu}{ah}.$$

Тогда собственные значения задачи будут

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{a}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

>lambda:=n->(mu[n]/a)^2;

$$\lambda := n \rightarrow \frac{\mu_n^2}{a^2}$$

Определим теперь собственные функции:

>\_C3:=solve(e2,\_C3);

$$\_C3 := \frac{h - C4}{\sqrt{\lambda}}$$

>simplify(\_F1(x));

$$\frac{-C4(\sin(\sqrt{\lambda}x)h + \cos(\sqrt{\lambda}x)\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}$$

>simplify(%/\_C4\*sqrt(lambda));

$$\sin(\sqrt{\lambda}x)h + \cos(\sqrt{\lambda}x)\sqrt{\lambda}$$

>simplify(subs(lambda^(1/2)=mu[n]/a,%));

$$\frac{\sin\left(\frac{\mu_n x}{a}\right)ha + \cos\left(\frac{\mu_n x}{a}\right)\mu_n}{a}$$

>simplify(%\*a);

$$\sin\left(\frac{\mu_n x}{a}\right)ha + \cos\left(\frac{\mu_n x}{a}\right)\mu_n$$

>X:=unapply(%,x,n);

$$X := (x, n) \rightarrow \sin\left(\frac{\mu_n x}{a}\right)ha + \cos\left(\frac{\mu_n x}{a}\right)\mu_n$$

Таким образом, собственные функции будут

$$X_n(x) = ah \sin\left(\frac{\mu_n x}{a}\right) + \mu_n \cos\left(\frac{\mu_n x}{a}\right).$$



Проверим ортогональность найденных собственных функций и вычислим их норму:

```
>In:=Int(X(x,n)*X(x,m),x=0..a);
In:=expand(simplify(value(In)));
```

$$In := \frac{a^3 h^2 \mu_m \sin(\mu_n) \cos(\mu_m)}{\mu_m^2 - \mu_n^2} + \frac{a^3 h^2 \mu_n \cos(\mu_n) \sin(\mu_m)}{\mu_m^2 - \mu_n^2} +$$

$$+ \frac{a^2 h \mu_m^2 \sin(\mu_n) \sin(\mu_m)}{\mu_m^2 - \mu_n^2} - \frac{a^2 h \mu_n^2 \sin(\mu_n) \sin(\mu_m)}{\mu_m^2 - \mu_n^2} -$$

$$- \frac{a \mu_m \mu_n^2 \sin(\mu_n) \cos(\mu_m)}{\mu_m^2 - \mu_n^2} + \frac{a \mu_m^2 \mu_n \cos(\mu_n) \sin(\mu_m)}{\mu_m^2 - \mu_n^2}$$

Упростим полученный интеграл с учетом характеристического уравнения:

```
>In:=combine(subs(sin(mu[m])=-mu[m]/a/h*cos(mu[m]),
>sin(mu[n])=-mu[n]/a/h*cos(mu[n]),In));
```

$$In:=0$$

Все в порядке! Вычислим квадрат нормы

```
>norma2:=Int(X(x,n)^2,x=0..a);
norma2:=value(norma2);
norma2:=
expand(subs(sin(mu[n])=-mu[n]/a/h*cos(mu[n]),norma2));
```

$$norma2 := \int_0^a \left( \sin\left(\frac{\mu_n x}{a}\right) h a + \cos\left(\frac{\mu_n x}{a}\right) \mu_n \right)^2 dx$$

$$norma2 := -\frac{1}{2} h a^2 \cos(\mu_n)^2 + \frac{1}{2} a^3 h^2 - \frac{1}{2} \frac{\mu_n^2 \cos(\mu_n)^2}{h} + h a^2 + \frac{1}{2} \mu_n^2 a$$

```
>norma2:=collect(norma2,h);norma2:=collect(norma2,a);
```

$$norma2 := \frac{1}{2} a^3 h^2 + \left( a^2 - \frac{1}{2} a^2 \cos(\mu_n)^2 \right) h + \frac{1}{2} \mu_n^2 a - \frac{1}{2} \frac{\mu_n^2 \cos(\mu_n)^2}{h}$$

$$norma2 := \frac{1}{2} a^3 h^2 + \left( 1 - \frac{1}{2} \cos(\mu_n)^2 \right) h a^2 + \frac{1}{2} \mu_n^2 a - \frac{1}{2} \frac{\mu_n^2 \cos(\mu_n)^2}{h}$$

Учтем известное тригонометрическое тождество  $\cos^2(\mu_n) = 1/[1 + \operatorname{tg}^2(\mu_n)]$  и, кроме того, учтем еще, что из характеристического уравнения следует  $\operatorname{tg}^2(\mu_n) = (\mu_n / ah)^2$ :

```
>norma2:=
simplify(subs(cos(mu[n])^2=a^2*h^2/(a^2*h^2+mu[n]^2),
norma2));
```

$$norma2 := \frac{1}{2} (a^2 h^2 + ah + \mu_n^2) a$$

>norma2:=unapply(norma,n);

$$\text{norma2} := n \rightarrow \frac{1}{2}(a^2 h^2 + ah + \mu_n^2)a$$

Итак, мы получили

$$\int_0^a X_n(x)X_m(x)dx = \begin{cases} 0, m \neq n, \\ \frac{a}{2}(a^2 h^2 + ah + \mu_n^2), m = n. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь второе обыкновенное дифференциальное уравнение:

>eq1:=lhs(s1)+lambda(n)\*\_F2(tau)=0;

$$\text{eq1} := \frac{d}{d\tau} F2(\tau) + \frac{\mu_n^2}{a^2} F2(\tau) = 0$$

Найдем общее решение этого уравнения:

>dsolve(eq1,\_F2(tau));

$$_F2(\tau) = _C4 e^{-\frac{\mu_n^2 \tau}{a^2}}$$

Таким образом, мы получили счетное множество частных решений нашей задачи

$$w_n(x, \tau) = C_n e^{-\frac{\mu_n^2 \tau}{a^2}} \left[ ah \sin\left(\frac{\mu_n x}{a}\right) + \mu_n \cos\left(\frac{\mu_n x}{a}\right) \right], n = 1, 2, 3, \dots$$

Каждая такая функция удовлетворяет уравнению и однородным граничным условиям, но, вообще говоря, не удовлетворяет начальным условиям. Как обычно, воспользуемся принципом суперпозиции и составим формальный ряд:

$$w(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{\mu_n^2 \tau}{a^2}} \left[ ah \sin\left(\frac{\mu_n x}{a}\right) + \mu_n \cos\left(\frac{\mu_n x}{a}\right) \right].$$

>spr:=Sum(C(k)\*exp(-lambda(k)\*tau)\*X(x,k),k=1..infinity);

$$\text{spr} := \sum_{k=1}^{\infty} C(k) e^{-\frac{\mu_k^2 \tau}{a^2}} \left( \sin\left(\frac{\mu_k x}{a}\right) ha + \cos\left(\frac{\mu_k x}{a}\right) \mu_k \right)$$

Перейдем к пределу при  $\tau \rightarrow 0$  (считая это возможным), получим

$$w(x, 0) = T_0 - U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[ ah \sin\left(\frac{\mu_n x}{a}\right) + \mu_n \cos\left(\frac{\mu_n x}{a}\right) \right].$$

Откуда находим коэффициенты разложения:

$$C_n = \frac{\int_0^a [T_0 - U(x)] X_n(x) dx}{\|X_n(x)\|^2}.$$

>Ck:=Int((T0-U(x))\*X(x,k),x=0..a)/norma2(k);Ck:=value(Ck);

$$Ck := \frac{2 \left( \int_0^a \left( T0 - \frac{T0(hx+1)}{ah+1} \right) \left( \sin\left(\frac{\mu_k x}{a}\right) ha + \cos\left(\frac{\mu_k x}{a}\right) \mu_k \right) dx \right)}{(a^2 h^2 + ah + \mu_k^2) a}$$

$$Ck := \frac{2ahT0(\sin(\mu_k)ha - ah\mu_k + \mu_k \cos(\mu_k) - \mu_k)}{\mu_k^2 (ah+1)(a^2 h^2 + ah + \mu_k^2)}$$

Упростим полученный результат с помощью характеристического уравнения

>Ck:=simplify(subs(sin(mu[k])=-mu[k]/a/h\*cos(mu[k]),Ck));

$$Ck := \frac{2hT0a}{\mu_k (a^2 h^2 + ah + \mu_k^2)}$$

>C:=unapply(Ck,k);

$$C := k \rightarrow \frac{2hT0a}{\mu_k (a^2 h^2 + ah + \mu_k^2)}$$

Итак, мы получили

$$C_n = \frac{2ahT_0}{\mu_n (\mu_n^2 + a^2 h^2 + ah)}.$$

Окончательно, решение нашей задачи дается формулой

$$w(x, \tau) = 2ahT_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\mu_n^2 \tau}{a^2}}}{\mu_n (\mu_n^2 + a^2 h^2 + ah)} \left[ ah \sin\left(\frac{\mu_n x}{a}\right) + \mu_n \cos\left(\frac{\mu_n x}{a}\right) \right].$$

Заметим, что решение можно представить и в другой форме. А именно собственные функции можно преобразовать по известной тригонометрической формуле:

$$\alpha \sin(z) + \beta \cos(z) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(z + \varphi), \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

В нашем случае, с учетом характеристического уравнения, будем иметь

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\mu_n}{ah}\right) = -\mu_n,$$

и, таким образом,

$$\left[ ah \sin\left(\frac{\mu_n x}{a}\right) + \mu_n \cos\left(\frac{\mu_n x}{a}\right) \right] = \sqrt{a^2 h^2 + \mu_n^2} \sin\left(\frac{\mu_n (x-a)}{a}\right).$$

Итак, другая форма представления решения

$$w(x, \tau) = 2ahT_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\mu_n^2 + h^2 a^2}}{\mu_n (\mu_n^2 + h^2 a^2 + ha)} e^{-\frac{\mu_n^2 \tau}{a^2}} \sin\left(\frac{\mu_n (x-a)}{a}\right).$$

Читателю мы рекомендуем самостоятельно реализовать вторую возможность решения — в виде  $u(x, \tau) = U^*(x) + w^*(x, \tau)$  с использованием метода Гринберга.

**Пример 2.** Решить смешанную задачу для неоднородного уравнения гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0.$$

*Решение.* Воспользуемся системой Maple. Определим задачу:

```
>restart;
```

```
>pde:=diff(u(x,t),t$2)=v^2*diff(u(x,t),x$2)+g;
```

$$pde := \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = v^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right) + g$$

```
>init_c:=[u(x,0)=0,D[2](u)(x,0)=0];
```

$$init\_c := [u(x, 0) = 0, D_2(u)(x, 0) = 0]$$

```
>bound_c:=[u(0,t)=0,D[1](u)(l,t)=0];
```

$$bound\_c := [u(0, t) = 0, D_1(u)(l, t) = 0]$$

Будем решать задачу методом Гринберга. Сформулируем соответствующую задачу Штурма — Лиувилля. Для этого произведем разделение переменных в однородном уравнении:

```
>res:=pdsolve(subs(g=0,pde),HINT=X(x)*T(t));
```

$$res := (u(x, t) = X(x)T(t)) \& \text{ where } \left[ \left\{ \frac{d^2}{dt^2} T(t) = v^2 \_c1 T(t), \frac{d^2}{dx^2} X(x) = \_c1 X(x) \right\} \right]$$

Соответствующая задача Штурма — Лиувилля:

```
>ode1:=subs(_c1=-lambda,op([2,1,2],res));
```

```
bound:=[X(0)=0,D(X)(l)=0];
```

$$ode1 := \frac{d^2}{dx^2} X(x) = -\lambda X(x)$$

$$bound := [X(0) = 0, D(X)(l) = 0]$$

Находим общее решение дифференциального уравнения с учетом условия  $X(0) = 0$ :

```
>sol_ode:=dsolve({ode1,bound[1]},X(x));
```

$$sol\_ode := X(x) = \_C1 \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

```
>X:=unapply(rhs(sol_ode),x);
```

$$X := x \rightarrow \_C1 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Подставим это решение во второе граничное условие и получим уравнение для определения собственных значений задачи Штурма — Лиувилля. Сразу же и решим полученное характеристическое уравнение:

```
>eq:=bound[2];eq:=isolate(eq,cos(sqrt(lambda)*l));
```

$$eq := \_C1 \cos(\sqrt{\lambda}l)\sqrt{\lambda} = 0$$

$$eq := \cos(\sqrt{\lambda}l) = 0$$

```
>solve(eq,lambda,allsolutions);
```

$$\frac{1}{4} \frac{\pi^2 (1 + 2 \_Z1 \_)}{l^2}$$

Таким образом, собственные значения будут:

```
>ev:=unapply(subs(_Z1=k,%),k);
```

$$ev := k \rightarrow \frac{1}{4} \frac{\pi^2 (1 + 2k)^2}{l^2},$$

а соответствующие им собственные функции:

```
>_C1:=1:
```

```
simplify(subs(lambda=ev(k),X(x))) assuming l>0,k::posint:  
op(2,%);
```

$$\sin\left(\frac{1}{2} \frac{\pi(1 + 2k)x}{l}\right)$$

```
>X:=unapply(% ,x,k);
```

$$X := (x, k) \rightarrow \sin\left(\frac{1}{2} \frac{\pi(1 + 2k)x}{l}\right)$$

Вычислим квадрат нормы собственных функций (он понадобится нам при записи решения в виде ряда)

```
>norma2:=simplify(int(X(x,k)^2,x=0..l)) assuming k::posint;
```

$$norma2 := \frac{1}{2}l$$

В соответствии с методом Гринберга умножаем теперь исходное уравнение в частных производных на собственные функции и интегрируем по отрезку  $[0, l]$ . Получим:

```
>ode2:=
```

```
Int(lhs(pde)*X(x,k),x=0..l)=
```

```
Int(op(1,rhs(pde))*X(x,k),x=0..l)+
```

```
int(op(2,rhs(pde))*X(x,k),x=0..l) assuming k::posint;
```

$$\begin{aligned} \text{ode2} &:= \int_0^l \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) \right) \sin\left( \frac{1}{2} \frac{\pi(1+2k)x}{l} \right) dx = \\ & \int_0^l v^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right) \sin\left( \frac{1}{2} \frac{\pi(1+2k)x}{l} \right) dx + \frac{2gl}{\pi(1+2k)} \end{aligned}$$

Обозначим трансформанту Гринберга как  $U(t)$

$$\begin{aligned} U(t) &= \int_0^l u(x, t) \sin\left( \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \right) dx, \\ \frac{d^2 U(t)}{dt^2} &= \frac{d^2}{dt^2} \int_0^l u(x, t) \sin\left( \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \right) dx, \end{aligned}$$

и перепишем уравнение ode2:

>ode2:=subs(lhs(ode2)=diff(U(t),t\$2),ode2);

$$\text{ode2} := \frac{d^2}{dt^2} U(t) = \int_0^l v^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right) \sin\left( \frac{1}{2} \frac{\pi(1+2k)x}{l} \right) dx + \frac{2gl}{\pi(1+2k)}$$

Преобразовываем интеграл в правой части последнего равенства:

>J:=op(1,rhs(ode2));

$$J := \int_0^l v^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right) \sin\left( \frac{1}{2} \frac{\pi(1+2k)x}{l} \right) dx$$

два раза по частям.

Подключаем пакет IntegrationTools и интегрируем по частям один раз:

>with(IntegrationTools):

>J:=Parts(J,X(x,k));

$$J := v^2 D_1(u)(l, t) \sin\left( \frac{1}{2} \pi(1+2k) \right) - \left( \int_0^l \frac{1}{2} v^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right) \cos\left( \frac{1}{2} \frac{\pi(1+2k)x}{l} \right) \pi(1+2k) dx \right)$$

С учетом граничных условий находим:

>J:=subs({bound\_c[1],bound\_c[2]},J):

J:=simplify(J) assuming k::posint;

$$J := -\frac{1}{2} \frac{v^2 \pi(1+2k) \left( \int_0^l \left( \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right) \cos\left( \frac{1}{2} \frac{\pi(1+2k)x}{l} \right) dx \right)}{1}$$

Интегрируем второй раз по частям с учетом граничных условий:

```
>J:=Parts(J,D[1](X)(x,k):
>subs({bound_c[1],bound_c[2]},%):
simplify(%) assuming k::posint;
```

$$\frac{1}{4} \frac{v^2 \pi^2 (1+2k)^2 \left( \int_0^l u(x,t) \sin\left(\frac{1}{2} \frac{\pi(1+2k)x}{l}\right) dx \right)}{l^2}$$

Итак, получаем уравнение ode2 для трансформанты:

```
>ode2:=subs(op(1,rhs(ode2))=%,ode2):
ode2:=subs(op(1,rhs(ode2))=-ev(k)*v^2*U(t),ode2);
```

$$\text{ode2} := \frac{d^2}{dt^2} U(t) = -\frac{1}{4} \frac{\pi^2 (1+2k)^2 v^2 U(t)}{l^2} + \frac{2gl}{\pi(1+2k)}$$

Решаем теперь это уравнение с учетом начальных условий:

```
>sol_ode2:=dsolve({ode2,U(0)=0,D(U)(0)=0},U(t));
```

$$\text{sol\_ode2} := U(t) = -\frac{8 \cos\left(\frac{1}{2} \pi \left(\frac{v}{l} + \frac{2vk}{l}\right) t\right) gl^3}{\pi^3 v^2 (8k^3 + 12k^2 + 6k + 1)} + \frac{gl^3}{\pi^3 \left(\frac{1}{2} + k\right)^3 v^2}$$

Окончательно получаем следующую трансформанту:

```
>U:=unapply(rhs(sol_ode2),t,k);
```

$$U := (t, k) \rightarrow -\frac{8 \cos\left(\frac{1}{2} \pi \left(\frac{v}{l} + \frac{2vk}{l}\right) t\right) gl^3}{\pi^3 v^2 (8k^3 + 12k^2 + 6k + 1)} + \frac{gl^3}{\pi^3 \left(\frac{1}{2} + k\right)^3 v^2}$$

Решение задачи имеет вид:

```
>'u(x,t)'=Sum(U(t,k)*X(x,k)/norma2,k=1..infinity):
simplify(%)
```

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{16l^2 \sin\left(\frac{1}{2} \frac{\pi(1+2k)x}{l}\right) \left( \cos\left(\frac{1}{2} \frac{\pi v(1+2k)t}{l}\right) - 1 \right) g}{\pi^3 (1+2k)^3 v^2} \right)$$

Решение задачи можно преобразовать к другому виду, просуммировав часть ряда. А именно покажем, что справедлива формула

$$\frac{gx(2l-x)}{2v^2} = 16l^2 g \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \frac{\pi(1+2k)x}{l}\right)}{\pi^3 (1+2k)^3 v^2}.$$

Действительно, вычислим коэффициенты Фурье функции, стоящей в левой части этого равенства. Определим функцию в Maple:

>f:=x->g\*x\*(2\*l-x)/2/v^2;

$$f := x \rightarrow \frac{1}{2} \frac{gx(2l-x)}{v^2}$$

Вычислим интеграл, определяющий коэффициенты Фурье:

>Int(f(x)\*X(x,k),x=0..l)/norma2;

$$\frac{2 \left( \int_0^l \frac{1}{2} \frac{gx(2l-x) \sin\left(\frac{1}{2} \frac{\pi(1+2k)x}{l}\right)}{v^2} dx \right)}{l}$$

>factor(simplify(value(%)) assuming k::posint);

$$\frac{16gl^2}{\pi^3v^2(1+2k)^3}$$

Что и требовалось доказать.

Следовательно, решение задачи можно записать и так:

$$u(x, t) = \frac{gx(2l-x)}{2v^2} - \frac{16l^2g}{\pi^3v^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \frac{\pi(1+2k)x}{l}\right) \cos\left(\frac{1}{2} \frac{\pi v(1+2k)t}{l}\right)}{(1+2k)^3}.$$

**Пример 3.** Решить задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

*Решение.* Переменная  $x$  меняется в бесконечных пределах, поэтому естественно для решения данной задачи попробовать применить преобразование Фурье по переменной  $x$ . Воспользуемся системой Maple. Определим задачу. Сначала загрузим необходимые нам команды:

>with(intrans,fourier,invfourier):

with(student,changevar):

Задаем уравнение и начальные условия:

>eq:=diff(u(x,t),t)-a^2\*diff(u(x,t),x,x)=0;

ic:=u(x,0)=phi(x);

$$eq := \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - a^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right) = 0$$

$$ic := u(x, 0) = \phi(x)$$

Применяем преобразование Фурье:

>fourier(eq, x, w);

$$a^2w^2fourier(u(x, t), x, w) + \frac{\partial}{\partial t} fourier(u(x, t), x, w) = 0$$



Обозначим трансформанту Фурье как  $v(t)$ :

`>subs(fourier(u(x,t),x,w)=v(t),%);`

$$a^2 w^2 v(t) + \frac{d}{dt} v(t) = 0$$

Решаем полученное уравнение для трансформанты Фурье:

`>dsolve({%,v(0)=fourier(rhs(ic),x,w)},v(t));`

$$v(t) = \text{fourier}(\phi(x), x, w) e^{-a^2 w^2 t}$$

Чтобы применить обратное преобразование Фурье, переобозначим трансформанту

`>subs(v(t)=fourier(u(x,t),x,w),%);`

$$\text{fourier}(u(x,t), x, w) = \text{fourier}(\phi(x), x, w) e^{-a^2 w^2 t}$$

Находим обратное преобразование и упрощаем полученный результат:

`>invfourier(lhs(%),w,x)=`

`invfourier(rhs(%),w,x) assuming a>0,t>0;`

$$u(x,t) = \frac{1}{4} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi^{3/2} \phi(-U1) e^{-\frac{1}{4} \frac{(x+U1)^2}{a^2 t}}}{a\sqrt{t}} d_{U1}}{\pi^2}$$

`>changevar(_U1=-xi,%,xi);`

$$u(x,t) = \frac{1}{4} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi^{3/2} \phi(\xi) e^{-\frac{1}{4} \frac{(x-\xi)^2}{a^2 t}}}{a\sqrt{t}} d\xi}{\pi^2}$$

`>expand(% ,exp);`

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) e^{-\frac{1}{4} \frac{(x-\xi)^2}{a^2 t}} d\xi}{\sqrt{\pi} \sqrt{ta}}$$

Итак, мы получили формальное решение нашей задачи в виде интеграла

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

**Пример 4.** Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в верхней полуплоскости.

*Решение.* Эта задача рассмотрена нами в п. 5.5. Продемонстрируем ее решение в Maple с помощью преобразования Фурье. Переменная  $x$  меняется в беско-

нечных пределах, поэтому применяем преобразование Фурье по переменной  $x$ .  
 Определим задачу:

```
>with(inttrans,fourier,invfourier):
eq:=linalg[laplacian](u(x,y),[x,y])=0;
bc:=u(x,0)=phi(x);
```

$$eq := \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) = 0$$

$$bc := u(x, 0) = \phi(x)$$

Применяем преобразование Фурье:

```
>fourier(eq,x,w);
```

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{fourier}(u(x, y), x, w) - w^2 \text{fourier}(u(x, y), x, w) = 0$$

```
>subs(fourier(u(x,y),x,w)=v(y),%);
```

$$\frac{d^2}{dy^2} v(y) - w^2 v(y) = 0$$

```
>dsolve(%,v(y));
```

$$v(y) = \_C1 e^{-wy} + \_C2 e^{-wy}$$

В силу ограниченности на бесконечности запишем трансформанту так:

```
>v:=y->C1*exp(-abs(w)*y);
```

$$v := y \rightarrow C1 e^{-|w|y}$$

Используем граничное условие:

```
>v(0)=fourier(rhs(bc),x,w);
```

$$C1 = \text{fourier}(\phi(x), x, w)$$

Находим обратное преобразование:

```
>assign(%):invfourier(v(y),w,x) assuming y>0;
```

$$\frac{1}{4} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\pi\phi(-U1)y}{U1^2 + 2\_U1x + x^2 + y^2} d\_U1}{\pi^2}$$

```
>expand(%);
```

$$y \left( \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(-U1)}{U1^2 + 2\_U1x + x^2 + y^2} d\_U1 \right)$$

$\pi$

>student[changevar](\_U1=-xi,%xi);

$$\frac{y \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\xi)}{x^2 - 2x\xi + \xi^2 + y^2} d\xi \right)}{\pi}$$

>u(x,y)=student[completesquare](%,x);

$$u(x, y) = \frac{y \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \right)}{\pi}$$

Итак, получили формальное решение в виде интеграла

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi,$$

которое, как и следовало ожидать, совпадает с формулой (5.76).

**Пример 5.** Решить задачу [5]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta^2 u = 6x^2 y^2 z^2, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad -\infty < x, y, z < \infty, \quad t > 0.$$

*Решение.* Продемонстрируем решение задачи в Maple с помощью преобразования Фурье. Переменные  $x, y, z$  меняются в бесконечных пределах, поэтому последовательно применяем преобразование Фурье по этим переменным.

Определим задачу:

```
>with(intrans,fourier,invfourier):
with(linalg,laplacian):
eq:=diff(u(x,y,z,t),t$2)=
-laplacian(laplacian(u(x,y,z,t),[x,y,z]),[x,y,z])+
6*x^2*y^2*z^2;
ic:=u(x,y,z,0)=0;ict:=D[4](u)(x,y,z,0)=0;
```

$$eq := \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, y, z, t) = - \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x, y, z, t) \right) - 2 \left( \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} u(x, y, z, t) \right) - 2 \left( \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial x^2} u(x, y, z, t) \right) -$$

$$- \left( \frac{\partial^4}{\partial y^4} u(x, y, z, t) \right) - 2 \left( \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial y^2} u(x, y, z, t) \right) - \left( \frac{\partial^4}{\partial z^4} u(x, y, z, t) \right) + 6x^2 y^2 z^2$$

$$ic := u(x, y, z, 0) = 0$$

$$ict := D_4(u)(x, y, z, 0) = 0$$

Применяем преобразование Фурье. Промежуточные преобразования выводить не будем ввиду их громоздкости. Для этого каждый оператор будем заканчивать двоеточием вместо точки с запятой:

```
>fourier(eq,x,w1):
>fourier(%,y,w2):
>fourier(%,z,w3):
```

Решаем полученное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно трансформанты Фурье:

```
>subs(fourier(fourier(fourier(
u(x,y,z,t),x,w1),y,w2),z,w3)=s(t),%):
>dsolve({%s(0)=0,D(s)(0)=0},s(t):
```

Последовательно вычисляем обратное преобразование:

```
>invfourier(rhs(%),w3,z):
>invfourier(%w2,y):
>invfourier(%w1,x):
```

$$-t^2(-3x^2y^2z^2 + 2t^2x^2 + 2t^2y^2 + 2t^2z^2)$$

Итак, мы получили решение:

```
>u(x,y,z,t)=collect(%t):
```

$$u(x, y, z, t) = (-2x^2 - 2y^2 - 2z^2)t^4 + 3x^2y^2z^2t^2$$

Выполним проверку полученного решения:

```
>u:=unapply(rhs(%),(x,y,z,t):
>simplify(lhs(eq)-rhs(eq));
>simplify(lhs(ict)-rhs(ict));
>simplify(lhs(ict)-rhs(ict));
```

0  
0  
0

Все в порядке! Таким образом, решением данной задачи будет функция

$$u(x, y, z, t) = 3x^2y^2z^2t^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)t^4.$$

**Пример 6.** Решить задачу [5]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad u|_{t=0} = \cos(x^2), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \frac{1}{4}.$$

*Решение.* Продемонстрируем решение задачи в Maple с помощью косинус-преобразования Фурье по переменной  $x$ :

```
>restart;with(inttrans,fouriercos):
>eq:=diff(u(x,t),t$2)=-diff(u(x,t),x$4);
ic:=u(x,0)=cos(x^2);ict:=D[2](u)(x,0)=0;
```

$$eq := \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = - \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x, t) \right)$$

$$ic := u(x, 0) = \cos(x^2)$$

$$ist := D_2(u)(x, 0) = 0$$

```
>fouriercos(eq,x,w):
>subs(fouriercos(u(x,t),x,w)=s(t),D[1,1,1](u)(0,t)=0,
```

```

D[1](u)(0,t)=0,%):
>dsolve({%,s(0)=
fouriercos(rhs(ic),x,w),D(s)(0)=0},s(t)):
>expand(%):
>combine(%,trig):
>factor(%):
>su:={4*t+1=a,4*t-1=-b};sui:=solve(su,{a,b}):
>subs(su,rhs(%))):
>simplify(%):

```

$$\frac{1}{4} \cos\left(\frac{w^2 b}{4}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{w^2 a}{4}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{w^2 a}{4}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{w^2 b}{4}\right)$$

```

>fouriercos(%,w,x) assuming a>0,b>0:
>map(simplify,expand(%)):

```

Итак, мы получили решение:

```
>sol:=u(x,t)=subs(sui,%);
```

$$sol := u(x, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{-4t+1}} \cos\left(\frac{x^2}{-4t+1}\right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4t+1}} \cos\left(\frac{x^2}{4t+1}\right)$$

Выполним проверку:

```

>u:=unapply(rhs(sol),(x,t)):
>simplify(lhs(eq)-rhs(eq));
>simplify(lhs(ic)-rhs(ic));
>simplify(lhs(ict)-rhs(ict));

```

0  
0  
0

Таким образом, решением данной задачи будет функция

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{1+4t}} \cos\left(\frac{x^2}{1+4t}\right) + \frac{1}{2\sqrt{1-4t}} \cos\left(\frac{x^2}{1-4t}\right).$$

**Пример 7.** К концу  $x = 0$  полубесконечного кабеля (линия с параметрами  $R$  и  $C$ ) в момент времени  $t = 0$  подключается постоянная э. д. с.  $E$ . Найти напряжение в каждой точке кабеля.

*Решение.* Выпишем основные уравнения с учетом того, что  $L = g = 0$  (см. формулы (2.13) и (2.14)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + RI &= 0, \\ \frac{\partial I}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Исключив ток, получим

$$-\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad v^2 = \frac{1}{RC}.$$

Поставим начальные и граничные условия:

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = E, \quad u|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0.$$

Определим уравнение и дополнительные условия:

```
>restart;
>eq:=diff(u(x,t),x,x)-RC*diff(u(x,t),t)=0;
bc:=u(0,t)=E;
ic:=u(x,0)=0;
```

$$eq := \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - RC \left( \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \right) = 0$$

$$bc := u(0, t) = E$$

$$ic := u(x, 0) = 0$$

Подключим необходимые программы из пакета inttrans:

```
>with(inttrans,laplace,invlaplace):
```

Применяем преобразование Лапласа к нашему уравнению и получаем обыкновенное дифференциальное уравнение относительно трансформанты Лапласа:

```
>laplace(eq,t,p);
```

$$-laplace(u(x,t),t,p)RCp + u(x,0)RC + \frac{\partial^2}{\partial x^2} laplace(u(x,t),t,p) = 0$$

```
>ode:=subs(laplace(u(x,t),t,p)=U(x),ic,%);
```

$$ode := -U(x)RCp + \frac{d^2}{dx^2} U(x) = 0$$

Решаем полученное уравнение:

```
>res:=dsolve(ode,U(x));assign(res);
```

$$res := U(x) = \_C1e^{\sqrt{RC}\sqrt{px}} + \_C2e^{-\sqrt{RC}\sqrt{px}}$$

Выбираем ограниченное на бесконечности решение:

```
>U:=subs(_C1=0,U(x));
```

$$U := \_C2e^{-\sqrt{RC}\sqrt{px}}$$

Трансформируем второе граничное условие, определяем вторую константу из этого граничного условия и тем самым полностью решаем задачу для трансформанты:

```
>laplace(bc,t,p);
```

$$laplace(u(0,t),t,p) = \frac{E}{p}$$

>simplify(subs(laplace(u(0,t),t,p)=  
subs(x=0,U),lhs(%)))=rhs(%);

$$-C2 = \frac{E}{p}$$

>assign(%);U;

$$\frac{Ee^{-\sqrt{RC}\sqrt{p}x}}{p}$$

Находим теперь обратное преобразование Лапласа:

>invlaplace(U,p,t);

$$E\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}}x\right)$$

Таким образом, окончательно получаем

$$u(x,t) = E\left[1 - \Phi\left(\frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t}}\right)\right],$$

где  $\Phi(x)$  — интеграл вероятности.

Проверим полученное решение:

>u:=unapply(%,(x,t));

$$u := (x, t) \rightarrow E\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}}x\right)$$

>simplify(eq);simplify(bc);

$$0 = 0$$

$$E = E$$

>assume(x>0):assume(t>0):assume(RC>0):

Limit(u(x,t),t=0,right)=limit(u(x,t),t=0,right);

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} E\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}}x\right) = 0$$

Все в порядке!

**Пример 8.** Решить следующую задачу:

$$9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 36e^{2x}\sin(3t), \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 3xe^{2x},$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \sin(3t).$$

*Решение.* Воспользуемся для решения нашей задачи системой Maple. Определим задачу:

```

>eq:=9*diff(u(x,t),x,x)+4*diff(u(x,t),t,t)=
36*exp(2*x)*sin(3*t);
bc1:=u(0,t)=0;
bc2:=D[1](u)(0,t)=sin(3*t);
ic1:=u(x,0)=0;
ic2:=D[2](u)(x,0)=3*x*exp(2*x);

```

$$eq := 9 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right) + 4 \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) \right) = 36e^{2x} \sin(3t)$$

$$bc1 := u(0, t) = 0$$

$$bc2 := D_1(u)(0, t) = \sin(3t)$$

$$ic1 := u(x, 0) = 0$$

$$ic2 := D_2(u)(x, 0) = 3xe^{2x}$$

Подключим программы преобразования Лапласа и его обращения:

```

>with(inttrans,laplace,invlaplace):

```

Применяем преобразование Лапласа к заданному уравнению и получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для трансформанты:

```

>laplace(eq,x,p):
>subs(laplace(u(x,t),x,p)=v(t),bc1,bc2,%);

```

$$9p^2v(t) - 9\sin(3t) + 4 \left( \frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) = \frac{36\sin(3t)}{p-2}$$

Решаем полученное уравнение с учетом граничных условий для трансформанты:

```

>dsolve({%,v(0)=laplace(rhs(ic1),x,p),D(v)(0)=
>laplace(rhs(ic2),x,p)},{v(t)});

```

$$v(t) = \frac{\sin(3t)}{(p-2)^2}$$

```

>subs(v(t)=laplace(u(x,t),x,p),%);

```

$$laplace(u, (x, t), x, p) = \frac{\sin(3t)}{(p-2)^2}$$

Вычисляем обратное преобразование и получаем решение нашей задачи:

```

>invlaplace(%,p,x);

```

$$u(x, t) = \sin(3t)xe^{2x}$$



Итак, решение нашей задачи оказалось возможным представить в элементарных функциях

$$u(x, t) = xe^{2x}\sin(3t).$$

Выполним проверку решения:

```
>u:=unapply(rhs(%),(x,t):
simplify(eq);
simplify(bc1); simplify(bc2);
simplify(ic1); simplify(ic2);
```

$$36e^{2x} \sin(3t) = 36e^{2x} \sin(3t)$$

$$0 = 0$$

$$\sin(3t) = \sin(3t)$$

$$0 = 0$$

$$3xe^{2x} = 3xe^{2x}$$

Все в порядке!

**Пример 9.** Решить следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} + u = f(x), \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$u|_{x=0} = t, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0.$$

*Решение.* Воспользуемся для решения нашей задачи системой Maple. Определим задачу:

```
>restart;with(inttrans,laplace,invlaplace);
>eq:=diff(u(x,t),x,x)-diff(u(x,t),t)+u(x,t)=f(x);
```

$$eq := \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - \left( \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \right) + u(x, t) = f(x)$$

```
>bc:=u(0,t)=t;bcx:=D[1](u)(0,t)=0; t>0;
```

$$bc := u(0, t) = t$$

$$bcx := D_1(u)(0, t) = 0$$

Применяем преобразование Лапласа по переменной  $x$ . Построение решения:

```
>laplace(eq,x,p):
>ode:=subs(bc,bcx,laplace(u(x,t),x,p)=v(t),%);
```

$$p^2 v(t) - pt - \left( \frac{d}{dt} v(t) \right) + v(t) = \text{laplace}(f(x), x, p)$$

>res:= expand(dsolve(ode,v(t)));

$$res := v(t) = \frac{p^3 t}{(p^2 + 1)^2} + \frac{p^2 \text{laplace}(f(x), x, p)}{(p^2 + 1)} +$$

$$+ \frac{p t}{(p^2 + 1)^2} + \frac{\text{laplace}(f(x), x, p)}{(p^2 + 1)^2} + \frac{p}{(p^2 + 1)^2} + e^{p^2 t} e^t - C1$$

Из полученного решения необходимо исключить (за счет выбора произвольных постоянных) неограниченные члены:

>\_C1:=0;res;

$$v(t) = \frac{p^3 t}{(p^2 + 1)^2} + \frac{p^2 \text{laplace}(f(x), x, p)}{(p^2 + 1)^2} +$$

$$+ \frac{p t}{(p^2 + 1)^2} + \frac{\text{laplace}(f(x), x, p)}{(p^2 + 1)^2} + \frac{p}{(p^2 + 1)^2}$$

Находим обратное преобразование:

>invlaplace(rhs(%),p,x);

$$t \cos(x) + \int_0^x f(\_U1) \sin(x - \_U1) d\_U1 + \frac{1}{2} x \sin(x)$$

Перепишем в привычной для нас форме, заменив переменную интегрирования  $\_U1 = \xi$ :

>simplify(IntegrationTools[Change](%,\_U1=xi));

$$t \cos(x) + \int_0^x f(\xi) \sin(x - \xi) d\xi + \frac{1}{2} x \sin(x)$$

>u(x,t)=%;

$$u(x, t) = t \cos(x) + \int_0^x f(\xi) \sin(x - \xi) d\xi + \frac{1}{2} x \sin(x)$$

Выполним проверку полученного решения:

>u:=unapply(rhs(%),(x,t):

>simplify(eq);simplify(bc);simplify(bcx);

$$f(x) = f(x)$$

$$t = t$$

$$0 = 0$$

Все в порядке!

Таким образом, решение нашей задачи дается формулой

$$u(x, t) = \int_0^x f(\xi) \sin(x - \xi) d\xi + \frac{1}{2} x \sin(x) + t \cos(x).$$

**Пример 10.** Тело ограничено изнутри сферической поверхностью радиуса  $a$ , а снаружи не ограничено (рис. 5.11). Начальная температура тела равна нулю, а на сферической поверхности температура поддерживается постоянной, равной  $T_0$ . Найти температуру тела в произвольный момент времени  $t$ .

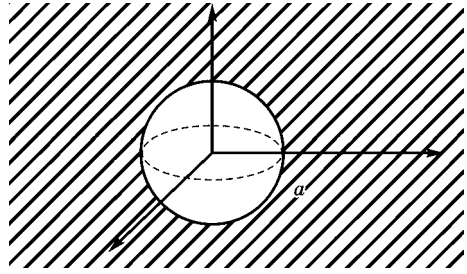


Рис. 5.11  
Пример 10

*Решение.* Воспользуемся для решения нашей задачи системой Maple. Определим задачу:

```
>v:=[r,theta,phi];
eq:=simplify(linalg[laplacian]
(u(r,tau),v,coords=spherical))-diff(u(r,tau),tau)=0;
ic:=u(r,0)=0;
bc:=u(a,tau)=T0;
```

$$v := [r, \theta, \phi]$$

$$eq := \frac{2\left(\frac{\partial}{\partial r} u(r, \tau)\right) + r\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, \tau)\right)}{r} - \left(\frac{\partial}{\partial \tau} u(r, \tau)\right) = 0$$

$$ic := u(r, 0) = 0$$

$$bc := u(a, \tau) = T0$$

Здесь, как обычно,  $\tau = kt/(c\rho)$  — приведенное время.

Применяем преобразование по переменной  $\tau$  и получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для трансформанты:

```
>with(intrans,laplace,invlaplace):
>laplace(eq,tau,p);
```

$$\frac{2\left(\frac{\partial}{\partial r} \text{laplace}(u(r, \tau), \tau, p)\right) + r\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \text{laplace}(u(r, \tau), \tau, p)\right)}{r} - p \text{laplace}(u(r, \tau), \tau, p) + u(r, 0) = 0$$

```
>ode:=subs(laplace(u(r,tau),tau,p)=R(r),ic,%);
```

$$ode := \frac{2\left(\frac{d}{dr} R(r)\right) + r\left(\frac{d^2}{dr^2} R(r)\right)}{r} - pR(r) = 0$$

Ищем общее решение полученного уравнения:

```
>res:=dsolve(ode,R(r));assign(res);R(r);
```

$$res := R(r) = -\frac{C1 \sinh(\sqrt{pr})}{r} + \frac{C2 \cosh(\sqrt{pr})}{r} - \frac{C1 \sinh(\sqrt{pr})}{r} + \frac{C2 \sinh(\sqrt{pr})}{r}$$

Наше решение должно быть ограничено на бесконечности, поэтому удобно перейти к экспонентам:

```
>subs(sinh((p^(1/2)*r))=
exp(-p^(1/2)*r),cosh((p^(1/2)*r))=
exp(p^(1/2)*r),%);
```

$$= \frac{C1e^{-\sqrt{p}r}}{r} + \frac{C2e^{\sqrt{p}r}}{r}$$

Теперь мы видим, что константу  $C2$  следует принять равной нулю:

```
>R:=subs(_C2=0,%);
```

$$R := \frac{C1e^{-\sqrt{p}r}}{r}$$

Вторую константу находим из граничного условия, которое тоже предварительно нужно преобразовать по Лапласу:

```
>laplace(bc,tau,p);
```

$$\text{laplace}(u(a, \tau), \tau, p) = \frac{T0}{p}$$

```
>subs(laplace(u(a,tau),tau,p)=subs(r=a,R),%);
solve(%,{_C1});assign(%,R);
```

$$\begin{aligned} \frac{C1e^{-\sqrt{p}a}}{a} &= \frac{T0}{p} \\ \left\{ -C1 = \frac{T0a}{e^{-\sqrt{p}a} p} \right\} \\ \frac{T0ae^{-\sqrt{p}r}}{e^{-\sqrt{p}a} pr} \end{aligned}$$

```
>R:=subs(R(r)=laplace(u(r,t),t,p),%);
```

$$R := \frac{T0ae^{-\sqrt{p}r}}{e^{-\sqrt{p}a} pr}$$

Выполним теперь обратное преобразование Лапласа:

```
>Sol_u:=invlaplace(R,p,tau);
```

$$\text{Sol}_u := \frac{T0 a \text{ invlaplace}\left(\frac{e^{\sqrt{p}(a-r)}}{p}, p, \tau\right)}{r}$$

```
>assume(r>a):Sol_u:=value(Sol_u);
```

$$\text{Sol}_u := \frac{T0 a \sim \text{erfc}\left(\frac{1-a \sim + r \sim}{2 \sqrt{\tau}}\right)}{r \sim}$$

Выполним проверку полученного решения. Для удобства вычислений определим функцию — решение нашей задачи:

$$u := (r, \tau) \rightarrow T_0 a / r * (1 - \operatorname{erf}(1/2 * (-a+r) / \sqrt{\tau}));$$

$$u := (r, \tau) \rightarrow \frac{T_0 a \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{1-a+r}{2\sqrt{\tau}} \right) \right)}{r}$$

Проверим справедливость уравнения и граничных условий:

$$\text{>simplify(rhs(eq)-lhs(eq));}$$

$$\text{>simplify(rhs(bc)-lhs(bc));}$$

$$0$$

$$0$$

Таким образом, уравнение и граничное условие удовлетворяются. Проверим начальное условие:

$$\text{>Limit(u(r,tau),tau=0,right);value(%);}$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{T_0 a \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{1-a+r}{2\sqrt{\tau}} \right) \right)}{r} = 0$$

Все в порядке! Итак, решение нашей задачи определяется по формуле

$$u(r, \tau) = \frac{T_0 a}{r} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{r-a}{2\sqrt{\tau}} \right) \right],$$

где  $\Phi(x)$  — интеграл вероятности.

**Пример 11.** Два полубесконечных тела из различных материалов (рис. 5.12), одно из которых нагрето до температуры  $T_0$ , а другое имеет температуру, равную нулю, приводятся в контакт своими плоскими границами, начиная с момента времени  $t = 0$ . Найти закон выравнивания температур.

*Решение.* Задача сводится к решению следующих уравнений:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - b_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0, \quad b_1 = \frac{c_1 \rho_1}{k_1}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - b_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0, \quad b_2 = \frac{c_2 \rho_2}{k_2}, \quad x < 0, \quad t > 0,$$

при начальных:

$$u_1|_{t=0} = T_0, \quad u_2|_{t=0} = 0$$

и граничных условиях:

$$u_1|_{x=0} = u_2|_{x=0}, \quad k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0}.$$

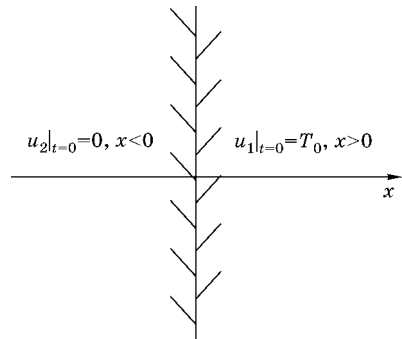


Рис. 5.12  
Пример 11

Воспользуемся для решения нашей задачи системой Maple. Определим задачу:

```
>eq1:=diff(u1(x,t),x$2)-b1*diff(u1(x,t),t)=0;
eq2:=diff(u2(x,t),x$2)-b2*diff(u2(x,t),t)=0;
ic1:=u1(x,0)=T[0];ic2:=u2(x,0)=0;
bc1:=u1(0,t)=u2(0,t);
bc2:=k1*D[1](u1)(0,t)=k2*D[1](u2)(0,t);
```

$$\begin{aligned} eq1 &:= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u1(x, t) - b1 \left( \frac{\partial}{\partial t} u1(x, t) \right) = 0 \\ eq2 &:= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u2(x, t) - b2 \left( \frac{\partial}{\partial t} u2(x, t) \right) = 0 \\ ic1 &:= u1(x, 0) = T_0 \\ ic2 &:= u2(x, 0) = 0 \\ bc1 &:= u1(0, t) = u2(0, t) \\ bc2 &:= k1 D_1(u1)(0, t) = k2 D_1(u2)(0, t) \end{aligned}$$

Выполним преобразование Лапласа над заданными уравнениями:

```
>with(inttrans,laplace,invlaplace):
p1:=laplace(eq1,t,p);p2:=laplace(eq2,t,p);
```

$$\begin{aligned} p1 &:= -\text{laplace}(u1(x, t), t, p)b1 + u1(x, 0)b1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{laplace}(u1(x, t), t, p) = 0 \\ p2 &:= -\text{laplace}(u2(x, t), t, p)b2 + u2(x, 0)b2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{laplace}(u2(x, t), t, p) = 0 \end{aligned}$$

Получим уравнения для трансформант и найдем их общие решения:

```
>ode1:=subs(laplace(u1(x,t),t,p)=U1(x),ic1,p1);
ode2:=subs(laplace(u2(x,t),t,p)=U2(x),ic2,p2);
```

$$\begin{aligned} ode1 &:= -U1(x)pb1 + T_0b1 + \frac{d^2}{dx^2} U1(x) = 0 \\ ode2 &:= -U2(x)pb2 + \frac{d^2}{dx^2} U2(x) = 0 \end{aligned}$$

```
>res1:=dsolve(ode1,U1(x));res2:=dsolve(ode2,U2(x));
```

$$\begin{aligned} res1 &:= U1(x) = e^{\sqrt{b1}\sqrt{px}} \_C2 + e^{-\sqrt{b1}\sqrt{px}} \_C1 + \frac{T_0}{p} \\ res2 &:= U2(x) = \_C1e^{\sqrt{b2}\sqrt{px}} + \_C2e^{-\sqrt{b2}\sqrt{px}} \end{aligned}$$

Учтем ограниченность функций на бесконечности. Кроме того, удобно ввести новые обозначения для произвольных постоянных интегрирования (раз-

ные — для разных функций). Одновременно вычислим производные, так как они понадобятся для определения оставшихся констант:

```
>assign(res1);U1(x);
U1:=subs(_C2=0,_C1=A,%);dU1:=diff(U1,x);
```

$$e^{\sqrt{b1}\sqrt{px}} \_C2 + e^{-\sqrt{b1}\sqrt{px}} \_C1 + \frac{T_0}{p}$$

$$U1 := e^{-\sqrt{b1}\sqrt{px}} A + \frac{T_0}{p}$$

$$dU1 := -\sqrt{b1}\sqrt{p} e^{-\sqrt{b1}\sqrt{px}} A$$

```
>assign(res2);U2(x);
U2:=subs(_C2=0,_C1=B,%);dU2:=diff(U2,x);
```

$$\_C1 e^{\sqrt{b2}\sqrt{px}} + \_C2 e^{-\sqrt{b2}\sqrt{px}}$$

$$U2 := B e^{\sqrt{b2}\sqrt{px}}$$

$$dU2 := B \sqrt{b2}\sqrt{p} e^{\sqrt{b2}\sqrt{px}}$$

Получим теперь уравнения для определения констант  $A$  и  $B$  и решим их:

```
>pc1:=laplace(bc1,t,p);pc2:=laplace(bc2,t,p);
```

$$pc1 := \text{laplace}(u1(0,t),t,p) = \text{laplace}(u2(0,t),t,p)$$

$$pc2 := k1 \text{laplace}(D_1(u1)(0,t),t,p) = k2 \text{laplace}(D_1(u2)(0,t),t,p)$$

```
>e1:=subs(laplace(u1(0,t),t,p)=subs(x=0,U1),
laplace(u2(0,t),t,p)=subs(x=0,U2),pc1);
e2:=subs(laplace(D[1](u1)(0,t),t,p)=subs(x=0,dU1),
laplace(D[1](u2)(0,t),t,p)=subs(x=0,dU2),pc2);
```

$$e1 := e^0 A + \frac{T_0}{p} = B e^0$$

$$e2 := -k1 \sqrt{b1}\sqrt{p} e^0 A = k2 B \sqrt{b2}\sqrt{p} e^0$$

```
>res_e:=solve({e1,e2},{A,B});assign(res_e);U1;U2;
```

$$res\_e := \left\{ A = -\frac{T_0 \sqrt{b2} k2}{p(\sqrt{b1} k1 + \sqrt{b2} k2)}, B = \frac{\sqrt{b1} k1 T_0}{p(\sqrt{b1} k1 + \sqrt{b2} k2)} \right\}$$

$$-\frac{e^{-\sqrt{b1}\sqrt{px}} T_0 \sqrt{b2} k2}{p(\sqrt{b1} k1 + \sqrt{b2} k2)} + \frac{T_0}{p}$$

$$\frac{\sqrt{b1} k1 T_0 e^{\sqrt{b2}\sqrt{px}}}{p(\sqrt{b1} k1 + \sqrt{b2} k2)}$$

Итак, мы нашли трансформанты Лапласа. Выполним теперь обратное преобразование Лапласа и получим решение нашей задачи:

```
>assume(x>0):Sol_u1:=invlaplace(U1,p,t);x:='x':
assume(x<0):Sol_u2:=invlaplace(U2,p,t);
```

$$Sol\_u1 := T_0 \left( 1 - \frac{\sqrt{b_2} k_2 \operatorname{erfc} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b_1}{t}} x \right)}{\sqrt{b_1 - k_1} + \sqrt{b_2} k_2} \right)$$

$$Sol\_u2 := \left( \frac{\sqrt{b_1 - k_1} T_0 \operatorname{erfc} \left( -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{b_2}{t}} x \right)}{\sqrt{b_1 - k_1} + \sqrt{b_2 - k_2}} \right)$$

Выполним проверку найденного решения. Для удобства вычислений определим функции — решения задачи:

```
>u1:=proc(x,t) options operator, arrow;
-k2*b2^(1/2)*T[0]/(k1*b1^(1/2)+k2*b2^(1/2))*
erfc(1/2*x*b1^(1/2)/t^(1/2))+T[0]
end proc;
```

$$u1 := (x, t) \rightarrow -\frac{k_2 \sqrt{b_2} T_0 \operatorname{erfc} \left( \frac{1}{2} \frac{x \sqrt{b_1}}{\sqrt{t}} \right)}{\sqrt{b_1} k_1 + \sqrt{b_2} k_2} + T_0$$

```
>u2:=proc(x,t) options operator, arrow;
T[0]*k1*b1^(1/2)/(k1*b1^(1/2)+k2*b2^(1/2))*
erfc(-1/2*b2^(1/2)*x/t^(1/2))
end proc;
```

$$u2 := (x, t) \rightarrow \frac{T_0 k_1 \sqrt{b_1} \operatorname{erfc} \left( -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{b_2} x}{\sqrt{t}} \right)}{\sqrt{b_1} k_1 + \sqrt{b_2} k_2}$$

Проверим справедливость уравнений:

```
>simplify(rhs(eq1)-lhs(eq1));
>simplify(rhs(eq2)-lhs(eq2));
```

0  
0

Все в порядке! Проверим справедливость граничных условий:

```
>simplify(rhs(bc1)-lhs(bc1));simplify(rhs(bc2)-lhs(bc2));
```

0  
0

Все в порядке! Проверим наконец справедливость начальных условий:

```
>assume(x>0):assume(b1>0):
Limit(u1(x,t),t=0,right)=
value(Limit(u1(x,t),t=0,right));x:='x':
```



$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left( -\frac{k_2 \sqrt{b_2} - T_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x - \sqrt{b_1}}{2\sqrt{t}}\right)}{\sqrt{b_1} - k_1 + \sqrt{b_2} - k_2} + T_0 \right) = T_0$$

>assume(x<0):assume(b2>0):  
 Limit(u2(x,t),t=0,right)=  
 value(Limit(u2(x,t),t=0,right));

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T_0 k_1 \sqrt{b_1} - \operatorname{erfc}\left(-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{b_2} - x}{\sqrt{t}}\right)}{\sqrt{b_1} - k_1 + \sqrt{b_2} - k_2} = 0$$

Все в порядке. Итак, решение нашей задачи определяется формулами:

$$u_1(x, t) = T_0 - \frac{T_0 k_2 \sqrt{b_2} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{x \sqrt{b_1}}{2\sqrt{t}}\right) \right]}{k_1 \sqrt{b_1} + k_2 \sqrt{b_2}}, \quad x \geq 0, t \geq 0,$$

$$u_2(x, t) = \frac{T_0 k_1 \sqrt{b_1} \left[ 1 + \Phi\left(\frac{x \sqrt{b_2}}{2\sqrt{t}}\right) \right]}{k_1 \sqrt{b_1} + k_2 \sqrt{b_2}}, \quad x \leq 0, t \geq 0,$$

где  $\Phi(x)$  — интеграл вероятности.

**Пример 12.** На границу полупространства  $x > 0$  подается тепловой поток плотности  $q_0$ . Начальная температура равна нулю. Найти температуру в каждой точке при  $t > 0$ .

*Решение.* Требуется найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0, \quad \tau = \frac{kt}{c\rho}, \quad x > 0, t > 0,$$

при начальных и граничных условиях:

$$u|_{\tau=0} = 0, \quad -k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_0.$$

Воспользуемся для решения нашей задачи системой Maple. Подключим пакет с командами, выполняющими преобразование Лапласа:

>with(intrans,laplace,invlaplace);

Задаем задачу:

>eq:=diff(u(x,tau),x,x)=diff(u(x,tau),tau);

bc:=-k\*D[1](u)(0,tau)=q0;

ic:=u(x,0)=0;

$$eq := \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} u(x, \tau)$$

$$bc := -k D_1(u)(0, \tau) = q_0$$

$$ic := u(x, 0) = 0$$

Выполняем преобразование Лапласа; решаем полученное обыкновенное дифференциальное уравнение для трансформанты и таким образом находим общее выражение для трансформанты:

```
>laplace(eq,tau,p);
```

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{laplace}(u(x, \tau), \tau, p) = p \text{laplace}(u(x, \tau), \tau, p) - u(x, 0)$$

```
>ode:=subs(laplace(u(x,tau),tau,p)=U(x),ic,%);
```

$$ode := \frac{d^2}{dx^2} U(x) = pU(x)$$

```
>res:=dsolve(ode,U(x));assign(res);U(x);
```

$$res := U(x) = \_C1e^{\sqrt{p}x} + \_C2e^{-\sqrt{p}x} \\ \_C1e^{\sqrt{p}x} + \_C2e^{-\sqrt{p}x}$$

Учтем теперь ограниченность нашей функции на бесконечности и преобразуем граничное условие по Лапласу:

```
>U:=subs(_C1=0,%);laplace(bc,tau,p);
```

$$U := \_C2e^{-\sqrt{p}x} \\ -k \text{laplace}(D_1(u)(0, \tau), \tau, p) = \frac{q0}{p}$$

Получим уравнение по граничному условию и определим произвольную постоянную:

```
>subs(laplace(D[1](u)(0,tau),tau,p)= \\ subs(x=0,diff(U,x)),%); \\ solve(%,{_C2});assign(%)U;
```

$$k \_C2\sqrt{p}e^0 = \frac{q0}{p} \\ \left\{ \_C2 = \frac{q0}{kp^{3/2}} \right\} \\ \frac{q0e^{-\sqrt{p}x}}{kp^{3/2}}$$

Таким образом, мы решили задачу для трансформанты:

```
>U:=%;
```

$$U := \frac{q0e^{-\sqrt{p}x}}{kp^{3/2}}$$

Выполним теперь обратное преобразование Лапласа и найдем решение нашей задачи:

>invlaplace(U,p,tau) assuming x>0;

$$\frac{q_0 \left( -x \operatorname{erfc} \left( \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{\tau}} \right) + 2 \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} e^{-\frac{1}{4} \frac{x^2}{\tau}} \right)}{k}$$

Выполним проверку найденного решения:

>u:=unapply(%,(x,tau));  
simplify(rhs(eq)-lhs(eq));  
simplify(rhs(bc)-lhs(bc));

$$u := (x, \tau) \rightarrow \frac{q_0 \left( -x \operatorname{erfc} \left( \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{\tau}} \right) + 2 \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} e^{-\frac{1}{4} \frac{x^2}{\tau}} \right)}{k}$$

0  
0

Таким образом, уравнение и граничные условия удовлетворяются. Проверим теперь начальное условие:

>assume(x>0):Limit(u(x,tau),tau=0,right);value(%);

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{q_0 \left( -x \operatorname{erfc} \left( \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{\tau}} \right) + 2 \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} e^{-\frac{1}{4} \frac{x^2}{\tau}} \right)}{k}$$

0

Все в порядке! Итак, решение нашей задачи имеет вид

$$u(x, \tau) = \frac{q_0}{k} \left\{ 2 \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}} - x \left[ 1 - \Phi \left( \frac{x}{2\sqrt{\tau}} \right) \right] \right\},$$

где  $\Phi(x)$  — интеграл вероятности.

**Пример 13.** Плоская граница полубесконечного тела, начиная с момента времени  $t = 0$ , поддерживается при температуре, изменяющейся по заданному закону  $T(0, \tau) = f(\tau)$ , где  $\tau = kt/(c\rho)$ ;  $k$  — коэффициент теплопроводности;  $c$  — удельная теплоемкость;  $\rho$  — плотность вещества. Найти значение температуры в каждой точке тела, принимая его начальную температуру равной нулю.

*Решение.* Требуется найти решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0, \quad \tau = \frac{kt}{c\rho}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

при начальных и граничных условиях:

$$u|_{\tau=0} = 0, \quad u|_{x=0} = f(\tau).$$

Воспользуемся для решения нашей задачи системой Maple. Подключим пакет с командами, выполняющими преобразование Лапласа:

```
>with(inttrans,laplace,invlaplace):
```

Задаем задачу:

```
>pde:=diff(u(x,tau),x$2)-diff(u(x,tau),tau)=0;
```

```
bc:=u(0,tau)=f(tau);
```

```
ic:=u(x,0)=0;
```

$$pde := \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, \tau) - \left( \frac{\partial}{\partial \tau} u(x, \tau) \right) = 0$$

$$bc := u(0, \tau) = f(\tau)$$

$$ic := u(x, 0) = 0$$

Применяем преобразование Лапласа по переменной  $\tau$ :

```
>laplace(pde,tau,p);
```

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{laplace}(u(x, \tau), \tau, p) - p \text{laplace}(u(x, \tau), \tau, p) + u(x, 0) = 0$$

Получаем обыкновенное дифференциальное уравнение относительно трансформанты:

```
>ode:=subs(laplace(u(x,tau),tau,p)=U(x),ic,%);
```

$$ode := \frac{d^2}{dx^2} U(x) - pU(x) = 0$$

Находим общее решение полученного уравнения:

```
>res:=dsolve(ode,U(x));assign(res);U(x);
```

$$res := U(x) = \_C1e^{\sqrt{p}x} + \_C2e^{-\sqrt{p}x} \\ \_C1e^{\sqrt{p}x} + \_C2e^{-\sqrt{p}x}$$

Выбираем ограниченное решение:

```
>U:=subs(_C1=0,U(x));
```

$$U := \_C2e^{-\sqrt{p}x}$$

Трансформируем граничное условие:

```
>laplace(bc,tau,p);
```

$$\text{laplace}(u(0, \tau), \tau, p) = \text{laplace}(f(\tau), \tau, p)$$

Используем полученное граничное условие и находим константу:

```
>value(subs(laplace(u(0,tau),tau,p)=
subs(x=0,U),lhs(%)))=rhs(%);
```

$$_C2e^0 = \text{laplace}(f(\tau), \tau, p)$$

```
>solve(%,{_C2});assign(%);U;
```

$$\{ \_C2 = \text{laplace}(f(\tau), \tau, p) \}$$

$$\text{laplace}(f(\tau), \tau, p)e^{-\sqrt{p}x}$$

Тем самым, трансформанта определена. Находим оригинал, применяя обратное преобразование Лапласа:

```
>sol:=invlaplace(U,p,tau) assuming x>0;
```

$$\text{sol} := \frac{1}{2} \frac{x \left( \int_0^\tau f(U) e^{\frac{1}{4} \frac{x^2}{\tau - U}} d_U \right)}{\sqrt{\pi}}$$

Преобразуем к привычному виду, заменив переменную интегрирования  $U = \xi$ :

```
>simplify(student[changevar](U=xi, sol, xi));
```

$$\frac{1}{2} \frac{x \left( \int_0^\tau f(\xi) e^{\frac{1}{4} \frac{x^2}{\tau - \xi}} d\xi \right)}{\sqrt{\pi}}$$

Итак, значение температуры в каждой точке тела определяется по формуле

$$u(x, \tau) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{f(\xi) e^{-\frac{x^2}{4(\tau - \xi)}}}{(\tau - \xi)^{3/2}} d\xi.$$

Рассмотрим частные случаи. Пусть  $f(\tau) = T_0 = \text{const}$ . Тогда

```
>assume(x>0):assume(tau>0):
```

```
>f:=tau->T[0];u(x,tau);
```

$$f := \tau \rightarrow T_0$$

$$-T_0 \left( \text{erf} \left( \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{\tau}} \right) - 1 \right)$$

Таким образом, в этом случае решение имеет вид:

```
>'u(x,tau)'=%;
```

$$u(x, \tau) = -T_0 \left( \text{erf} \left( \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{\tau}} \right) - 1 \right)$$

Пусть теперь  $f(\tau) = A\tau$ ,  $A = \text{const}$ . Тогда

>f:=tau->A\*tau;

$$f := \tau \rightarrow A\tau$$

>expand(value(u(x,tau))): collect(% ,erf);

$$\left(-A\tau - \frac{1}{2}Ax^2\right)\text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right) - \frac{A\sqrt{\tau}x}{\sqrt{\pi}\left(e^{\frac{x^2}{4\tau}}\right)^{1/4}} + \frac{1}{2}Ax^2 + A\tau$$

То есть в этом случае решение имеет вид

$$u(x, \tau) = A \left\{ \frac{2\tau + x^2}{2} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right) \right] - \frac{x\sqrt{\tau}e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{\sqrt{\pi}} \right\},$$

где  $\Phi(x)$  — интеграл вероятности.

# 6

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

### ГЛАВА

*Интегральными уравнениями* обычно называют уравнения, содержащие неизвестную функцию под знаком определенного интеграла, как одномерного, так и кратного. Теория интегральных уравнений составляет сейчас внушительный раздел математического анализа и имеет большое теоретическое и прикладное значение. Отдельные интегральные уравнения встречались уже в первой половине XIX в.; систематическая их теория была заложена на рубеже XIX–XX вв. в работах математиков В. Вольтерры (V. Volterra, 1860–1940), Э. И. Фредгольма (E. I. Fredholm, 1866–1927), Д. Гильберта (D. Hilbert, 1862–1943) и др.

Интегральные уравнения являются одним из наиболее плодотворных средств математического исследования, как в чистом, так и в прикладном анализе. Это относится, в частности, к задачам теории механических колебаний и соответствующих областей техники и теоретической физики, где интегральные уравнения не только полезны, но зачастую даже совершенно необходимы для численных расчетов.

*Цель настоящей главы* — дать студентам и инженерам, имеющим дело с прикладной математикой, первоначальные сведения об интегральных уравнениях, делая упор главным образом на практической стороне вопроса. По этой причине от читателя требуется минимум математических знаний (твердые знания основ дифференциального и интегрального исчисления и элементов теории функций вполне достаточны).

### 6.1. ОСНОВНЫЕ КЛАССЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Интегральные уравнения можно разделить на два больших класса: *линейные* и *нелинейные* интегральные уравнения. Примером линейного уравнения может служить следующее уравнение:

$$\varphi(x) - \int_0^1 e^{xy} \varphi(y) dy = x - \frac{e^x}{x} + \frac{e^x - 1}{x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (6.1)$$

или уравнение

$$\int_0^{\infty} \sin(xy)\varphi(y)dy = f(x), \quad 0 \leq x < \infty. \quad (6.2)$$

Пример нелинейного уравнения:

$$\varphi(x) - \int_0^1 \frac{xy\varphi(y)}{1 + \varphi^2(y)} dy = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Таким образом, интегральное уравнение называется линейным, если в него неизвестная функция входит линейно.

Решить интегральное уравнение — значит найти такую функцию, которая обращает данное уравнение в верное тождество. Например, решением уравнения (6.1) является функция  $\varphi(x) = x$ . Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \int_0^1 e^{xy}\varphi(y)dy &= x - \int_0^1 e^{xy}ydy = x - \frac{1}{x} \int_0^1 yd(e^{xy}) = \\ &= x - \frac{1}{x} \left[ ye^{xy} \Big|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 e^{xy} dy \right] = x - \frac{e^x}{x} + \frac{e^x - 1}{x^2}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Уравнение (6.2) — синус-преобразование Фурье функции  $\varphi(x)$ . А тогда, по формуле обращения будем иметь

$$\varphi(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(xy)f(x)dx, \quad 0 \leq y < \infty. \quad (6.3)$$

Таким образом, формула (6.3) дает решение уравнения (6.2).

Интегральные уравнения подразделяются на *уравнения первого рода* и *уравнения второго рода*. В уравнения первого рода неизвестная функция входит только под знаком интеграла. В уравнения второго рода неизвестная функция входит как под знаком интеграла, так и вне интеграла.

Уравнения первого и второго рода могут быть с постоянными пределами интегрирования, а могут иметь переменный верхний предел. Уравнения с постоянными пределами интегрирования называются *уравнениями Фредгольма*, а уравнения с переменным верхним пределом называются *уравнениями Вольтерры\**.

---

\* В большинстве книг по интегральным уравнениям такие уравнения называются *уравнениями Вольтерра*, т. е. фамилия не склоняется. Однако по правилам русского языка иноязычные фамилии мужского рода должны склоняться. Фамилия Вито Вольтерра склоняется, например, в книгах: а) Большой энциклопедический словарь. Математика. — М.: Научное издательство «Большая Российская энциклопедия», 1998; б) *Верлань, А. Ф.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: справочное пособие / А. Ф. Верлань, В.С. Сизиков. — Киев: Наукова думка, 1986.



Таким образом, линейное интегральное уравнение Фредгольма первого рода имеет вид

$$\int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода имеет вид

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Линейное интегральное уравнение Вольтерры первого рода имеет вид

$$\int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x.$$

Линейное интегральное уравнение Вольтерры второго рода имеет вид

$$\varphi(x) - \int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x.$$

Во всех перечисленных уравнениях  $\varphi(x)$  — неизвестная искомая функция;  $f(x)$  — заданная функция, называемая *свободным членом* интегрального уравнения;  $K(x, y)$  — заданная функция, называемая *ядром* интегрального уравнения.

Уравнения второго рода иногда записывают с параметром  $\lambda$  так:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (6.4)$$

или

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x. \quad (6.5)$$

Тогда уравнения (6.4) или (6.5) представляют собой не одно уравнение, а семейство уравнений, зависящее от числового параметра. Параметр  $\lambda$  может быть отнесен к ядру уравнения.

Пределы интегрирования  $a, b$  могут быть как конечными, так и бесконечными.

В уравнениях Фредгольма обычно предполагают:

- 1) интервал  $(a, b)$  — конечен;
- 2) ядро  $K(x, y)$  — непрерывно при  $a \leq x \leq b, a \leq y \leq b$ ;
- 3) функция  $f(x)$  — непрерывна на  $[a, b]$ .

В этом случае говорят, что уравнение является *регулярным*. Решение ищется в классе непрерывных функций. Если какое-либо из перечисленных условий нарушено, то уравнение называется *сингулярным*.

Часто накладываются следующие условия:

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dx dy < +\infty; \quad (6.6)$$

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

Ядра, удовлетворяющие условию (6.6), называют *фредгольмовыми*. В таком случае решение ищется в классе функций, квадрат которых интегрируем.

Если  $f(x) = 0$ , то интегральное уравнение называется *однородным*, в противном случае оно называется *неоднородным*.

Уравнения Вольтерры более просты, чем уравнения Фредгольма; уравнения второго рода более просты, нежели уравнения первого рода.

Уравнение Вольтерры можно при некоторых ограничениях рассматривать как частный случай уравнения Фредгольма. Ядро  $K(x, y)$  в уравнении (6.5) по смыслу задачи определено при  $a \leq y \leq x$ . Доопределим его при  $y > x$ , приняв  $K(x, y) = 0$ ,  $x < y \leq b$ . Тогда уравнение (6.5) можно рассматривать как частный случай уравнения Фредгольма с ядром  $K(x, y)$ , определенным следующим образом:

$$K(x, y) = \begin{cases} K(x, y), & y \leq x, \\ 0, & y > x. \end{cases}$$

При таком определении ядра  $K(x, y)$  интегральное уравнение Фредгольма:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x)$$

тождественно с уравнением Вольтерры (6.5).

Это простое замечание позволяет переносить результаты, полученные для уравнений Фредгольма, на уравнения Вольтерры как на частный случай фредгольмовых уравнений.

Однако уравнения Вольтерры обладают некоторыми свойствами, характерными именно для них.

Нелинейные уравнения настолько разнообразны, что даже их классификация затруднительна. Отметим только нелинейное *уравнение Урысона*:

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, y, \varphi(y))dy.$$

Функция  $K(x, y, \varphi)$  обычно предполагается непрерывной при  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq y \leq b$ ;  $-M \leq \varphi \leq M$ , где  $M > 0$  — достаточно большая постоянная.

*Нелинейное уравнение Вольтерры*:

$$\varphi(x) = \int_a^x K(x, y, \varphi(y))dy,$$

где функция  $K(x, y, \varphi)$ , например, непрерывна по совокупности аргументов  $x, y, \varphi$  в области  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq y \leq b$ ,  $-M \leq \varphi \leq M$ .

Мы будем заниматься исключительно линейными уравнениями.

Отметим еще уравнения, в которых интегрирование производится по некоторой поверхности  $S$ . В таком случае уравнение Фредгольма первого рода имеет вид

$$\iint_S K(M, N)\varphi(M)ds_M = f(N), \quad N \in S.$$

Уравнение Фредгольма второго рода имеет вид

$$\varphi(N) - \iint_S K(M, N)\varphi(M)ds_M = f(N), \quad N \in S.$$

**Пример.** Распределение заряда по поверхности  $S$  проводника в соответствии с законом Кулона определяется уравнением

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(M)ds_M}{|MN|} = V, \quad N \in S,$$

где  $\sigma(M)$  — поверхностная плотность заряда;  $V$  — потенциал;  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная.

Наконец, отметим уравнения, содержащие интегралы по контуру в плоскости комплексной переменной. Здесь характерны следующие интегральные уравнения:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(y)}{y-z} dy = f(z), \quad z \in \Gamma; \quad (6.7)$$

$$\varphi(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(y)}{y-z} dy = f(z), \quad z \in \Gamma. \quad (6.8)$$

Ядро  $K(y, z) = \frac{1}{y-z}$ . Интегралы в (6.7) и (6.8) понимаются в смысле главного значения.

Во всех рассмотренных примерах область изменения переменных  $x, y$  была одна и та же. Встречаются также уравнения вида

$$\left. \begin{aligned} \int_a^{\infty} K(x, y)\varphi(y)dy &= f(x), \quad a \leq x < c \\ \int_a^{\infty} K(x, y)\rho(y)\varphi(y)dy &= g(x), \quad c < x < \infty \end{aligned} \right\}. \quad (6.9)$$

Здесь  $K(x, y)$  — ядро;  $f(x), g(x)$  — заданные функции;  $\rho(y) \geq 0$  — заданная функция. Уравнения типа (6.9) называются *парными интегральными уравнениями*. Возникают такие уравнения при решении краевых задач математической физики со смешанными условиями.

## 6.2. НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ УРАВНЕНИЙ, ДОПУСКАЮЩИЕ ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ПРИ ПОМОЩИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ПРИЕМОВ

### УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРЫ ВТОРОГО РОДА С ЯДРОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ РАЗНОСТИ

Уравнения вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x-y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x,$$

а также аналогичные уравнения первого рода

$$\int_a^x K(x-y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x,$$

представляют собой важный специальный класс интегральных уравнений Вольтерры, которые обычно называются *уравнениями типа свертки*, так как операция

$$\{K, \varphi\} = \int_a^x K(x-y)\varphi(y)dy$$

представляет собой свертку двух функций  $K$  и  $\varphi$ .

Заметим, что, не теряя общности, можно считать нижний предел интегрирования равным нулю:  $a = 0$ . Действительно, сделав замену переменной  $x - a = \xi$ ,  $y - a = \eta$ , мы приходим к уравнению

$$\varphi(a + \xi) - \lambda \int_0^{\xi} K(\xi - \eta)\varphi(\eta)d\eta = f(\xi), \quad \xi \geq 0.$$

Далее мы будем рассматривать уравнения вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x-y)\varphi(y)dy = f(x), \quad x \geq 0. \quad (6.10)$$

Основным средством изучения подобных уравнений служит преобразование Лапласа, поскольку это преобразование при некоторых ограничениях преобразует свертку в обыкновенное произведение. Таким образом, решение интегрального уравнения сводится к обращению преобразования Лапласа.

Применяем преобразование Лапласа к уравнению (6.10). В результате получим

$$\bar{\varphi} - \lambda \bar{K} \bar{\varphi} = \bar{f} \Rightarrow \bar{\varphi}(1 - \lambda \bar{K}) = \bar{f} \Rightarrow \bar{\varphi} = \frac{\bar{f}}{1 - \lambda \bar{K}}. \quad (6.11)$$

Здесь, как обычно, введены обозначения преобразований Лапласа функций:

$$\bar{\varphi} = \int_0^{\infty} \varphi(x)e^{-px}dx, \quad \bar{K} = \int_0^{\infty} K(t)e^{-pt}dt, \quad \bar{f} = \int_0^{\infty} f(x)e^{-px}dx.$$

Таким образом, обращая уравнение (6.11), находим

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{f}(p)}{1 - \lambda \bar{K}(p)} e^{px} dp,$$

где прямая  $L$  расположена правее особых точек подынтегральной функции.

Рассмотрим преобразование полученного решения. Запишем формулу (6.11) в виде

$$\bar{\varphi} = \frac{\bar{f}}{1 - \lambda \bar{K}} = \bar{f} \frac{(1 - \lambda \bar{K}) + \lambda \bar{K}}{1 - \lambda \bar{K}} = \bar{f} + \frac{\lambda \bar{K}}{1 - \lambda \bar{K}} \bar{f}.$$

Обозначим

$$\bar{R}_\lambda = \frac{\bar{K}}{1 - \lambda \bar{K}}.$$

Тогда

$$\bar{\varphi} = \bar{f} + \lambda \bar{R}_\lambda \bar{f}.$$

Будем рассматривать  $\bar{R}_\lambda$  как преобразование Лапласа некоторой функции

$$\bar{R}_\lambda = \int_0^\infty R_\lambda(t) e^{-pt} dt.$$

Тогда можно записать

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R_\lambda(x-y) f(y) dy. \quad (6.12)$$

Таким образом, если мы знаем функцию  $R_\lambda(t)$ , то формула (6.12) дает решение нашей задачи.

Имеем

$$R_\lambda(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{K}(p)}{1 - \lambda \bar{K}(p)} e^{pt} dp.$$

Функция  $R_\lambda(x-y)$  называется *резольвентой интегрального уравнения* (6.10).

**Примечание.**

Функция  $\bar{K}(p)$  — регулярна в области  $\operatorname{Re}(p) \geq c$ ,  $\bar{K}(p) \rightarrow 0$  при  $|p| \rightarrow \infty$  равномерно относительно  $\arg(p)$  в области  $|\arg(p)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ . Следовательно,  $\bar{R}_\lambda = \frac{\bar{K}}{1 - \lambda \bar{K}}$  — регулярная функция, если  $1 - \lambda \bar{K} \neq 0$ , а это так при достаточно больших  $\operatorname{Re}(p)$ . Далее  $\bar{R}_\lambda(p) \rightarrow 0$  при  $|p| \rightarrow \infty$  равномерно относительно  $\arg(p)$  в области  $|\arg(p)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ . Таким образом,  $\bar{R}_\lambda$  можно рассматривать как преобразование Лапласа от некоторой функции.

Рассмотрим примеры решений уравнений частного вида.

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x \sin(x-y) \varphi(y) dy = f(x), \quad x \geq 0.$$

Здесь ядро уравнения  $K(t) = \sin(t)$ . Находим преобразование Лапласа этого ядра  $\bar{K} = 1/(p^2 + 1)$ . Составляем выражение для функции  $\bar{R}_\lambda(p)$  и находим оригинал  $R_\lambda(t)$ :

$$\bar{R}_\lambda = \frac{\bar{K}}{1 - \lambda \bar{K}} = \frac{1}{p^2 + 1 - \lambda} \Rightarrow R_\lambda(t) = \frac{\sin(t\sqrt{1-\lambda})}{\sqrt{1-\lambda}}.$$

Следовательно, решение нашего уравнения имеет вид

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \frac{\sin[(x-y)\sqrt{1-\lambda}]}{\sqrt{1-\lambda}} f(y) dy.$$

Это решение справедливо при любом  $\lambda$ . Оно представляет собой целую функцию от  $\lambda$ . Если  $\lambda = 1$ , то нужно раскрыть неопределенность с помощью разложения в ряд.

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x J_0(x-y)\varphi(y) dy = J_0(x), \quad x \geq 0.$$

Здесь ядро уравнения  $K(t) = J_0(t)$ . Имеем  $\bar{K} = \bar{f} = 1/\sqrt{p^2+1}$ .

Применяем преобразование Лапласа к нашему уравнению. Будем иметь

$$\bar{\varphi} = \frac{\bar{f}}{1 - \lambda \bar{K}} = \frac{1}{\sqrt{p^2+1} - \lambda}.$$

Рассмотрим частный случай, когда  $\lambda = 1$ . Будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \frac{1}{\sqrt{p^2+1} - 1} = \frac{\sqrt{p^2+1} + 1}{p^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{\sqrt{p^2+1}}{p^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{p^2+1}{p^2\sqrt{p^2+1}} = \\ &= \frac{1}{p^2} + \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} + \frac{1}{p^2\sqrt{p^2+1}} = \bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2, \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\bar{f}_1 = \frac{1}{p^2}, \quad \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Отсюда находим

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = J_0(x).$$

Теперь можно записать решение нашего уравнения:

$$\varphi(x) = x + J_0(x) + \int_0^x J_0(x-y)\varphi(y) dy.$$

### УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРЫ ПЕРВОГО РОДА С ЯДРОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ РАЗНОСТИ

Речь идет о решении уравнений вида

$$\int_0^x K(x-y)\varphi(y) dy = f(x), \quad x \geq 0. \quad (6.13)$$

Можно и в этом случае воспользоваться преобразованием Лапласа. Будем иметь

$$\bar{K}\bar{\varphi} = \bar{f} \Rightarrow \bar{\varphi} = \frac{\bar{f}}{\bar{K}}. \quad (6.14)$$

Откуда находим

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{f}(p)}{\bar{K}(p)} e^{px} dp, \quad (6.15)$$

где прямая  $L$  расположена правее особых точек подынтегральной функции.

Может, однако, оказаться так, что  $\bar{\varphi}$  не будет стремиться к нулю при  $|p| \rightarrow \infty$ . Тогда формула (6.15) теряет смысл. Отсюда вытекает дополнительное условие разрешимости с помощью преобразования Лапласа рассматриваемого уравнения (6.13)

$$\bar{\varphi}|_L = \frac{\bar{f}}{\bar{K}}|_L \xrightarrow{|p| \rightarrow \infty} 0. \quad (6.16)$$

Выполнение условия (6.16) зависит от вида функций  $f$  и  $K$ . Таким образом, метод преобразования Лапласа не всегда применим к решению подобных уравнений.

#### УРАВНЕНИЕ АБЕЛЯ

Так называется уравнение вида

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^\alpha} dy = f(x), \quad x \geq 0, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (6.17)$$

Здесь ядро зависит от разности и имеет вид  $K(t) = t^{-\alpha}$ . Откуда находим  $\bar{K} = \Gamma(1-\alpha)/p^{1-\alpha}$ . Следовательно, согласно формуле (6.14) будем иметь

$$\bar{\varphi} = \frac{p^{1-\alpha} \bar{f}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Так как  $1-\alpha > 0$ , то условие (6.16) принимает вид:  $p^{1-\alpha} \bar{f}|_L \rightarrow 0$  при  $|p| \rightarrow \infty$ . Будем считать, что это условие выполнено. Тогда

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{2\pi i} \int_L \bar{f}(p) p^{1-\alpha} e^{px} dp. \quad (6.18)$$

Перепишем формулу (6.18) в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \frac{1}{2\pi i} \int_L \bar{f}(p) p^{-\alpha} e^{px} dp. \quad (6.19)$$

Теперь можно воспользоваться формулой для свертки. Положим  $\bar{g} = 1/p^\alpha$ . Тогда  $g(x) = x^{-1+\alpha}/\Gamma(\alpha)$ . Таким образом, из (6.19) находим

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x f(y)(x-y)^{-1+\alpha} dy.$$

Учитывая формулу

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)},$$

получим окончательно

$$\varphi(x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}} dy. \quad (6.20)$$

В частном случае при  $\alpha = 1/2$  будем иметь уравнение

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}} dy = f(x) \quad (6.21)$$

и соответственно

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{x-y}} dy. \quad (6.22)$$

Формулы (6.17) и (6.20) (а также (6.21) и (6.22)) можно рассматривать как некоторое интегральное преобразование и его обращение.

Рассмотрим еще уравнение вида

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x^2 - y^2}} dy = f(x), \quad x \geq 0.$$

Это уравнение может быть сведено к уравнению Абеля. Действительно, сделаем замену переменных  $x^2 = \xi$ ,  $y^2 = \eta$ . Будем иметь

$$\int_0^{\xi} \frac{\varphi(\sqrt{\eta})}{\sqrt{\xi-\eta}} \frac{d\eta}{2\sqrt{\eta}} = f(\sqrt{\xi}) \Rightarrow \int_0^{\xi} \frac{\varphi(\sqrt{\eta})}{2\sqrt{\eta}} \frac{d\eta}{\sqrt{\xi-\eta}} = f(\sqrt{\xi}).$$

Обозначим

$$\varphi^*(\eta) = \frac{\varphi(\sqrt{\eta})}{2\sqrt{\eta}}, \quad f^*(\xi) = f(\sqrt{\xi}).$$

Тогда будем иметь уравнение

$$\int_0^{\xi} \frac{\varphi^*(\eta)}{\sqrt{\xi-\eta}} d\eta = f^*(\xi),$$

совпадающее с уравнением (6.21). Его решение имеет вид

$$\frac{\varphi(\sqrt{\xi})}{2\sqrt{\xi}} = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_0^{\xi} \frac{f(\sqrt{\eta})}{\sqrt{\xi-\eta}} d\eta.$$

Возвращаясь к старым переменным, получим

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{x^2 - y^2}} dy.$$



**УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА С ЯДРОМ,  
ЗАВИСЯЩИМ ОТ РАЗНОСТИ И ПРЕДЕЛАМИ ОТ  $-\infty$  ДО  $+\infty$**

Рассмотрим уравнение следующего вида:

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)\varphi(y)dy = f(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (6.23)$$

Это уравнение также относится к уравнениям типа свертки; здесь операция

$$\{K, \varphi\} = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)\varphi(y)dy$$

представляет собой свертку двух функций  $K$  и  $\varphi$ .

Поэтому для решения уравнения (6.23) удобно воспользоваться преобразованием Фурье. Умножим уравнение (6.23) на  $\exp(isx)$  и проинтегрируем по интервалу  $(-\infty, +\infty)$ . Получим

$$\tilde{\varphi} - \lambda \tilde{K} \tilde{\varphi} = \tilde{f}. \quad (6.24)$$

Здесь введены обозначения

$$\tilde{K}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t)e^{isx} dx; \quad \tilde{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{isx} dx; \quad \tilde{\varphi}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{isx} dx.$$

Из уравнения (6.24) находим

$$\tilde{\varphi} = \frac{\tilde{f}}{1 - \lambda \tilde{K}}.$$

Отсюда по формуле обращения получим

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{f}}{1 - \lambda \tilde{K}} e^{-isx} ds.$$

Так же как и в случае уравнения Вольтерры, здесь тоже иногда удобно пользоваться резольвентой. Можно записать

$$\tilde{\varphi} = \frac{\tilde{f}}{1 - \lambda \tilde{K}} = \tilde{f} + \lambda \tilde{f} \frac{\tilde{K}}{1 - \lambda \tilde{K}} = \tilde{f} + \lambda \tilde{f} \tilde{R}_\lambda,$$

где

$$\tilde{R}_\lambda = \frac{\tilde{K}}{1 - \lambda \tilde{K}}.$$

Будем рассматривать  $\tilde{R}_\lambda$  как преобразование Фурье некоторой функции

$$\tilde{R}_\lambda(s) = \int_{-\infty}^{\infty} R_\lambda(t)e^{ist} dt; \quad R_\lambda(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{R}_\lambda(s)e^{-ist} dt.$$

Тогда можно записать

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} R_\lambda(x-y)f(y)dy. \quad (6.25)$$

Таким образом, если мы знаем функцию  $R_\lambda(t)$ , то формула (6.25) дает решение нашей задачи. Функция  $R_\lambda(x-y)$  называется резольвентой интегрального уравнения (6.23).

Очевидно, для разрешимости уравнения (6.23) необходимо выполнение условия

$$1 - \lambda \tilde{K}(s) \neq 0, \quad -\infty < s < +\infty. \quad (6.26)$$

Такое условие не требовалось при рассмотрении уравнений Вольтерры второго рода (путь интегрирования в интеграле Римана — Меллина проходил правее всех особых точек подынтегральной функции, где  $1 - \lambda \tilde{K}(p) \neq 0$ ).

Таким образом, из формулы (6.26) видно, что уравнение Фредгольма (6.23) разрешимо не при всех значениях параметра  $\lambda$ .

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|}\varphi(y)dy = f(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (6.27)$$

Здесь ядро имеет вид  $K(t) = \exp(-|t|)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{K}(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(t)e^{ist} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}[\cos(st) + i\sin(st)]dt = \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-|t|} \cos(st)dt = \frac{2}{1+s^2} \quad (|t|=t, t>0). \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$R_\lambda(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2e^{-ist}}{s^2 + (1-2\lambda)} ds. \quad (6.28)$$

Условие разрешимости:  $s^2 + (1-2\lambda) \neq 0 \Rightarrow \lambda < \frac{1}{2}$ .

Из формулы (6.28) находим\*

$$R_\lambda(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(st)}{s^2 + (1-2\lambda)} ds = e^{-|t|\sqrt{1-2\lambda}} \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}.$$

Таким образом, резольвента интегрального уравнения (6.27) имеет вид

$$R_\lambda(x-y) = e^{-|x-y|\sqrt{1-2\lambda}} \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}.$$

---

\* Здесь мы воспользовались формулой:  $\int_0^{\infty} \frac{\cos(bx)}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ab}$ ,  $a > 0$ ,  $b \geq 0$ .

Решение уравнения (6.27) дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\sqrt{1-2\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|\sqrt{1-2\lambda}} f(y) dy,$$

причем  $\lambda < \frac{1}{2}$ .

**Примечание.**

Относительно уравнений Фредгольма с ядром, зависящим от разности, но с другими пределами интегрирования можно высказать следующее. Рассмотрим уравнения вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{+\infty} K(x-y)\varphi(y) dy = f(x), \quad 0 \leq x < +\infty \quad (6.29)$$

или

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x-y)\varphi(y) dy = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (6.30)$$

где  $a, b$  — любые.

Уравнение (6.29) относится к классу уравнений, которые допускают решение в явном виде. Такое решение получается с помощью преобразования Фурье и методов теории функций комплексной переменной. Метод решения называется методом Винера — Хопфа. Уравнение (6.30), вообще говоря, не решается в явном виде.

Степень сложности решения интегрального уравнения зависит от структуры ядра, а также от пределов интегрирования.

**УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА С ЯДРАМИ,  
ЗАВИСЯЩИМИ ОТ СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ**

Рассматриваются уравнения следующего вида:

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(x+y)\varphi(y) dy = f(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (6.31)$$

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{+\infty} K(xy)\varphi(y) dy = f(x), \quad 0 \leq x < +\infty. \quad (6.32)$$

Покажем, что уравнение вида (6.31) решается с помощью преобразования Фурье. Применим преобразование Фурье к уравнению (6.31). Получим

$$\tilde{\varphi}(s) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} dx \int_{-\infty}^{+\infty} K(x+y)\varphi(y) dy = \tilde{f}(s).$$

Можно записать

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} dx \int_{-\infty}^{+\infty} K(x+y)\varphi(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy \int_{-\infty}^{+\infty} K(x+y)e^{isx} dx.$$

Сделаем замену переменной по формуле  $x + y = t$ . Получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy \int_{-\infty}^{+\infty} K(x+y) e^{isx} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) e^{is(t-y)} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-isy} dy \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) e^{ist} dt = \tilde{\varphi}(-s) \tilde{K}(s). \end{aligned}$$

Таким образом, будем иметь уравнение для трансформанты Фурье:

$$\tilde{\varphi}(s) - \lambda \tilde{\varphi}(-s) \tilde{K}(s) = \tilde{f}(s). \quad (6.33)$$

Соотношение (6.33) верно при всех  $s \in (-\infty, +\infty)$ . Заменяв  $s$  на  $(-s)$ , получим

$$\tilde{\varphi}(-s) - \lambda \tilde{\varphi}(s) \tilde{K}(-s) = \tilde{f}(-s). \quad (6.34)$$

Умножим теперь (6.34) на  $\lambda \tilde{K}(s)$  и сложим результат с (6.33). Получим

$$\tilde{\varphi}(s) - \lambda^2 \tilde{\varphi}(s) \tilde{K}(s) \tilde{K}(-s) = \tilde{f}(s) + \lambda \tilde{f}(-s) \tilde{K}(s).$$

Откуда находим

$$\tilde{\varphi}(s) = \frac{\tilde{f}(s) + \lambda \tilde{f}(-s) \tilde{K}(s)}{1 - \lambda^2 \tilde{K}(s) \tilde{K}(-s)}. \quad (6.35)$$

Следовательно, решение уравнения (6.31) можно найти по формуле

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{f}(s) + \lambda \tilde{f}(-s) \tilde{K}(s)}{1 - \lambda^2 \tilde{K}(s) \tilde{K}(-s)} e^{-isx} ds.$$

Здесь, конечно, также должно выполняться условие разрешимости

$$1 - \lambda^2 \tilde{K}(s) \tilde{K}(-s) \neq 0, \quad -\infty < s < +\infty.$$

Что касается уравнения (6.32), то отметим только, что с помощью соответствующей замены переменных оно может быть сведено к уравнению вида (6.31). Кроме того, уравнение вида (6.32) можно решать с помощью преобразования Меллина [27]:

$$\hat{\varphi}(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} \varphi(x) dx; \quad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \hat{\varphi}(s) ds.$$

Здесь предполагается, что интеграл

$$\int_0^{+\infty} x^{k-1} |\varphi(x)| dx$$

ограничен для некоторого  $k > 0$  и  $c > k$ .

### 6.3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Существует класс интегральных уравнений, которые легко сводятся к линейным алгебраическим уравнениям. Такими интегральными уравнениями являются уравнения с так называемыми *вырожденными ядрами*.

Рассмотрим уравнение общего вида:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (6.36)$$

Мы скажем, что ядро этого уравнения вырождено, если его можно представить в виде

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(x)\beta_i(y). \quad (6.37)$$

Здесь  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  — непрерывные функции;  $N$  — конечно.

Приведем примеры вырожденных ядер. Вырожденными ядрами будут функции:

$$\begin{aligned} K(x, y) &= (x + y)^2; \\ K(x, y) &= \cos(x + y); \\ K(x, y) &= \sin^3(x + y); \\ K(x, y) &= P(x, y), \end{aligned}$$

где  $P(x, y)$  — произвольный полином. Наоборот, ядра

$$K(x, y) = e^{xy}$$

и

$$K(x, y) = \frac{1}{1 + (x + y)^2}$$

не являются вырожденными.

Уравнения с вырожденным ядром допускают явное решение. Более того, решение уравнения общего вида можно аппроксимировать решением уравнения с вырожденным ядром.

Рассмотрим уравнение (6.36) с вырожденным ядром (6.37). Будем считать, что функция  $f(x)$  непрерывна и предположим, что существует решение уравнения (6.36) в классе непрерывных функций. Подставим формулу (6.37) в уравнение (6.36). Получим

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[ \sum_{i=1}^N \alpha_i(x)\beta_i(y) \right] \varphi(y)dy &= f(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi(x) - \lambda \sum_{i=1}^N \alpha_i(x) \int_a^b \beta_i(y)\varphi(y)dy &= f(x). \end{aligned}$$

Обозначим константы:

$$C_i = \int_a^b \beta_i(y) \varphi(y) dy.$$

Тогда

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{i=1}^N \alpha_i(x) C_i = f(x). \quad (6.38)$$

Отметим, что в формуле (6.38) функция  $f(x)$  задана,  $\alpha_i(x)$  — известные функции. Таким образом, задача сводится к определению числовых коэффициентов  $C_i$ . Если константы  $C_i$  найдены, то решение нашей задачи определяется по формуле

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^N C_i \alpha_i(x).$$

Ясно, что функция  $\varphi(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ .

Чтобы найти коэффициенты  $C_i$ , умножим уравнение (6.38) на функции  $\beta_k(x)$  и проинтегрируем от  $a$  до  $b$ . Получим

$$\int_a^b \varphi(x) \beta_k(x) dx - \lambda \sum_{i=1}^N C_i \int_a^b \alpha_i(x) \beta_k(x) dx = \int_a^b f(x) \beta_k(x) dx. \quad (6.39)$$

Обозначим числовые константы

$$C_k = \int_a^b \varphi(x) \beta_k(x) dx, \quad \alpha_{ik} = \int_a^b \alpha_i(x) \beta_k(x) dx, \quad f_k = \int_a^b f(x) \beta_k(x) dx. \quad (6.40)$$

Тогда из уравнения (6.39) получим

$$C_k - \lambda \sum_{i=1}^N \alpha_{ik} C_i = f_k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (6.41)$$

Совокупность уравнений (6.41) — система  $N$  линейных уравнений относительно  $N$  неизвестных  $C_i$ . Образует определитель системы (6.41)

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda \alpha_{11} & -\lambda \alpha_{21} & \dots & -\lambda \alpha_{N1} \\ -\lambda \alpha_{12} & 1 - \lambda \alpha_{22} & \dots & -\lambda \alpha_{N2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda \alpha_{1N} & -\lambda \alpha_{2N} & \dots & 1 - \lambda \alpha_{NN} \end{vmatrix}.$$

Ясно, что определитель  $D(\lambda)$  — полином степени  $n \leq N$  относительно  $\lambda$ . Рассмотрим уравнение

$$D(\lambda) = 0. \quad (6.42)$$

Это уравнение будет иметь  $n$  корней. Обозначим корни уравнения (6.42) через  $\lambda_s, s = 1, 2, \dots, n$ .

1. Пусть параметр  $\lambda$  в уравнении (6.36) не совпадает ни с одним из корней уравнения (6.42), т. е.  $\lambda \neq \lambda_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, n$ . Это означает, что  $D(\lambda) \neq 0$ ; система (6.41) разрешима и имеет единственное решение. Это решение может быть записано в виде (формулы Крамера)

$$C_i = \frac{D_i(\lambda)}{D(\lambda)}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где определители  $D_i(\lambda)$  получаются из определителя  $D(\lambda)$  заменой  $i$ -го столбца столбцом свободных членов  $(f_1, f_2, \dots, f_N)^T$ :

$$D_i(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{21} & \dots f_1 \dots & -\lambda\alpha_{N1} \\ -\lambda\alpha_{12} & 1 - \lambda\alpha_{22} & \dots f_2 \dots & -\lambda\alpha_{N2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda\alpha_{1N} & -\lambda\alpha_{2N} & \dots f_N \dots & 1 - \lambda\alpha_{NN} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что определители  $D_i(\lambda)$  суть полиномы относительно  $\lambda$ .

Таким образом, в этом случае решение нашей задачи может быть записано в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^N \frac{D_i(\lambda)}{D(\lambda)} \alpha_i(x). \quad (6.43)$$

Итак, если  $\lambda \neq \lambda_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, n$ , где  $\lambda_s$  — корни уравнения (6.42), то интегральное уравнение (6.36) с вырожденным ядром (6.37) имеет решение, и притом единственное, которое задается формулой (6.43).

Преобразуем полученное решение (6.43). Для этого разложим определитель  $D_i(\lambda)$  по элементам  $i$ -го столбца

$$D_i(\lambda) = \sum_{k=1}^N (-1)^{i+k} D_{ik}(\lambda) f_k, \quad (6.44)$$

где  $D_{ik}(\lambda)$  — миноры соответствующего элемента определителя  $D_i(\lambda)$ . Подставим (6.44) в (6.43), получим

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N (-1)^{i+k} \frac{D_{ik}(\lambda)}{D(\lambda)} f_k \alpha_i(x). \quad (6.45)$$

Теперь в формулу (6.45) вместо констант  $f_k$  подставим интеграл (6.40) и поменяем знаки сумм и интеграла (суммы конечные). Получим

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b f(y) dy \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N (-1)^{i+k} \frac{D_{ik}(\lambda)}{D(\lambda)} \alpha_i(x) \beta_k(y)}_{R_\lambda(x, y)}.$$

Обозначим

$$R_\lambda(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N (-1)^{i+k} \frac{D_{ik}(\lambda)}{D(\lambda)} \alpha_i(x) \beta_k(y).$$

Тогда решение нашей задачи можно записать в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R_\lambda(x, y) f(y) dy, \quad \lambda \neq \lambda_s.$$

Очевидно, полученное решение — непрерывная функция в  $[a, b]$ .  
Выражение для резольвенты  $R_\lambda(x, y)$  можно записать так:

$$\begin{aligned} R_\lambda(x, y) &= \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i(x)}{D(\lambda)} \sum_{k=1}^N (-1)^{i+k} D_{ik}(\lambda) \beta_k(y) = \\ &= \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^N \alpha_i(x) \begin{vmatrix} 1 - \lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{21} & \dots \beta_1(y) \dots & -\lambda\alpha_{N1} \\ -\lambda\alpha_{12} & 1 - \lambda\alpha_{22} & \dots \beta_2(y) \dots & -\lambda\alpha_{N2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda\alpha_{1N} & -\lambda\alpha_{2N} & \dots \beta_N(y) \dots & 1 - \lambda\alpha_{NN} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Формула (6.46) совпадает по структуре с формулой (6.37).

2. Пусть параметр  $\lambda$  в уравнении (6.36) совпадает с одним из корней уравнения (6.42), т. е.  $\lambda = \lambda_s$ . Это означает, что  $D(\lambda) = 0$ ; система (6.41) неразрешима при произвольных правых частях. Поэтому интегральное уравнение (6.36) неразрешимо при произвольной функции  $f(x)$ . Если же  $D_i(\lambda_s) = 0$ ,  $D(\lambda_s) = 0$ , то система (6.41) имеет бесчисленное множество решений. Интегральное уравнение (6.36) также будет иметь бесконечное множество решений.

Окончательно результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

**Теорема.** Интегральное уравнение (6.36) с вырожденным ядром (6.37) имеет единственное решение, если параметр  $\lambda$  отличен от корней характеристического уравнения  $D(\lambda) = 0$ ; не имеет решений или имеет бесчисленное множество решений, если параметр  $\lambda$  совпадает с каким-нибудь из корней уравнения  $D(\lambda) = 0$ .

Случай бесконечного множества решений реализуется, когда числитель и знаменатель в формулах Крамера обращаются в нуль, в частности когда  $f_k = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , т. е. система (6.41) — однородная. Равенство  $f_k = 0$  означает, что либо  $f(x) = 0$ , либо  $f(x) \neq 0$ , но  $f(x)$  ортогональна ко всем функциям  $\beta_k(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

## ПРИМЕРЫ

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 xy\varphi(y) dy = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (6.47)$$

Здесь ядро  $K(x, y) = xy$  — вырожденное.

Имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \lambda x \underbrace{\int_0^1 y\varphi(y) dy}_{C_1} = f(x) &\Rightarrow \varphi(x) = f(x) + \lambda C_1 x; \\ C_1 &= \int_0^1 y\varphi(y) dy. \end{aligned} \quad (6.48)$$



Умножим (6.48) на  $x$  и проинтегрируем от нуля до единицы. Получим

$$\int_0^1 x\varphi(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx + \lambda C_1 \int_0^1 x^2 dx \Rightarrow C_1 \left(1 - \frac{\lambda}{3}\right) = \int_0^1 xf(x)dx = f_1. \quad (6.49)$$

Характеристическое уравнение в нашем случае имеет вид  $D(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{3}$ .

1. Пусть  $\lambda \neq 3$ . Тогда  $D(\lambda) \neq 0$  и, следовательно,

$$C_1 = \frac{f_1}{1 - \frac{\lambda}{3}}.$$

Отсюда находим

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{f_1}{1 - \frac{\lambda}{3}} \lambda x, \quad \lambda \neq 3$$

или

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda x}{1 - \frac{\lambda}{3}} \int_0^1 yf(y)dy \Rightarrow \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{xy}{1 - \frac{\lambda}{3}} f(y)dy.$$

Здесь резольвента  $R_\lambda(x, y) = \frac{xy}{1 - \frac{\lambda}{3}}, \lambda \neq 3$ .

2. Пусть теперь  $\lambda = 3$ . Тогда если  $f_1 \neq 0$ , то уравнение (6.49) не имеет решений. Если же

$$f_1 = \int_0^1 xf(x)dx = 0,$$

то уравнение (6.49) — верное тождество,  $C_1$  — произвольно; решение интегрального уравнения (6.47) будет иметь вид

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda C_1 x.$$

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (x+y)\varphi(y)dy = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (6.50)$$

Здесь ядро  $K(x, y) = x + y$  — вырожденное.

Имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \lambda x \underbrace{\int_0^1 \varphi(y)dy}_{C_1} - \lambda \underbrace{\int_0^1 y\varphi(y)dy}_{C_2} = f(x) &\Rightarrow \varphi(x) - \lambda C_1 x - \lambda C_2 = f(x); \\ C_1 = \int_0^1 \varphi(y)dy; \quad C_2 = \int_0^1 y\varphi(y)dy. & \end{aligned} \quad (6.51)$$

Проинтегрируем уравнение (6.51) от нуля до единицы. Получим

$$\underbrace{\int_0^1 \varphi(x) dx}_{=C_1} - \lambda C_1 \int_0^1 x dx - \lambda C_2 \int_0^1 dx = \underbrace{\int_0^1 f(x) dx}_{=f_1}. \quad (6.52)$$

Умножим (6.51) на  $x$  и проинтегрируем от нуля до единицы. Получим

$$\underbrace{\int_0^1 x\varphi(x) dx}_{=C_2} - \lambda C_1 \int_0^1 x^2 dx - \lambda C_2 \int_0^1 x dx = \underbrace{\int_0^1 xf(x) dx}_{=f_2}.$$

Таким образом, мы будем иметь систему линейных алгебраических уравнений относительно констант  $C_1$  и  $C_2$ :

$$C_1 \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) - \lambda C_2 = f_1; \quad -\frac{\lambda}{3} C_1 + C_2 \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) = f_2. \quad (6.53)$$

Здесь введены обозначения

$$f_1 = \int_0^1 f(x) dx; \quad f_2 = \int_0^1 xf(x) dx.$$

Определитель системы (6.53) равен

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{2} & -\lambda \\ -\frac{\lambda}{3} & 1 - \frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12}.$$

Вычислим также определители:

$$D_1(\lambda) = \begin{vmatrix} f_1 & -\lambda \\ f_2 & 1 - \frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) f_1 + \lambda f_2;$$

$$D_2(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{2} & f_1 \\ -\frac{\lambda}{3} & f_2 \end{vmatrix} = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) f_2 + \frac{\lambda}{3} f_1.$$

Найдем корни характеристического уравнения:

$$D(\lambda) = 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -6 \pm 4\sqrt{3}.$$

1. Пусть  $\lambda \neq \lambda_{1,2}$ . Тогда  $D(\lambda) \neq 0$  и, следовательно, система (6.53) однозначно разрешима

$$C_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)f_1 + \lambda f_2}{D}; \quad C_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)f_2 + \frac{\lambda}{3}f_1}{D}.$$

Решение нашей задачи будет иметь вид

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)f_1 x + \lambda f_2 x + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)f_2 + \frac{\lambda}{3}f_1}{D(\lambda)},$$

или окончательно

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{\lambda xy + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)(x+y) + \frac{\lambda}{3}}{1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12}} f(y) dy, \quad \lambda \neq \lambda_{1,2}.$$

Резольвента уравнения (6.50):

$$R_\lambda(x, y) = \frac{\lambda xy + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)(x+y) + \frac{\lambda}{3}}{1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12}}.$$

Видим, что решение уравнения (6.50) и его резольвента суть рациональные функции от параметра  $\lambda$ .

2. Пусть теперь  $\lambda = \lambda_1$  или  $\lambda = \lambda_2$ . Тогда при произвольной функции  $f(x)$  решений нет. Рассмотрим случай, когда  $f_1 = f_2 = 0$ , т. е.

$$f_1 = \int_0^1 f(x) dx = 0, \quad f_2 = \int_0^1 x f(x) dx = 0.$$

В этом случае система (6.53) будет иметь вид

$$C_1 \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) - \lambda C_2 = 0; \quad -\frac{\lambda}{3} C_1 + C_2 \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) = 0. \quad (6.54)$$

Из первого уравнения системы (6.54) находим

$$\lambda_{1,2} C_2 = C_1 \left(1 - \frac{\lambda_{1,2}}{2}\right). \quad (6.55)$$

Подставим соотношение (6.55) в формулу (6.51), получим

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_{1,2} C_1 x + C_1 \left(1 - \frac{\lambda_{1,2}}{2}\right)$$

или окончательно решение принимает вид

$$\varphi(x) = f(x) + C_1 \left[ \lambda_{1,2} x + 1 - \frac{\lambda_{1,2}}{2} \right],$$

где  $C_1$  — произвольно.

Таким образом, в этом случае будем иметь бесчисленное множество решений.

#### 6.4. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРЫ РАЗЛОЖЕНИЕМ В РЯД ПО СТЕПЕНЯМ ПАРАМЕТРА $\lambda$

Рассматривается уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad a \leq x. \quad (6.56)$$

Будем предполагать, что:

- 1) функция  $f(x)$  непрерывна в  $[a, +\infty)$ ;
- 2) функция  $K(x, y)$  непрерывна для  $x \in [a, +\infty)$ ,  $y \in [a, +\infty)$ .

Решение уравнения (6.56) будем искать в виде

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) \lambda^n. \quad (6.57)$$

Для определения неизвестных функций  $C_n(x)$  подставим разложение (6.57) в интегральное уравнение (6.56), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) \lambda^n - \lambda \int_a^x K(x, y) \sum_{n=0}^{\infty} C_n(y) \lambda^n dy = f(x). \quad (6.58)$$

Считая возможным изменение порядка суммирования и интегрирования, запишем уравнение (6.58) так:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) \lambda^n - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \int_a^x K(x, y) C_n(y) dy = f(x). \quad (6.59)$$

Заменяем теперь индекс суммирования во второй сумме в (6.59)  $n + 1$  на  $n$ , получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) \lambda^n - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_a^x K(x, y) C_{n-1}(y) dy = f(x) \Rightarrow \quad (6.60)$$

$$\Rightarrow C_0(x) \lambda^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ C_n(x) - \int_a^x K(x, y) C_{n-1}(y) dy \right] \lambda^n = f(x) \Rightarrow C_0(x) = f(x);$$

$$C_n(x) = \int_a^x K(x, y) C_{n-1}(y) dy, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.61)$$

Таким образом, мы получили рекуррентные формулы (6.60), (6.61) для вычисления коэффициентов  $C_n(x)$  разложения (6.57).

Для обоснования полученного решения предположим, что  $x \in [a, b] \subset [a, +\infty)$ . В этом интервале функции  $f(x)$  и  $K(x, y)$ , ( $y \in [a, b]$ ) имеют верхние грани. Таким образом, можно записать  $|f(x)| \leq F$ ,  $|K(x, y)| \leq M$ .

Заметим, что при вычислении по формулам (6.61) под знаком интеграла — непрерывные функции. Следовательно, все  $C_n(x)$  будут непрерывны на отрезке  $[a, b]$ . Таким образом, коэффициенты ряда (6.57) — непрерывные функции.

Имеем:

$$\begin{aligned} |C_0(x)| &\leq F; \\ |C_1(x)| &= \left| \int_a^x K(x, y)C_0(y)dy \right| \leq \int_a^x |K(x, y)| |C_0(y)| dy \leq MF \int_a^x dy = MF(x-a); \\ |C_2(x)| &= \left| \int_a^x K(x, y)C_1(y)dy \right| \leq M^2 F \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2}. \end{aligned}$$

По индукции получаем

$$|C_n(x)| \leq M^n F \frac{(x-a)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Можно усилить последнее неравенство, записав так:

$$|C_n(x)| \leq M^n F \frac{(b-a)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n(x)\lambda^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n F(b-a)^n |\lambda|^n}{n!} = F e^{M(b-a)|\lambda|}. \quad (6.62)$$

Таким образом, ряд (6.57) мажорируется сходящимся рядом, поэтому ряд (6.57) сходится при всех значениях параметра  $\lambda$ . Формула (6.62) доказывает не только сходимость ряда (6.57), но и его равномерную сходимость по переменной  $x$  во всем интервале  $[a, b]$ . Члены ряда (6.57) — непрерывные функции от  $x$ . Следовательно, по второй теореме Вейерштрасса, сумма ряда (6.57) — непрерывная функция от  $x$ . Таким образом, функция  $\varphi(x)$  — непрерывна в  $[a, b]$ , а так как  $b$  — любое, то функция  $\varphi(x)$  — непрерывна в  $[a, +\infty)$ .

Покажем теперь, что полученная функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет нашему уравнению (6.56). Имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x)\lambda^n - \lambda \int_a^x K(x, y) \sum_{n=0}^{\infty} C_n(y)\lambda^n dy = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x)\lambda^n - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \int_a^x K(x, y)C_n(y)dy = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x)\lambda^n - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_a^x K(x, y)C_{n-1}(y)dy = \\ &= \underbrace{C_0(x)\lambda^0}_{=f(x)} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[ C_n(x) - \int_a^x K(x, y)C_{n-1}(y)dy \right]}_{=0} \lambda^n \equiv f(x). \end{aligned}$$

Таким образом, функция  $\varphi(x)$  — решение уравнения (6.56), непрерывное в  $[a, +\infty)$ .

Итак, мы фактически доказали следующую теорему.

**Теорема.** Интегральное уравнение Вольтерры с непрерывным ядром и непрерывной правой частью допускает непрерывное решение при любых значениях параметра  $\lambda$ . Это решение представляется рядом по степеням параметра  $\lambda$ , причем коэффициенты ряда выражаются рекуррентными формулами. Решение является непрерывной функцией от  $x$  и целой функцией параметра  $\lambda$ .

Докажем теперь теорему о единственности решения.

**Теорема.** Интегральное уравнение Вольтерры с непрерывным ядром и непрерывной правой частью допускает единственное непрерывное решение.

*Доказательство.* Рассмотрим уравнение Вольтерры:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x. \quad (6.63)$$

Допустим, что уравнение (6.63) имеет два решения в классе непрерывных функций. Обозначим эти решения  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$ , причем  $\varphi_1, \varphi_2 \in C([a, +\infty))$ . Рассмотрим разность  $\psi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ . Ясно, что  $\psi \in C([a, +\infty))$  и функция  $\psi(x)$  удовлетворяет однородному уравнению:

$$\psi(x) - \lambda \int_a^x K(x, y)\psi(y)dy = 0, \quad a \leq x. \quad (6.64)$$

Очевидно, что  $\psi(x) = 0$  есть решение уравнения (6.64). Покажем, что других решений уравнения (6.64) не существует.

Допустим, что  $x \in [a, b] \subset [a, +\infty)$ ,  $b$  — любое. Тогда в  $[a, b]$  мы имеем

$$|\psi(x)| \leq N.$$

С учетом уравнения (6.64) можно написать

$$\psi(x) = \lambda \int_a^x K(x, y)\psi(y)dy. \quad (6.65)$$

Откуда

$$|\psi(x)| \leq |\lambda| \int_a^x |K(x, y)| |\psi(y)| dy \leq |\lambda| \int_a^x MN dy = |\lambda| MN \frac{x-a}{1}. \quad (6.66)$$

Здесь  $|K(x, y)| \leq M$ ,  $y \in [a, b]$ .

Из уравнения (6.65) с учетом неравенства (6.66) имеем

$$|\psi(x)| \leq |\lambda| \int_a^x M |\lambda| MN \frac{y-a}{1} dy = |\lambda|^2 M^2 N \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2}$$

и т. д. Таким образом, мы можем написать

$$|\psi(x)| \leq |\lambda|^n M^n N \frac{(x-a)^n}{n!}.$$

Доказательство последнего неравенства завершается по индукции. Итак, для любого  $n$  мы имеем оценку

$$|\psi(x)| \leq N \frac{[|\lambda| M(b-a)]^n}{n!}, \quad (6.67)$$

причем левая часть неравенства (6.67) от  $n$  не зависит. Отсюда следует, что  $\psi(x) \equiv 0$  для  $x \in [a, b]$ , а так как  $b$  — любое, то  $\psi(x) \equiv 0$  в  $[a, +\infty)$ . Следовательно,  $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ . Теорема доказана.

**Следствие.** Однородное уравнение Вольтерры имеет только одно непрерывное решение  $\varphi(x) \equiv 0$ .

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x y \varphi(y) dy = 1, \quad x \geq 0.$$

Согласно общей теории ищем решение в виде (6.57)

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) \lambda^n, \quad |\lambda| < \infty.$$

Имеем

$$f(x) = 1 \Rightarrow C_0(x) = 1;$$

$$C_n(x) = \int_a^x y C_{n-1}(y) dy, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Таким образом,

$$C_1(x) = \int_a^x y dy = \frac{x^2}{2};$$

$$C_2(x) = \int_a^x y \frac{y^2}{2} dy = \frac{x^4}{2 \cdot 4};$$

$$C_3(x) = \int_a^x y \frac{y^4}{2 \cdot 4} dy = \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

и т. д.,

$$C_n(x) = \frac{x^{2n}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} = \frac{x^{2n}}{2^n n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда находим решение нашей задачи

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda x^2}{2}\right)^n}{n!} = e^{\frac{\lambda x^2}{2}}.$$

## 6.5. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА РАЗЛОЖЕНИЕМ В РЯД ПО СТЕПЕНЯМ ПАРАМЕТРА $\lambda$

Рассматривается уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (6.68)$$

Предполагается, что интервал  $[a, b]$  конечен, функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , функция  $K(x, y)$  непрерывна для  $x \in [a, b], y \in [a, b]$ .

Будем строить решение уравнения (6.68) в виде

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x)\lambda^n. \quad (6.69)$$

Преобразованиями, аналогичными проделанным преобразованиям в п. 6.4 при построении решения уравнения Вольтерры, получим:

$$C_0(x) = f(x); \quad (6.70)$$

$$C_n(x) = \int_a^b K(x, y)C_{n-1}(y)dy, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.71)$$

Таким образом, и в случае уравнения Фредгольма мы получили рекуррентные формулы (6.70), (6.71) для вычисления коэффициентов  $C_n(x)$  разложения (6.69).

Можно считать, что в интервале  $[a, b]$  функции  $f(x)$  и  $K(x, y)$ , ( $y \in [a, b]$ ) имеют верхние грани. Таким образом, можно записать  $|f(x)| \leq F$ ,  $|K(x, y)| \leq M$ .

Заметим также, что при вычислении по формулам (6.71) под знаком интеграла — непрерывные функции. Следовательно, все  $C_n(x)$  будут непрерывны на отрезке  $[a, b]$ . Таким образом, коэффициенты ряда (6.69) — непрерывные функции.

Имеем

$$\begin{aligned} |C_0(x)| &\leq F; \\ |C_1(x)| &\leq \int_a^b |K(x, y)| |C_0(y)| dy \leq MF(b-a); \\ |C_2(x)| &\leq \int_a^b |K(x, y)| |C_1(y)| dy \leq M^2 F(b-a)^2. \end{aligned}$$

По индукции получаем

$$|C_n(x)| \leq F[M(b-a)]^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Имеем далее

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n(x)\lambda^n| \leq F \sum_{n=0}^{\infty} [M(b-a)|\lambda|]^n = \frac{F}{1 - M(b-a)|\lambda|} \quad (6.72)$$



при условии, что

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}. \quad (6.73)$$

Если условие (6.73) не выполняется, то мажорирующий ряд в (6.72) расходится и ничего нельзя сказать о сходимости ряда (6.69). Если же условие (6.73) выполнено, то формула (6.69) дает решение уравнения (6.68). Действительно, тогда ряд (6.69) сходится равномерно на отрезке  $[a, b]$ , следовательно,  $\varphi(x) \in C([a, b])$  и легко видеть, что функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет уравнению (6.68).

Таким образом, можно сформулировать теорему.

**Теорема.** Интегральное уравнение Фредгольма с непрерывным ядром и непрерывной правой частью допускает решение в виде ряда по степеням параметра  $\lambda$ , сходящегося при достаточно малых  $\lambda$ . Это решение является непрерывной функцией от  $x$  в  $[a, b]$  и регулярной функцией параметра  $\lambda$  в круге сходимости.

Можно показать, что при ограничениях, наложенных на  $\lambda$ , полученное решение уравнения Фредгольма единственно в классе непрерывных функций.

### ПРИМЕРЫ

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 e^{xy} \varphi(y) dy = 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Ядро нашего уравнения  $K(x, y) = e^{xy}$ . Согласно общей теории ищем решение в виде (6.69):

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) \lambda^n.$$

Имеем  $M = e$ ,  $b - a = 1$ . Поэтому ряд сходится при условии, что  $|\lambda| < \frac{1}{e}$ . Далее

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\Rightarrow C_0(x) = 1, \\ C_n(x) &= \int_0^1 e^{xy} C_{n-1}(y) dy, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int_0^1 e^{xy} dy = \frac{e^x - 1}{x}; \\ C_2(x) &= \int_0^1 e^{xy} \frac{e^y - 1}{y} dy. \end{aligned}$$

Последний интеграл не выражается через элементарные функции. Таким образом, мы имеем

$$\varphi(x) = 1 + \frac{e^x - 1}{x} \lambda + \dots, \quad |\lambda| < \frac{1}{e}.$$

В частности, если  $\lambda = 1$ , то рассматриваемый метод теоретически не годится.

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 xy\varphi(y)dy = 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Ядро нашего уравнения  $K(x, y) = xy$  является вырожденным. Ищем решение уравнения в виде ряда

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x)\lambda^n. \quad (6.74)$$

Имеем  $M = 1, b - a = 1$ . Поэтому ряд сходится, если  $|\lambda| < 1$ . Далее

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\Rightarrow C_0(x) = 1, \\ C_n(x) &= \int_0^1 xyC_{n-1}(y)dy, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int_0^1 xydy = \frac{x}{2}; \\ C_2(x) &= \int_0^1 xy \frac{y}{2} dy = \frac{x}{2 \cdot 3}; \\ C_3(x) &= \int_0^1 xy \frac{y}{2 \cdot 3} dy = \frac{x}{2 \cdot 3^2}, \end{aligned}$$

и т. д. По индукции получаем

$$C_n(x) = \frac{x}{2 \cdot 3^{n-1}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Таким образом,

$$\varphi(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n x}{2 \cdot 3^{n-1}} = 1 + \frac{3x}{2} \frac{\frac{\lambda}{3}}{1 - \frac{\lambda}{3}} = 1 + \frac{\lambda x}{2\left(1 - \frac{\lambda}{3}\right)}. \quad (6.75)$$

Полученное решение (6.75) — рациональная функция от  $\lambda$  с особенностью в точке  $\lambda = 3$ . Таким образом, ряд (6.74) сходится в круге радиуса  $\rho = 3$ , в то время как по общей теории радиус сходимости  $\rho = 1$ . Действительный радиус сходимости равен расстоянию от начала координат до ближайшей особой точки (в данном случае точки  $\lambda = 3$ ).

Уравнения Фредгольма всегда имеют особые точки. Эти точки ограничивают радиус сходимости ряда. Для вырожденных ядер радиус сходимости  $\rho = \min|\lambda_s|$ ,  $\lambda_s$  — корни характеристического уравнения  $D(\lambda) = 0$ .

В то же время уравнения Вольтерры дают решения как целые функции параметра  $\lambda$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА  
ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ЗНАЧЕНИИ ПАРАМЕТРА  $\lambda$**

Вновь вернемся к уравнению (6.68):

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Согласно изложенному ранее

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x)\lambda^n, \quad |\lambda| < \rho; \\ C_0(x) &= f(x); \\ C_n(x) &= \int_a^b K(x, y)C_{n-1}(y)dy, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{6.76}$$

Здесь радиус сходимости  $\rho$  неизвестен.

Можно показать, что решение уравнения (6.68) может быть представлено в виде отношения степенных рядов

$$\varphi(x) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\lambda^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)\lambda^n}, \tag{6.77}$$

причем ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\lambda^n$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)\lambda^n$$

сходятся на всей плоскости  $|\lambda| < \infty$ ,  $b_0(x) \neq 0$ ,  $\lambda \neq \lambda_s$ , где  $\lambda_s$  — нули функции

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)\lambda^n.$$

Таким образом, решение уравнения Фредгольма — мероморфная функция с полюсами  $\lambda_s$ .

Если  $\lambda$  мало, то функция (6.77) может быть приведена к виду (6.76) делением рядов. При этом радиус сходимости ряда (6.76)  $\rho = \min|\lambda_s|$ ,  $\lambda_s$  — нули (особые точки) функции  $g(\lambda)$ .

Для уравнения с вырожденным ядром ряды в (6.77) обрываются на конечном числе слагаемых, и решение есть рациональная функция от  $\lambda$ .

**ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ  
ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА**

Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (6.78)$$

Мы скажем, что функция  $R_\lambda(x, y)$  есть резольвента уравнения (6.78), если решение уравнения (6.78) может быть представлено в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R_\lambda(x, y)f(y)dy. \quad (6.79)$$

Получим условия для функции  $R_\lambda(x, y)$ , при которых функция (6.79) является решением уравнения (6.78). Для этого в (6.79) заменим переменную интегрирования  $y$  на  $t$ :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R_\lambda(x, t)f(t)dt.$$

Далее заменим  $x$  на  $y$ :

$$\varphi(y) = f(y) + \lambda \int_a^b R_\lambda(y, t)f(t)dt.$$

Будем иметь

$$\begin{aligned} & \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = \\ & = f(x) + \lambda \int_a^b R_\lambda(x, t)f(t)dt - \lambda \int_a^b K(x, y)dy \left\{ f(y) + \lambda \int_a^b R_\lambda(y, t)f(t)dt \right\} = \\ & = \left\{ f(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)f(y)dy \right\} + \lambda \int_a^b f(t)dt \left\{ R_\lambda(x, t) - \lambda \int_a^b K(x, y)R_\lambda(y, t)dy \right\}. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы

$$R_\lambda(x, t) - \lambda \int_a^b K(x, y)R_\lambda(y, t)dy = K(x, t), \quad a \leq x \leq b, \quad a \leq t \leq b. \quad (6.80)$$

Тогда

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)f(y)dy + \lambda \int_a^b K(x, t)f(t)dt \equiv f(x).$$

Таким образом, при условии (6.80) выражение (6.79) удовлетворяет уравнению (6.78).

Видим, что отыскание резольвенты сводится к решению уравнения (6.80). Но это последнее уравнение есть частный случай исходного уравнения (6.78) при  $\varphi(x) = R_\lambda(x, t)$ ,  $f(x) = K(x, t)$ . Из уравнения (6.80) ясно, что резольвента определяется исключительно структурой ядра и не зависит от правой части уравнения (6.78).

## 6.6. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

Уравнение называется однородным, если правая часть этого уравнения тождественно равна нулю. Таким образом, однородное уравнение имеет вид

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = 0, \quad a \leq x \leq b. \quad (6.81)$$

Очевидно, уравнение (6.81) всегда имеет тривиальное решение  $\varphi(x) = 0$ .

Всякое нетривиальное решение уравнения (6.81), непрерывное на отрезке  $[a, b]$ , будем называть *собственной функцией* этого уравнения. Те значения параметра  $\lambda$ , при которых существует нетривиальное решение интегрального уравнения (6.81), называются *собственными значениями* этого уравнения.

Данному собственному значению может отвечать одна или несколько линейно независимых собственных функций. Множество всех собственных значений образует *спектр* данного интегрального уравнения. Число линейно независимых собственных функций, отвечающих данному собственному значению, называется *рангом* этого собственного значения. Решение однородного уравнения определено с точностью до произвольной константы. Следовательно, собственные функции интегрального уравнения определены с точностью до произвольного множителя. Часто выбирают постоянный множитель так, чтобы

$$\|\varphi\|^2 = \int_a^b |\varphi(x)|^2 dx = 1.$$

Если  $\lambda = \lambda_0$  — собственное значение ранга  $r$  интегрального уравнения (6.81), то этому значению отвечают соответствующие линейно независимые собственные функции  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ , ...,  $\varphi_r(x)$ . Тогда, очевидно, и функция

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^r C_i \varphi_i(x)$$

есть также собственная функция интегрального уравнения (6.81).

Решить однородное интегральное уравнение — значит найти совокупность собственных функций данного уравнения (полную систему).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ  
И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ  
ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Рассмотрим определение собственных значений и собственных функций интегральных уравнений на примерах.

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(y) \varphi(y) dy = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Ядро этого уравнения  $K(x, y) = \sin(x) \cos(y)$  — вырожденное. Имеем

$$\varphi(x) = \lambda \sin(x) \underbrace{\int_0^{\pi} \cos(y) \varphi(y) dy}_{=C} = C \lambda \sin(x).$$

Отсюда находим:

$$\underbrace{\int_0^{\pi} \varphi(x) \cos(x) dx}_{=C} = \lambda C \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(x) dx \Rightarrow C = \frac{\lambda C}{2} [\sin^2(x)]_{x=0}^{x=\pi} = 0.$$

Таким образом,  $\varphi(x) = 0$ , т. е. данное уравнение имеет только тривиальное решение; собственных значений и собственных функций у него нет. Спектр уравнения — пустое множество.

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (x + y) \varphi(y) dy = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Ядро этого уравнения  $K(x, y) = (x + y)$  — вырожденное. Имеем

$$\varphi(x) - \lambda x \underbrace{\int_0^{\pi} \varphi(y) dy}_{=C_1} - \lambda \underbrace{\int_0^{\pi} y \varphi(y) dy}_{=C_2} = 0 \Rightarrow \varphi(x) - \lambda x C_1 - \lambda C_2 = 0.$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(x) dx - \lambda C_1 \int_0^1 x dx - \lambda C_2 \int_0^1 dx &= 0; \\ \int_0^1 x \varphi(x) dx - \lambda C_1 \int_0^1 x^2 dx - \lambda C_2 \int_0^1 x dx &= 0 \end{aligned}$$

или

$$\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) C_1 - \lambda C_2 = 0; \quad -\frac{\lambda}{3} C_1 + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) C_2 = 0.$$

Для того чтобы последняя система имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю. Таким образом, собственные значения нашего интегрального уравнения совпадают с решениями уравнения

$$D(\lambda) = 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12} = 0.$$

Будем иметь  $\lambda_{1,2} = -6 \pm 4\sqrt{3}$  — собственные значения интегрального уравнения; соответствующие им собственные функции:

$$\varphi_1(x) = C \left[ \lambda_1 x + 1 - \frac{\lambda_1}{2} \right]; \quad \varphi_2(x) = C \left[ \lambda_2 x + 1 - \frac{\lambda_2}{2} \right],$$

$C$  — произвольно.

Таким образом, рассматриваемое интегральное уравнение имеет два собственных значения; каждое из них ранга единица ( $r = 1$ ). Спектр данного уравнения — конечное множество, состоящее из двух элементов.

**Пример 3.** Рассмотрим общее уравнение Фредгольма:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad (6.82)$$

где  $K(x, y)$  — произвольное вырожденное ядро:

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(x) \beta_i(y).$$

Имеем

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{i=1}^N \alpha_i(x) \underbrace{\int_a^b \varphi(y) \beta_i(y) dy}_{=C_i} = 0$$

или

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{i=1}^N C_i \alpha_i(x) = 0.$$

Отсюда находим

$$\underbrace{\int_a^b \varphi(x) \beta_k(x) dx}_{=C_k} - \lambda \sum_{i=1}^N C_i \underbrace{\int_a^b \alpha_i(x) \beta_k(x) dx}_{=\alpha_{ik}} = 0$$

или

$$C_k - \lambda \sum_{i=1}^N \alpha_{ik} C_i = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (6.83)$$

Для того чтобы система (6.83) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т. е.

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{21} & \dots & -\lambda\alpha_{N1} \\ -\lambda\alpha_{12} & 1 - \lambda\alpha_{22} & \dots & -\lambda\alpha_{N2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda\alpha_{1N} & -\lambda\alpha_{2N} & \dots & 1 - \lambda\alpha_{NN} \end{vmatrix} = 0. \quad (6.84)$$

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ( $n \leq N$ ) — решения уравнения (6.84). Каждому такому значению  $\lambda = \lambda_i$  соответствует нетривиальное решение интегрального уравнения (6.82). Корни уравнения (6.84) суть собственные значения интегрального уравнения (6.82); соответствующие им функции — собственные функции интегрального уравнения (6.82).

Итак, в случае интегрального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром спектр уравнения — конечное множество. Собственные значения интегрального уравнения совпадают с корнями определителя (6.84).

**Пример 4.** Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)\varphi(y)dy = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (6.85)$$

где ядро  $K(x, y)$  имеет вид

$$K(x, y) = \begin{cases} y(1-x), & y \leq x; \\ x(1-y), & x \leq y. \end{cases}$$

В целом, ядро не является вырожденным; оно непрерывно, но не аналитическое. Такие ядра называются *ядрами типа функции Грина*.

Перепишем наше уравнение (6.85) в виде

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x y(1-x)\varphi(y)dy - \lambda \int_x^1 x(1-y)\varphi(y)dy = 0. \quad (6.86)$$

Продифференцируем уравнение (6.86) по  $x$  (дифференцирование законно, если вообще существует непрерывное решение). При этом воспользуемся известной формулой дифференцирования:

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dy + \beta'(x)f(x, \beta) - \alpha'(x)f(x, \alpha).$$

Будем иметь

$$\varphi'(x) + \lambda \int_0^x y\varphi(y)dy - \lambda x(1-x)\varphi(x) - \lambda \int_x^1 (1-y)\varphi(y)dy + \lambda x(1-x)\varphi(x) = 0$$

или

$$\varphi'(x) + \lambda \int_0^x y\varphi(y)dy - \lambda \int_x^1 (1-y)\varphi(y)dy = 0.$$



Продифференцируем еще раз

$$\varphi''(x) + \lambda x \varphi(x) + \lambda(1-x)\varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi''(x) + \lambda \varphi(x) = 0. \quad (6.87)$$

Далее имеем из уравнения (6.86):

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 0. \quad (6.88)$$

Таким образом, видим, что данное интегральное уравнение (6.85) сводится к задаче Штурма — Лиувилля (6.87), (6.88). Следовательно, собственные значения и собственные функции нашего интегрального уравнения (6.85) совпадают с собственными значениями и собственными функциями задачи Штурма — Лиувилля (6.87), (6.88).

Мы знаем, что  $\lambda_n = n^2\pi^2$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  — собственные значения и  $\varphi_n(x) = \sin(n\pi x)$  — собственные функции задачи (6.87), (6.88). Таким образом, данное интегральное уравнение имеет бесконечное множество собственных значений. Спектр уравнения — счетное множество без точек сгущения. Такой спектр, как мы знаем, называется дискретным.

**Пример 5.** Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} \varphi(y) dy = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (6.89)$$

где ядро  $K(x, y)$  имеет вид

$$K(x, y) = e^{-|x-y|} = \begin{cases} e^{y-x}, & y \leq x; \\ e^{x-y}, & x \leq y. \end{cases} \quad (6.90)$$

Ядро (6.90) также является ядром типа функции Грина. Уравнение (6.89) — сингулярное интегральное уравнение.

Имеем

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^x e^{y-x} \varphi(y) dy - \lambda \int_x^{+\infty} e^{x-y} \varphi(y) dy = 0. \quad (6.91)$$

Если существует непрерывное решение, ограниченное на бесконечности, то можно дифференцировать. Будем иметь тогда

$$\begin{aligned} \varphi'(x) + \lambda \int_{-\infty}^x e^{y-x} \varphi(y) dy - \lambda \varphi(x) - \lambda \int_x^{+\infty} e^{x-y} \varphi(y) dy + \lambda \varphi(x) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi'(x) + \lambda \int_{-\infty}^x e^{y-x} \varphi(y) dy - \lambda \int_x^{+\infty} e^{x-y} \varphi(y) dy &= 0. \end{aligned}$$

Далее

$$\varphi''(x) - \lambda \int_{-\infty}^x e^{y-x} \varphi(y) dy + \lambda \varphi(x) - \lambda \int_x^{+\infty} e^{x-y} \varphi(y) dy + \lambda \varphi(x) = 0$$

или с учетом (6.91)

$$\varphi''(x) + (2\lambda - 1)\varphi(x) = 0. \quad (6.92)$$

Кроме того, решение должно быть ограничено на бесконечности

$$\varphi(x)|_{x \rightarrow \pm\infty} = O(1). \quad (6.93)$$

Таким образом, данное интегральное уравнение (6.89) эквивалентно задаче Штурма — Лиувилля (6.92), (6.93).

Общее решение уравнения (6.92) имеет вид

$$\varphi(x) = C_1 \cos(x\sqrt{2\lambda - 1}) + C_2 \sin(x\sqrt{2\lambda - 1}).$$

В силу ограниченности на бесконечности получаем  $\lambda \geq 1/2$ . Таким образом, спектр задачи — непрерывный  $\lambda \in [1/2, +\infty)$ . При этом собственные функции будут

$$\varphi_1^\lambda(x) = \cos(x\sqrt{2\lambda - 1}), \quad \varphi_2^\lambda(x) = \sin(x\sqrt{2\lambda - 1}). \quad (6.94)$$

Итак, спектр нашего интегрального уравнения (7.89) — бесконечное несчетное множество (непрерывный). Каждому собственному значению  $\lambda \in [1/2, +\infty)$  отвечают две линейно независимые собственные функции (6.94). Все собственные значения имеют ранг  $r = 2$ , за исключением собственного значения  $\lambda = 1/2$ , которое имеет ранг  $r = 1$ ; ему отвечает одна собственная функция  $\varphi_1^0(x) = 1$ .

Подводя итог рассмотренным примерам, мы можем сделать вывод о том, что спектр интегральных уравнений Фредгольма может быть самым разным. Все уравнения Вольтерры имеют своим спектром пустое множество.

#### АЛЬТЕРНАТИВА ФРЕДГОЛЬМА

Альтернатива Фредгольма устанавливает связь между разрешимостью однородного и неоднородного уравнений Фредгольма.

Рассмотрим уравнения:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b; \quad (6.95)$$

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = 0, \quad a \leq x \leq b. \quad (6.96)$$

Будем предполагать, что функции  $f(x)$  и  $K(x, y)$  непрерывны в  $[a, b]$ ,  $y \in [a, b]$ , интервал  $[a, b]$  — конечен.

Грубо говоря, можно сформулировать следующую альтернативу: если одно из уравнений (6.95) или (6.96) разрешимо, то другое уравнение — неразрешимо. Такая ситуация называется *альтернативой Фредгольма*.

Рассмотрим специальный случай. Допустим, что  $K(x, y)$  — вырожденное ядро

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(x)\beta_i(y).$$

Мы знаем, что в случае вырожденного ядра спектр интегрального уравнения — конечное множество и собственные значения совпадают с корнями уравнения

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{21} & \dots & -\lambda\alpha_{N1} \\ -\lambda\alpha_{12} & 1 - \lambda\alpha_{22} & \dots & -\lambda\alpha_{N2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda\alpha_{1N} & -\lambda\alpha_{2N} & \dots & 1 - \lambda\alpha_{NN} \end{vmatrix} = 0. \quad (6.97)$$

Пусть  $\lambda = \lambda_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, n$  ( $n \leq N$ ) — собственные значения уравнения (6.96). Приведем точную формулировку альтернативы Фредгольма для случая вырожденных ядер:

1) если  $\lambda \neq \lambda_s$ , то уравнение (6.95) имеет решение, и притом единственное, в классе непрерывных функций. Уравнение (6.96) не имеет решения, кроме тривиального  $\varphi(x) \equiv 0$ ;

2) если  $\lambda = \lambda_s$ , то уравнение (6.95) не имеет решения (кроме как для специальных правых частей  $f(x)$ ; в этом случае — не единственное). Уравнение (6.96) имеет решение (собственная функция или набор собственных функций, если ранг  $r > 1$ ).

Справедливость сформулированной альтернативы следует из теории, рассмотренной ранее. В общем случае произвольных (невыврожденных) ядер формулировка альтернативы сохраняется, за исключением того, что теперь уже  $\lambda_s$  не являются корнями определителя (6.97), а являются просто собственными значениями интегрального уравнения.

## 6.7. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА С СИММЕТРИЧНЫМ ЯДРОМ

Теория линейного интегрального уравнения с параметром  $\lambda$ :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (6.98)$$

развита Фредгольмом, элементы которой мы рассмотрели ранее, основываясь на предположениях, что ядро  $K(x, y)$ :

- 1) вещественно;
- 2) непрерывно;
- 3) тождественно не равно нулю в области  $R = \{a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ ;
- 4) в теории Гильберта — Шмидта делается еще четвертое предположение, что ядро симметрично:  $K(x, y) = K(y, x)$ .

Примеры симметричных ядер:  $K(x, y) = (y + x)^2$ ,  $K(x, y) = e^{xy}$ ,  $K(x, y) = e^{|x-y|}$ .

Конечно, все результаты теории Фредгольма полностью сохраняются и здесь. Но, кроме того, из дополнительного условия 4 вытекает целый ряд новых результатов.

## КРАТКИЙ ОБЗОР ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ С СИММЕТРИЧНЫМ ЯДРОМ

Параллельно с уравнением (6.98) будем рассматривать однородное уравнение:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = 0, \quad a \leq x \leq b. \quad (6.99)$$

Предполагаем, что ядро  $K(x, y)$  — вещественная непрерывная функция от  $x$  и  $y$ ,  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq y \leq b$ ,  $f(x)$  — непрерывная функция от  $x$  и  $K(x, y) = K(y, x)$ .

Основные результаты сформулируем в виде теорем.

**Теорема 1.** Интегральное уравнение с симметричным ядром имеет по крайней мере одно собственное значение.

**Теорема 2.** Все собственные значения интегрального уравнения с симметричным ядром вещественны.

**Теорема 3.** За исключением случая, когда ядро вырождено, имеется бесконечное множество собственных значений, образующих дискретный спектр.

**Теорема 4.** Ранг собственных значений интегральных уравнений с симметричным ядром всегда конечен.

**Теорема 5.** Собственные функции интегрального уравнения с симметричным ядром, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны на отрезке  $[a, b]$  с весом, равным единице.

**Теорема 6.** Пусть  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$  — полная ортонормальная система собственных функций уравнения (6.99), причем такая, что:

- 1) собственному значению  $\lambda_1$  отвечают собственные функции  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ;
- 2) собственному значению  $\lambda_2$  отвечают собственные функции  $\varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \dots, \varphi_{2n}$  и т. д.

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots$$

Тогда если произвольная функция  $g(x)$  может быть представлена в форме

$$g(x) = \int_a^b K(x, y)\mu(y)dy,$$

где  $\mu(x)$  есть функция, непрерывная в интервале  $[a, b]$ , то она может быть разложена в ряд по собственным функциям

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(x),$$

причем

$$C_n = \int_a^b g(x)\varphi_n(x)dx.$$

Указанный ряд сходится равномерно и абсолютно на отрезке  $[a, b]$ .

**Теорема 7.** Справедлива формула Шмидта:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n \varphi_n(x)}{\lambda - \lambda_n},$$

где

$$f_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx, \quad \lambda \neq \lambda_n.$$

## 6.8. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В практических проблемах физики и техники часто встречаются задачи, где точное решение либо не может быть найдено, либо имеет настолько сложное строение, что им трудно пользоваться при расчетах. В таких случаях приходится прибегать к приближенным методам решения задач математической физики. Здесь мы рассмотрим некоторые приемы приближенного исследования интегральных уравнений.

### СВЕДЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ К УРАВНЕНИЮ С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Возможность удобного решения уравнений с вырожденным ядром приводит к мысли о том, чтобы при решении уравнения с любым ядром заменить это ядро приближенно на вырожденное и решить соответствующее ему уравнение вместо данного уравнения.

Пусть мы имеем интегральное уравнение:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (6.100)$$

с произвольным (невырожденным) непрерывным ядром  $K(x, y)$  и непрерывной правой частью  $f(x)$ .

Образум некоторое вырожденное ядро  $H(x, y)$ :

$$H(x, y) = \sum_{k=1}^N \alpha_k(x)\beta_k(y),$$

которое подберем так, чтобы

$$|K(x, y) - H(x, y)| < \varepsilon, \quad a \leq x \leq b, \quad a \leq y \leq b.$$

Тогда можно считать (с некоторым приближением)  $K(x, y) \cong H(x, y)$ . Будем иметь вместо уравнения (6.100)

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b H(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (6.101)$$

Пусть  $\tilde{\varphi}(x)$  есть решение уравнения (6.101). Можно ожидать, что решение  $\varphi(x)$  уравнения (6.100) такое, что  $|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| < \delta$  и  $\varphi(x) \cong \tilde{\varphi}(x)$  ( $\delta$  зависит от  $\varepsilon$  и определяется  $\varepsilon$ ).

Таким образом, — это можно строго показать [14]\*, — если построить достаточно близкое к ядру  $K(x, y)$  вырожденное ядро  $H(x, y)$ , то, решив уравнение с вырожденным ядром  $H(x, y)$ , мы получим решение, близкое к решению уравнения с ядром  $K(x, y)$  при той же правой части. Более того, если мы построим

\*См. также: *Краснов, М. Л.* Интегральные уравнения (Введение в теорию). — М. : Наука, 1975.

последовательность  $\{H_n(x, y)\}$  вырожденных ядер, равномерно сходящуюся к ядру  $K(x, y)$ , то последовательность  $\{\varphi_n(x)\}$  решений уравнений с ядрами  $H_n(x, y)$  будет равномерно сходиться к решению  $\varphi(x)$  уравнения (6.100) с ядром  $K(x, y)$ .

Способы построения вырожденных ядер, близких к данному ядру  $K(x, y)$ , могут быть самыми различными. Если ядро  $K(x, y)$  непрерывно, то по теореме Вейерштрасса эту функцию можно аппроксимировать полиномом с заданной степенью точности, т. е. существует такой полином  $P(x, y)$ , что

$$|K(x, y) - P(x, y)| < \varepsilon, \quad a \leq x \leq b, \quad a \leq y \leq b.$$

Практически этот способ малопригоден. Обычно ядро разлагается в ряд того или иного типа и за аппроксимирующую функцию выбирают отрезок этого ряда. Например, если ядро  $K(x, y)$  разлагается в ряд

$$K(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m(x) \beta_m(y), \quad a \leq x \leq b, \quad a \leq y \leq b,$$

то

$$H(x, y) = \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_m(x) \beta_m(y),$$

причем

$$|K(x, y) - H(x, y)| = \left| \sum_{m=N}^{\infty} \alpha_m(x) \beta_m(y) \right| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Чем больше  $N$ , тем точнее аппроксимация, но сложнее решение уравнения с вырожденным ядром.

На практике обычно ядро  $K(x, y)$  приближают частичными суммами степенного (ряд Тейлора) или тригонометрического (ряд Фурье) ряда, если ядро  $K(x, y)$  разлагается в равномерно сходящийся в прямоугольнике  $\{a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$  степенной или тригонометрический ряд. Можно также приближать ядро  $K(x, y)$  алгебраическими или тригонометрическими интерполяционными полиномами.

**Пример.** Рассмотрим интегральное уравнение:

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \frac{\varphi(y)}{1 - \varepsilon^2 \cos(x) \cos(y)} dy = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq \varepsilon^2 < 1.$$

Разлагаем ядро этого уравнения в ряд

$$K(x, y) = \frac{1}{1 - \varepsilon^2 \cos(x) \cos(y)} = 1 + \varepsilon^2 \cos(x) \cos(y) + \varepsilon^4 \cos^2(x) \cos^2(y) + \dots$$

В качестве аппроксимирующего ядра берем отрезок этого ряда в виде

$$H(x, y) = 1 + \varepsilon^2 \cos(x) \cos(y).$$

Тогда

$$|K(x, y) - H(x, y)| \leq O(\varepsilon^4).$$

Боле того, можно оценить погрешность аппроксимации

$$\left| K(x, y) - \sum_{m=0}^{N-1} \varepsilon^{2m} \cos^m(x) \cos^m(y) \right| = \left| \sum_{m=N}^{\infty} \varepsilon^{2m} \cos^m(x) \cos^m(y) \right| \leq \sum_{m=N}^{\infty} \varepsilon^{2m} = \frac{\varepsilon^{2N}}{1 - \varepsilon^2}.$$

Итак, вместо заданного уравнения рассмотрим уравнение с вырожденным ядром

$$\tilde{\varphi}(x) - \lambda \int_0^{\pi} [1 + \varepsilon^2 \cos(x) \cos(y)] \tilde{\varphi}(y) dy = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq \varepsilon^2 < 1.$$

Решение последнего уравнения легко получается в системе Maple и имеет вид

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x) - \lambda \int_0^{\pi} \left[ \frac{1}{\pi\lambda - 1} + \frac{2\varepsilon^2 \cos(x) \cos(y)}{\pi\varepsilon^2\lambda - 2} \right] f(y) dy, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq \varepsilon^2 < 1.$$

Мы предоставляем читателю самостоятельно получить это решение.

#### СВЕДЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ К СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дано интегральное уравнение второго рода

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (6.102)$$

Входящий в это равенство интеграл мы можем с помощью любой из квадратурных формул приближенно заменить некоторым простым вида выражением, не содержащим знака интеграла. Разобьем отрезок  $[a, b]$  точками  $\xi_0 = a, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N = b$  на части; тогда, например, с помощью формулы трапеций определенный интеграл представляется в виде

$$\int_a^b g(x) dx = \left[ \frac{1}{2} g(\xi_0) + \sum_{m=1}^{N-1} g(\xi_m) + \frac{1}{2} g(\xi_N) \right] h, \quad h = \frac{b-a}{N}.$$

В таком случае наше интегральное уравнение (6.102) заменяется следующим уравнением:

$$\varphi(x) - \lambda h \left[ \frac{1}{2} K(x, \xi_0) \varphi(\xi_0) + \sum_{m=1}^{N-1} K(x, \xi_m) \varphi(\xi_m) + \frac{1}{2} K(x, \xi_N) \varphi(\xi_N) \right] = f(x). \quad (6.103)$$

В этой формуле неизвестными являются значения функции  $\varphi$  в узловых точках деления, т. е. значения  $\varphi(\xi_0), \varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2), \dots, \varphi(\xi_N)$ .

Равенство (6.103) справедливо во всех точках интервала  $[a, b]$ . Тогда, положив  $x = \xi_n, n = 0, 1, 2, \dots, N$ , получим

$$\varphi(\xi_n) - \lambda h \left[ \frac{1}{2} K(\xi_n, \xi_0) \varphi(\xi_0) + \sum_{m=1}^{N-1} K(\xi_n, \xi_m) \varphi(\xi_m) + \frac{1}{2} K(\xi_n, \xi_N) \varphi(\xi_N) \right] = f(\xi_n). \quad (6.104)$$

Таким образом, мы пришли к системе  $N + 1$  уравнений с  $N + 1$  неизвестными — значениями искомой функции в узловых точках  $\varphi(\xi_0), \varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2), \dots, \varphi(\xi_N)$ .

Очевидно, что точность результата, полученного при замене интегрального уравнения (6.102) системой линейных уравнений (6.104), будет тем выше, чем меньшую погрешность мы совершаем, заменяя интеграл суммой. Точные оценки погрешности, получающейся при применении этого метода, и некоторые рекомендации по выбору той или иной квадратурной формулы можно найти, например, в книге [14].

### МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Для приближенного решения уравнения (6.102) может быть применен метод последовательных приближений, суть которого в следующем.

Строим последовательность функций  $\{\varphi_n(x)\}$  с помощью рекуррентной формулы:

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi_{n-1}(y) dy, \quad a \leq x \leq b.$$

Функции  $\varphi_n(x)$  рассматриваются как приближения к искомому решению уравнения (6.102), причем нулевое приближение  $\varphi_0(x)$  может быть выбрано произвольно.

Если выполнено условие

$$|\lambda| < \frac{1}{B},$$

где

$$B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x, y) dx dy},$$

то последовательность  $\{\varphi_n(x)\}$  сходится в метрике пространства  $L_2(a, b)$  — функций, интегрируемых с квадратом.

Величина погрешности  $m$ -го приближения определяется неравенством

$$|y(x) - \varphi_m(x)| \leq \frac{A}{B} |\lambda B|^m \left( \Phi + \frac{F}{1 - |\lambda B|} \right),$$

где

$$F = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}; \quad \Phi = \sqrt{\int_a^b \varphi_0^2(x) dx}; \quad A = \sqrt{\max_{a \leq x \leq b} \int_a^b K^2(x, y) dy}.$$

Это и дает оценку погрешности приближенного решения, если все квадратуры вычислены точно. Если же квадратуры нельзя выполнить, то для вычисления интегралов можно применить те или иные квадратурные формулы.



## 6.9. ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Интегральные уравнения имеют обширную область приложений в математической физике. Отметим, например, приложения в статической теории упругости, в задачах обтекания в гидродинамике, в теории колебаний, в задачах об устойчивости сжатых стержней и во многих других задачах.

### СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ К ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Рассмотрим регулярную задачу Штурма — Лиувилля для уравнения

$$[p(x)X'(x)]' + [\lambda r(x) - q(x)]X(x) = 0, \quad a < x < b,$$

с граничными условиями первого, второго или третьего рода.

Такая задача всегда может быть сведена к решению интегрального уравнения с симметричным ядром. Собственные функции и собственные значения обеих проблем совпадают.

Для простоты преобразований будем считать, что  $q(x) = 0$  и рассмотрим граничные условия первого рода. Будем иметь следующую задачу:

$$[p(x)X'(x)]' + \lambda r(x)X(x) = 0, \quad a < x < b; \quad (6.105)$$

$$X(a) = 0; \quad X(b) = 0. \quad (6.106)$$

Преобразуем уравнение (6.105) так:

$$[p(x)X'(x)]' = -f(x); \quad f(x) = \lambda r(x)X(x), \quad (6.107)$$

где будем считать (временно) функцию  $f(x)$  известной.

Проинтегрировав (6.107), получим

$$p(x)X'(x) = -\int_a^x f(y)dy + M, \quad M = \text{const.}$$

Отсюда

$$X'(x) = -\frac{1}{p(x)} \int_a^x f(y)dy + \frac{M}{p(x)}, \quad p(x) > 0, \quad r(x) > 0.$$

Проинтегрируем еще раз:

$$X(x) = M \int_a^x \frac{dz}{p(z)} - \int_a^x \frac{dz}{p(z)} \int_a^z f(y)dy + N, \quad N = \text{const.}$$

Переставим порядок интегрирования, получим

$$X(x) = M \int_a^x \frac{dz}{p(z)} - \int_a^x f(y)dy \int_y^x \frac{dz}{p(z)} + N. \quad (6.108)$$

Обозначим

$$\omega(x) = \int_a^x \frac{dz}{p(z)}, \quad x \in [a, b].$$

Тогда формулу (6.108) можно переписать так:

$$X(x) = M\omega(x) - \int_a^x f(y)[\omega(x) - \omega(y)]dy + N. \quad (6.109)$$

Константы  $M$  и  $N$  выбираем так, чтобы выполнялись условия (6.106). Имеем

$$X(a) = 0 \Rightarrow N = 0,$$

$$X(b) = 0 \Rightarrow M\omega(b) - \int_a^b f(y)[\omega(b) - \omega(y)]dy = 0.$$

Ясно, что  $\omega(b) > 0$ , а тогда находим

$$M = \frac{1}{\omega(b)} \int_a^b f(y)[\omega(b) - \omega(y)]dy.$$

Формула (6.109) принимает вид

$$X(x) = \frac{\omega(x)}{\omega(b)} \int_a^b f(y)[\omega(b) - \omega(y)]dy - \int_a^x f(y)[\omega(x) - \omega(y)]dy.$$

Перепишем эту формулу в виде

$$X(x) = \frac{1}{\omega(b)} \left\{ \omega(x) \int_a^x f(y)[\omega(b) - \omega(y)]dy + \omega(x) \int_x^b f(y)[\omega(b) - \omega(y)]dy - \omega(b) \int_a^x f(y)[\omega(x) - \omega(y)]dy \right\}$$

или

$$X(x) = \frac{1}{\omega(b)} \left\{ \int_a^x \omega(y)[\omega(b) - \omega(x)]f(y)dy + \int_x^b \omega(x)[\omega(b) - \omega(y)]f(y)dy \right\},$$

или

$$X(x) = \int_a^b G(x, y)f(y)dy, \quad a \leq x \leq b, \quad (6.110)$$

причем

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{\omega(y)[\omega(b) - \omega(x)]}{\omega(b)}, & y \leq x, \\ \frac{\omega(x)[\omega(b) - \omega(y)]}{\omega(b)}, & x \leq y. \end{cases}$$

Функция  $G(x, y)$  — известная функция. Эта функция называется *функцией Грина* данной задачи (6.105), (6.106). Функция Грина непрерывна в области  $\{a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ , но не является аналитической (производные при  $y = x$  не совпадают). Кроме того, очевидно  $G(x, y) = G(y, x)$ .

Имеем далее

$$f(x) = \lambda r(x)X(x).$$

Таким образом, (6.110) принимает вид

$$X(x) - \lambda \int_a^b G(x, y)r(y)X(y)dy = 0, \quad a \leq x \leq b.$$

Последнее уравнение можно переписать так

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad (6.111)$$

где введены обозначения:

$$\sqrt{r(x)}X(x) = \varphi(x); \quad \sqrt{r(x)r(y)}G(x, y) = K(x, y).$$

Интегральное уравнение (6.111) — очевидно, уравнение с симметричным ядром  $K(x, y) = K(y, x)$ . Таким образом, наша задача свелась к однородному интегральному уравнению Фредгольма с симметричным ядром. Аналогичные выкладки можно проделать для условий второго и третьего рода, а также при  $q(x) \neq 0$ . Отметим еще, что сингулярная задача Штурма — Лиувилля сводится к сингулярному интегральному уравнению.

**Пример.** Рассмотрим следующую задачу Штурма — Лиувилля:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l;$$

$$X(0) = 0; \quad X(l) = 0.$$

Сведем эту задачу к интегральному уравнению. Воспользуемся полученными выше результатами. Имеем  $a = 0$ ,  $b = l$ ,  $p(x) = 1$ ,  $q(x) = 0$ ,  $r(x) = 1$ ; далее

$$\omega(x) = \int_0^x dz = x, \quad \omega(b) = \omega(l) = l;$$

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{y(l-x)}{l}, & y \leq x, \\ \frac{x(l-y)}{l}, & x \leq y. \end{cases}$$

Кроме того,  $\varphi(x) = X(x)$ ,  $K(x, y) = G(x, y)$ . Таким образом, окончательно получаем следующее интегральное уравнение:

$$X(x) - \lambda \int_0^l K(x, y)X(y)dy = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

где

$$K(x, y) = \begin{cases} \frac{y(l-x)}{l}, & y \leq x, \\ \frac{x(l-y)}{l}, & x \leq y. \end{cases}$$

**СВЕДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИКИ  
К ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ФРЕДГОЛЬМА**

Пусть цилиндрическое тело помещено в плоскопараллельный поток идеальной несжимаемой жидкости. Требуется найти скорость установившегося потока в каждой точке пространства.

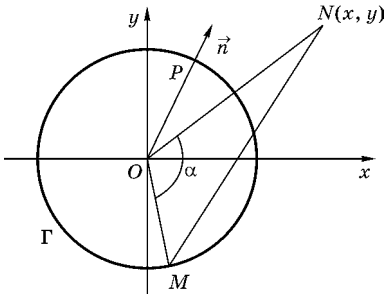
Удобно представить вектор скорости как сумму двух векторов  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$ , где  $\vec{v}_0$  — скорость невозмущенного потока (при отсутствии тела);  $\vec{v}_1$  — возмущение. Соответствующие потенциалы обозначим  $u_0$  и  $u_1$ , так что  $\vec{v}_0 = -\nabla u_0$ ,  $\vec{v}_1 = -\nabla u_1$ . Потенциал невозмущенного потока, очевидно, есть линейная функция координат  $x$  и  $y$ :  $u_0 = -v_x^0 x - v_y^0 y + \text{const}$ , где  $v_x^0$  и  $v_y^0$  — проекции вектора скорости  $\vec{v}_0$  на оси координат  $x$  и  $y$  соответственно. Потенциал  $u_1$  удовлетворяет следующей краевой задаче для уравнения Лапласа:

$$\Delta u_1 \equiv \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, \quad N(x, y) \in D, \tag{6.112}$$

где область  $D$  — внешность цилиндра;

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} &= v_n^0(P), \quad P \in \Gamma; \\ u_1 \Big|_{|ON| \rightarrow \infty} &= 0, \end{aligned} \tag{6.113}$$

где  $v_n^0(P)$  — нормальная к контуру цилиндра  $\Gamma$  составляющая вектора скорости  $\vec{v}_0$ ,  $N(x, y) \in D$  — некоторая точка в пространстве,  $O(0, 0)$  — начало координат в центре цилиндра (рис. 6.1).



**Рис. 6.1**  
Обтекание цилиндра

Будем искать решение нашей задачи  $u_1 = u_1(x, y) = u_1(N)$  в виде

$$u_1(N) = - \int_{\Gamma} \mu(M) \ln |MN| ds_M, \tag{6.114}$$

где  $M$  — некоторая произвольная точка на контуре  $\Gamma$ ;  $\mu(M)$  — некоторая непрерывная неизвестная функция от положения точки  $M(x_M, y_M)$ . При этом будем предполагать, что

$$\int_{\Gamma} \mu(M) ds_M = 0. \tag{6.115}$$

Интеграл вида (7.114) называется *логарифмическим потенциалом простого слоя*. Функция  $\mu(M)$  — плотность этого слоя. Можно утверждать, что (6.114) существует и является непрерывной функцией от точки  $N$ , более того,  $u_1(N) \in C^{(2)}(D)$ . Далее

$$\Delta u_1 = - \int_{\Gamma} \mu(M) \Delta \ln |MN| ds_M, \quad N \in D,$$

но  $\Delta \ln |MN| = 0$ . Таким образом,  $\Delta u_1 = 0$  в области  $D$ , т. е. уравнение (6.112) вполне независимо от вида функции  $\mu(M)$ .

Проверим справедливость условия на бесконечности. Имеем

$$|MN| = \sqrt{|OM|^2 + |ON|^2 - 2|OM||ON|\cos(\alpha)},$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\overline{OM}$  и  $\overline{ON}$  (см. рис. 6.1).

Учитывая, что  $|ON| \rightarrow \infty$ ,  $|OM|$  — ограничено, можно преобразовать, разлагая в ряд

$$|MN| = |ON| \sqrt{1 - 2 \frac{|OM|}{|ON|} \cos(\alpha) + \frac{|OM|^2}{|ON|^2}} = |ON| \left\{ 1 - \frac{|OM|}{|ON|} \cos(\alpha) + \dots \right\} \Big|_{|ON| \rightarrow \infty}.$$

Поэтому

$$\ln |MN| = \ln |ON| + \ln \left\{ 1 - \frac{|OM|}{|ON|} \cos(\alpha) + \dots \right\} \Big|_{|ON| \rightarrow \infty} = \ln |ON| - \frac{|OM|}{|ON|} \cos(\alpha) + \dots$$

Таким образом, при условии, что  $|ON| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} u_1(N) &= -\ln |ON| \underbrace{\int_{\Gamma} \mu(M) ds_M}_{=0} + \frac{1}{|ON|} \int_{\Gamma} \mu(M) |OM| \cos(\alpha) ds_M + \dots = \\ &= O\left(\frac{1}{|ON|}\right) \Big|_{|ON| \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

так как первый интеграл справа равен нулю в силу формулы (6.115).

Остается подобрать функцию  $\mu(M)$  так, чтобы выполнялось условие (6.113).

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial n} &= - \int_{\Gamma} \mu(M) \frac{\partial}{\partial n} \ln |MN| ds_M, \\ |MN| &= \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2}, \\ \frac{\partial}{\partial n} \ln |MN| &= \frac{\partial}{\partial x} (\ln |MN|) \cos(\widehat{\vec{n}, x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\ln |MN|) \cos(\widehat{\vec{n}, y}) = \\ &= \frac{(x - x_M) \cos(\widehat{\vec{n}, x}) + (y - y_M) \cos(\widehat{\vec{n}, y})}{|MN|^2} = \\ &= \frac{\cos(\widehat{\overline{MN}, x}) \cos(\widehat{\vec{n}, x}) + \cos(\widehat{\overline{MN}, y}) \cos(\widehat{\vec{n}, y})}{|MN|} = \frac{\cos(\widehat{\overline{MN}, \vec{n}})}{|MN|}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = - \int_{\Gamma} \mu(M) \frac{\cos(\widehat{\overline{MN}, \vec{n}})}{|MN|} ds_M.$$

Отсюда

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} \Big|_P = \lim_{N \rightarrow P} \frac{\partial u_1}{\partial n} = - \lim_{N \rightarrow P} \int_{\Gamma} \mu(M) \frac{\cos(\widehat{\overline{MN}, \vec{n}})}{|MN|} ds_M.$$

При замене точки  $N$  на точку  $P$  (на контуре) интеграл превращается в несобственный, но тем не менее предел существует. Вычисления дают

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} \Big|_P = - \int_{\Gamma} \mu(M) \frac{\cos(\widehat{MP}, \vec{n})}{|MP|} ds_M - \pi \mu(P).$$

Строгое доказательство этого факта дано в теории потенциала [16], [30].  
Получаем, таким образом

$$- \int_{\Gamma} \mu(M) \frac{\cos(\widehat{MP}, \vec{n})}{|MP|} ds_M - \pi \mu(P) = v_n^0(P)$$

или

$$\mu(P) + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \mu(M) \frac{\cos(\widehat{MP}, \vec{n})}{|MP|} ds_M = - \frac{v_n^0(P)}{\pi}, \quad P \in \Gamma. \quad (6.116)$$

Таким образом, плотность  $\mu(M)$  есть решение интегрального уравнения (6.116) с ядром

$$K(M, P) = \frac{\cos(\widehat{MP}, \vec{n})}{|MP|}$$

и параметром  $\lambda = -1/\pi$ .

Можно показать для широкого класса контуров, что  $\lambda = -1/\pi$  не является собственным значением однородного уравнения, соответствующего уравнению (6.116) и, следовательно, уравнение (6.116) разрешимо (по альтернативе Фредгольма), при этом оказывается выполнимым условие разрешимости (6.115).

**Пример.** Рассмотрим случай обтекания круглого цилиндра, когда  $\Gamma$  есть круг радиуса  $a$  (рис. 6.2).

В этом случае  $|OM| = a$ ,  $|MP| = 2a \cos(\widehat{MP}, \vec{n})$ , следовательно,

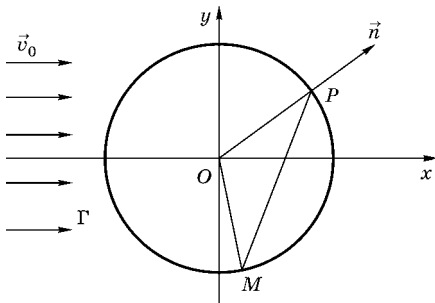


Рис. 6.2  
Обтекание круглого цилиндра

$$K(M, P) = \frac{\cos(\widehat{MP}, \vec{n})}{|MP|} = \frac{1}{2a}.$$

Далее

$$v_n^0(P) = |\vec{v}_0| \cos(\widehat{OP}, x).$$

Таким образом, интегральное уравнение будет иметь вид

$$\mu(P) + \frac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma} \mu(M) ds_M = - \frac{|\vec{v}_0| \cos(\widehat{OP}, x)}{\pi}.$$

Но в силу формулы (6.115) интеграл слева равен нулю. Итак, мы получаем

$$\mu(P) = - \frac{|\vec{v}_0| \cos(\widehat{OP}, x)}{\pi}.$$

## ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 6

1. Какие уравнения называются интегральными? Приведите примеры.
2. Что называется решением интегрального уравнения?
3. Приведите общий вид интегрального уравнения Фредгольма первого рода.
4. Приведите общий вид интегрального уравнения Фредгольма второго рода.
5. Приведите общий вид интегрального уравнения Вольтерры первого рода.
6. Приведите общий вид интегрального уравнения Вольтерры второго рода.
7. Что называется ядром интегрального уравнения?
8. Что называется правой частью интегрального уравнения?
9. Какие требования обычно накладываются на ядро и правую часть интегрального уравнения?
10. Какое интегральное уравнение называется регулярным, сингулярным?
11. Приведите пример интегрального уравнения, в котором интегрирование производится по поверхности.
12. Приведите примеры интегральных уравнений, содержащих интегралы по контуру в плоскости комплексной переменной.
13. Какое интегральное уравнение называется линейным, нелинейным? Приведите примеры.
14. Дайте решение интегрального уравнения Вольтерры второго рода с ядром, зависящим от разности.
15. Дайте решение интегрального уравнения Вольтерры первого рода с ядром, зависящим от разности. Какое дополнительное условие разрешимости должно выполняться в этом случае?
16. Какое уравнение называется уравнением Абеля? Дайте решение этого уравнения.
17. Как решаются интегральные уравнения Фредгольма с ядром, зависящим от разности и с бесконечными пределами интегрирования? Какое условие разрешимости должно выполняться в этом случае?
18. Как решаются интегральные уравнения Фредгольма с ядром, зависящим от суммы и с бесконечными пределами интегрирования? Какое условие разрешимости должно выполняться в этом случае?
19. Какое ядро называется вырожденным? Приведите примеры.
20. Изложите метод решения интегральных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром.
21. Дайте общее решение уравнения Вольтерры разложением в ряд по степеням параметра.
22. Сформулируйте и докажите теорему единственности решения интегрального уравнения Вольтерры.
23. Дайте общее решение уравнения Фредгольма разложением в ряд по степеням параметра.
24. Что называется резольвентой интегрального уравнения?
25. Как определяется резольвента интегрального уравнения Фредгольма?
26. Какие интегральные уравнения называются однородными, неоднородными?
27. Что такое собственные функции интегрального уравнения?
28. Что такое собственные значения интегрального уравнения?
29. Что называется спектром интегрального уравнения?
30. Что такое ранг собственного значения?
31. Укажите связь между разрешимостью однородного и неоднородного интегральных уравнений Фредгольма.
32. Сформулируйте альтернативу Фредгольма.
33. Какое ядро называется симметричным? Приведите примеры.
34. Сформулируйте основные теоремы теории интегральных уравнений с симметричным ядром.
35. Изложите метод сведения интегрального уравнения к уравнению с вырожденным ядром. Приведите пример.
36. Изложите метод сведения интегрального уравнения к системе линейных алгебраических уравнений.
37. Изложите метод последовательных приближений.
38. Сведите регулярную задачу Штурма — Лиувилля к интегральному уравнению с симметричным ядром.
39. Сведите плоскую задачу гидродинамики к интегральному уравнению Фредгольма.

## ЗАДАЧИ С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ

1. Проверить, что данные функции являются решениями соответствующих интегральных уравнений:

$$1) \varphi(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{5/2}}, \quad \varphi(x) = \frac{3x+2x^2}{3(1+x^2)^2} - \int_0^x \frac{3x+2x^2-y}{(1+x^2)^2} \varphi(y) dy;$$

$$2) \begin{cases} \varphi(x) = e^x [\cos(e^x) - e^x \sin(e^x)], \\ \varphi(x) = (1 - xe^{2x}) \cos(1) - e^{2x} \sin(1) + \int_0^x [1 - (x-y)e^{2x}] \varphi(y) dy; \end{cases}$$

$$3) \varphi(x) = xe^x, \quad \varphi(x) = e^x \sin(x) + 2 \int_0^x \cos(x-y) \varphi(y) dy;$$

$$4) \varphi(x) = x - \frac{x^3}{6}, \quad \varphi(x) = x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-y) \varphi(y) dy;$$

$$5) \varphi(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x}}, \quad \int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}} dy = 1.$$

2. Решить уравнение

$$\varphi(x) = \frac{5x}{6} + \frac{1}{2} \int_0^1 xy \varphi(y) dy.$$

3. Решить уравнение

$$\varphi(x) = 3x - 2 + 3 \int_0^2 xy \varphi(y) dy.$$

4. Решить уравнение

$$\varphi(x) = 3x - 2 + 3 \int_0^1 xy \varphi(y) dy.$$

5. При каких значениях параметра  $\lambda$  система имеет нетривиальное решение

$$\begin{cases} \varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x-y) \psi(y) dy, \\ \psi(x) = \lambda \int_0^1 (y-x) \varphi(y) dy. \end{cases}$$

6. Найти собственные значения и собственные функции уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x^2 + y^2) \varphi(y) dy.$$



7. Найти собственные значения и собственные функции уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \left[ 3xy + 1 - \frac{3}{2}(x+y) \right] \varphi(y) dy.$$

8. Найти собственные значения и собственные функции уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y) \varphi(y) dy.$$

9. Решить уравнение

$$\varphi(x) - \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} K(x,y) \varphi(y) dy = \frac{x}{2}, \quad K(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{2}(2-y), & 0 \leq x < y, \\ \frac{y}{2}(2-x), & y \leq x. \end{cases}$$

10. Найти собственные значения и собственные функции уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} K(x,y) \varphi(y) dy, \quad K(x,y) = \begin{cases} \cos(y) \sin(x), & y < x, \\ \cos(x) \sin(y), & x < y. \end{cases}$$

11. Решить уравнение

$$\varphi(x) - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \varphi(y) dy = 2x - \pi.$$

12. Решить уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cos(y) \varphi(y) dy = \sin(x).$$

13. Решить уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \sin(x-y) \varphi(y) dy = \cos(x).$$

14. Решить уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} [x \cos(y) + y^2 \sin(x) + \cos(x) \sin(y)] \varphi(y) dy = x.$$

15. Решить уравнение

$$\varphi(x) = e^x - \int_0^x e^{x-y} \varphi(y) dy.$$

16. Решить уравнение

$$\varphi(x) = x - \int_0^x e^{x-y} \varphi(y) dy.$$

17. Решить уравнение

$$\varphi(x) = e^{2x} + \int_0^x e^{y-x} \varphi(y) dy.$$

18. Решить уравнение

$$\varphi(x) = 1 + x + \int_0^x e^{-2(x-y)} \varphi(y) dy.$$

19. Решить уравнение

$$\varphi(x) = x + \int_0^x \sin(x-y) \varphi(y) dy.$$

20. Решить уравнение

$$\varphi(x) = x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-y) \varphi(y) dy.$$

21. Решить уравнение

$$\varphi(x) = e^x + 2 \int_0^x \cos(x-y) \varphi(y) dy.$$

22. Решить уравнение

$$\varphi(x) = 1 + 2 \int_0^x \cos(x-y) \varphi(y) dy.$$

23. Решить уравнение

$$\varphi(x) = \cos(x) + \int_0^x \varphi(y) dy.$$

24. Решить уравнение

$$\int_0^x e^{x-y} \varphi(y) dy = \operatorname{sh}(x).$$

25. Решить уравнение

$$\int_0^x e^{2(x-y)} \varphi(y) dy = \sin(x).$$

26. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^{2x} + \int_0^x \varphi_2(y) dy, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x e^{2(x-y)} \varphi_1(y) dy. \end{cases}$$

27. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^x + \int_0^x \varphi_1(y) dy - \int_0^x e^{x-y} \varphi_2(y) dy, \\ \varphi_2(x) = -x - \int_0^x (x-y) \varphi_1(y) dy + \int_0^x \varphi_2(y) dy. \end{cases}$$

28. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^x - \int_0^x \varphi_1(y) dy + 4 \int_0^x e^{x-y} \varphi_2(y) dy, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x e^{y-x} \varphi_1(y) dy + \int_0^x \varphi_2(y) dy. \end{cases}$$

29. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = x + \int_0^x \varphi_2(y) dy, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x \varphi_1(y) dy, \\ \varphi_3(x) = \sin(x) + \frac{1}{2} \int_0^x (x-y) \varphi_1(y) dy. \end{cases}$$

30. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 1 - \int_0^x \varphi_2(y) dy, \\ \varphi_2(x) = \cos(x) - 1 + \int_0^x \varphi_3(y) dy, \\ \varphi_3(x) = \cos(x) + \int_0^x \varphi_1(y) dy. \end{cases}$$

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

**Пример 1.** Решить уравнение

$$\varphi(x) = x^2 + 2 \int_0^1 (1 + 3xy)\varphi(y)dy.$$

*Решение.* Данное уравнение является уравнением с вырожденным ядром. Перепишем его в виде

$$\varphi(x) = x^2 + 2 \int_0^1 \varphi(y)dy + 6x \int_0^1 y\varphi(y)dy.$$

Обозначим

$$C_1 = \int_0^1 \varphi(y)dy, \quad C_2 = \int_0^1 y\varphi(y)dy.$$

Тогда наше уравнение примет вид

$$\varphi(x) = x^2 + 2C_1 + 6xC_2.$$

Сначала проинтегрируем последнее уравнение, затем умножим его на  $x$  и опять проинтегрируем. Получим два уравнения относительно констант  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\int_0^1 \varphi(x)dx = \int_0^1 x^2 dx + 2C_1 \int_0^1 dx + 6C_2 \int_0^1 x dx \Rightarrow C_1 = \frac{1}{3} + 2C_1 + 6C_2 \frac{1}{2};$$

$$\int_0^1 x\varphi(x)dx = \int_0^1 x^3 dx + 2C_1 \int_0^1 x dx + 6C_2 \int_0^1 x^2 dx \Rightarrow C_2 = \frac{1}{4} + 2C_1 \frac{1}{2} + 6C_2 \frac{1}{3}.$$

Остается только решить полученные уравнения относительно  $C_1$  и  $C_2$ . Все это удобно выполнить на компьютере в системе Maple. Задаем уравнение

```
>restart;
>with(Student[Calculus1]);
>eq:=phi(x)=x^2+2*int((1+3*x*y)*phi(y),y=0..1);
```

$$eq := \varphi(x) = x^2 + 2 \left( \int_0^1 (1 + 3xy)\varphi(y)dy \right)$$

Вводим обозначения констант  $C_1$  и  $C_2$ . Для этого перепишем уравнение так:

```
>phi(x)=
x^2+2*int(phi(y),y=0..1)+6*x*int(y*phi(y),y=0..1);
```

$$\varphi(x) = x^2 + 2 \left( \int_0^1 \varphi(y)dy \right) + 6x \left( \int_0^1 y\varphi(y)dy \right)$$

```
>sol:=
subs(int(phi(y),y=0..1)=C1,int(y*phi(y),y=0..1)=C2,%);
```

$$sol := \varphi(x) = x^2 + 2C1 + 6xC2$$

Формируем систему уравнений относительно констант  $C_1$  и  $C_2$ :

```
>e1:=
int(lhs(sol),x=0..1)=rhs(Rule['+'](Int(rhs(sol),x=0..1)));
```

$$e1 := \int_0^1 \phi(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 2C_1 dx + \int_0^1 6x C_2 dx$$

```
>e2:=int(x*lhs(sol),x=0..1)=
rhs(Rule['+'](Int(expand(x*rhs(sol)),x=0..1)));
```

$$e2 := \int_0^1 x\phi(x) dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 2xC_1 dx + \int_0^1 6x^2 C_2 dx$$

```
>e1:=subs(int(phi(x),x=0..1)=C1,lhs(e1))=value(rhs(e1));
e2:=subs(int(x*phi(x),x=0..1)=C2,lhs(e2))=value(rhs(e2));
```

$$e1 := C1 = \frac{1}{3} + 2C_1 + 3C_2$$

$$e2 := C2 = \frac{1}{4} + C_1 + 2C_2$$

Решаем полученную систему

```
>res:=solve({e1,e2},{C1,C2});assign(res);
```

$$res := \left\{ C1 = -\frac{5}{24}, C2 = -\frac{1}{24} \right\}$$

```
>sol;
```

$$\phi(x) = x^2 - \frac{5}{24} - \frac{1}{4}x$$

```
>phi:=unapply(rhs(%),x);
```

$$\phi := x \rightarrow x^2 - \frac{5}{24} - \frac{1}{4}x$$

Делаем проверку полученного решения:

```
>simplify(lhs(eq)-rhs(eq));
```

0

Итак, решением нашего уравнения будет функция

$$\varphi(x) = x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{5}{12}.$$

Рассмотренное интегральное уравнение можно решить одной командой `intsolve`:

```
>phi:='phi':intsolve(eq, phi(x));
```

$$\phi(x) = x^2 - \frac{5}{12} - \frac{1}{4}x$$

**Пример 2.** Решить уравнение

$$\varphi(x) - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \varphi(y) dy = 2x - \pi.$$

*Решение.* Решаем в Maple:

```
>restart;
>with(Student[Calculus1]);
>eq:=phi(x)-4*int(sin(x)^2*phi(y),y=0..Pi/2)=2*x-Pi;
phi(x)-4*sin(x)^2*int(phi(y),y=0..Pi/2)=2*x-Pi;
```

$$eq := \phi(x) - 4 \left( \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(x)^2 \phi(y) dy \right) = 2x - \pi$$

$$\phi(x) = -4 \sin(x)^2 \left( \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \phi(y) dy \right) = 2x - \pi$$

```
>eqn:=subs(int(phi(y),y=0..Pi/2)=C,%);
```

$$eqn := \phi(x) - 4 \sin(x)^2 C = 2x - \pi$$

```
>Rule[+](Int(lhs(%),x=0..Pi/2));
```

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\phi(x) - 4 \sin(x)^2 C) dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \phi(x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (-4 \sin(x)^2 C) dx$$

```
>value(subs(Int(phi(x),x=0..Pi/2)=C,rhs(%)))=
simplify(int(rhs(eqn),x=0..Pi/2));
```

$$C - \pi C = -\frac{1}{4} \pi^2$$

```
>res:=solve(% ,C);C:=%;
```

$$res := \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{-1 + \pi}$$

$$C := \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{-1 + \pi}$$

```
>solve(eqn,phi(x));
```

$$\frac{-2x + 2x\pi + \pi - \pi^2 + \sin(x)^2 \pi^2}{-1 + \pi}$$

```
>collect(% ,sin);
```

$$\frac{\sin(x)^2 \pi^2}{-1 + \pi} + \frac{-2x + 2x\pi + \pi - \pi^2}{-1 + \pi}$$

>op(1,%)+normal(op(2,%));

$$\frac{\sin(x)^2 \pi^2}{-1 + \pi} + 2x - \pi$$

>phi:=unapply(%,x);

$$\phi := x \rightarrow \frac{\sin(x)^2 \pi^2}{-1 + \pi} + 2x - \pi$$

>simplify(eq);

$$2x - \pi = 2x - \pi$$

Итак, решением интегрального уравнения будет функция

$$\varphi(x) = -\frac{\pi^2 \sin^2(x)}{\pi - 1} + 2x - \pi.$$

Решаем уравнение с помощью команды `intsolve`:

>phi:='phi':intsolve(eq, phi(x));

$$\phi(x) = -\frac{1}{2} \frac{\pi^2 \cos(2x)}{-1 + \pi} - \pi + \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{-1 + \pi} + 2x$$

**Пример 3.** Найти собственные значения и собственные функции однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x^2 + y^2) \varphi(y) dy.$$

*Решение.* Решаем в Maple:

>restart;

>eq:=phi(x)=lambda\*int((x^2+y^2)\*phi(y),y=0..1);

phi(x)=lambda\*x^2\*int(phi(y),y=0..1)+

lambda\*int(y^2\*phi(y),y=0..1);

$$eq := \phi(x) = \lambda \left( \int_0^1 (x^2 + y^2) \phi(y) dy \right)$$

$$\phi(x) = \lambda x^2 \left( \int_0^1 \phi(y) dy \right) + \lambda \left( \int_0^1 y^2 \phi(y) dy \right)$$

>eqn:=

subs(int(phi(y),y=0..1)=C1,int(y^2\*phi(y),y=0..1)=C2,%);

$$eqn := \phi(x) = C1x^2\lambda + C2\lambda$$

>eqn1:=int(lhs(eq),x=0..1)=int(rhs(eq),x=0..1);  
 eqn2:=int(x^2\*lhs(eq),x=0..1)=int(x^2\*rhs(eq),x=0..1);

$$eqn1 := \int_0^1 \phi(x) dx = \frac{1}{3} C1\lambda + \lambda C2$$

$$eqn2 := \int_0^1 x^2 \phi(x) dx = \frac{1}{5} C1\lambda + \frac{1}{3} \lambda C2$$

>eqn1:=subs(int(phi(x),x=0..1)=C1,eqn1);  
 eqn2:=subs(int(x^2\*phi(x),x=0..1)=C2,eqn2);

$$eqn1 := C1 = \frac{1}{3} C1\lambda + \lambda C2$$

$$eqn2 := C2 = \frac{1}{5} C1\lambda + \frac{1}{3} \lambda C2$$

>A:=linalg[genmatrix]({eqn1,eqn2},{C1,C2});

$$A := \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{3}\lambda & -\lambda \\ -\frac{1}{5}\lambda & 1 - \frac{1}{3}\lambda \end{bmatrix}$$

>Delta:=linalg[det](A);

$$\Delta := 1 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{4}{45}\lambda^2$$

>res:=solve(Delta,lambda);

$$res := -\frac{15}{4} - \frac{9}{4}\sqrt{5}, -\frac{15}{4} + \frac{9}{4}\sqrt{5}$$

Итак, мы нашли собственные значения интегрального уравнения. Обозначим их  $\mu_1$  и  $\mu_2$ :

>mu[1]:=res[1];mu[2]:=res[2];

$$\mu_1 := -\frac{15}{4} - \frac{9}{4}\sqrt{5}$$

$$\mu_2 := -\frac{15}{4} + \frac{9}{4}\sqrt{5}$$

Найдем теперь собственные функции:

>e1:=subs(lambda=mu[1],eqn1);

e2:=subs(lambda=mu[1],eqn2);



```
solve({e1,e2},{C1,C2});
assign(%):
```

$$e1 := C1 = \frac{1}{3}C1\left(-\frac{15}{4} - \frac{9}{4}\sqrt{5}\right) + \left(-\frac{15}{4} - \frac{9}{4}\sqrt{5}\right)C2$$

$$e2 := C2 = \frac{1}{5}C1\left(-\frac{15}{4} - \frac{9}{4}\sqrt{5}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{15}{4} - \frac{9}{4}\sqrt{5}\right)C2$$

$$\{C1 = -C2\sqrt{5}, C2 = C2\}$$

```
>factor(eqn);
```

$$\phi(x) = \frac{1}{5}\sqrt{5}C2(-5x^2 + \sqrt{5})\lambda$$

```
>C1:=' C1' :C2:=' C2' :
e1:=subs(lambda=mu[2],eqn1);
e2:=subs(lambda=mu[2],eqn2);
solve({e1,e2},{C1,C2});
assign(%):
```

$$e1 := C1 = \frac{1}{3}C1\left(-\frac{15}{4} + \frac{9}{4}\sqrt{5}\right) + \left(-\frac{15}{4} + \frac{9}{4}\sqrt{5}\right)C2$$

$$e2 := C2 = \frac{1}{5}C1\left(-\frac{15}{4} + \frac{9}{4}\sqrt{5}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{15}{4} + \frac{9}{4}\sqrt{5}\right)C2$$

$$\{C1 = C2\sqrt{5}, C2 = C2\}$$

```
>factor(eqn);
```

$$\phi(x) = \frac{1}{5}\sqrt{5}C2(5x^2 + \sqrt{5})\lambda$$

Итак, собственные функции (обозначим их  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$ ); они определяются с точностью до произвольного множителя):

```
>psi[2]:=x->5*x^2+5^(1/2);
>psi[1]:=x->-5*x^2+5^(1/2);
```

$$\psi_2 := x \rightarrow 5x^2 + \sqrt{5}$$

$$\psi_1 := x \rightarrow -5x^2 + \sqrt{5}$$

Выполним проверку полученного результата:

```
>simplify(subs(phi(x)=psi[1](x),lhs(eq))-
subs(lambda=mu[1],phi(y)=psi[1](y),rhs(eq)));
```

0

```
>simplify(subs(phi(x)=psi[2](x),lhs(eq))-
subs(lambda=mu[2],phi(y)=psi[2](y),rhs(eq)));
```

0

**Пример 4.** Решить интегральное уравнение Вольтерры:

$$\varphi(x) = e^{-x} + \int_0^x \sin(x-y)\varphi(y)dy.$$

*Решение.* Ядро данного уравнения зависит от разности, поэтому решаем его с помощью преобразования Лапласа. Выполним все выкладки в Maple. Определим уравнение:

```
>restart;with(intrans,laplace,invlaplace);
>eq:=phi(x)=exp(-x)+int(sin(x-y)*phi(y),y=0..x);
```

$$eq := \phi(x) = e^{-x} + \int_0^x \sin(x-y)\phi(y)dy$$

Применяем преобразование Лапласа и получаем уравнение для трансформанты Лапласа:

```
>laplace(eq,x,p);
```

$$\text{laplace}(\phi(x), x, p) = \frac{1}{1+p} + \frac{\text{laplace}(\phi(x), x, p)}{p^2+1}$$

```
>subs(laplace(phi(x),x,p)=Phi,%);
```

$$\Phi = \frac{1}{1+p} + \frac{\Phi}{p^2+1}$$

Решаем уравнение для трансформанты:

```
>solve(%Phi);
```

$$\frac{p^2+1}{(1+p)p^2}$$

Вычисляем обратное преобразование:

```
>invlaplace(%p,x);
```

$$x + 2e^{-x} - 1$$

```
>phi:=unapply(%x);
```

$$\phi := x \rightarrow x + 2e^{-x} - 1$$

Делаем проверку:

```
>simplify(lhs(eq)-rhs(eq));
```

0

Итак, решением нашего уравнения будет функция

$$\varphi(x) = 2e^{-x} + x - 1.$$

Заданное уравнение можно решить с помощью команды `intsolve`:

```
phi:='phi':intsolve(eq, phi(x));
```

$$\phi(x) = x + 2e^{-x} - 1$$

**Пример 5.** Решить систему интегральных уравнений Вольтерры

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x (x-y)\psi(y)dy, \quad \psi(x) = x + \int_0^x (x-y)\varphi(y)dy.$$

*Решение.* Ядра уравнений системы зависят от разности, поэтому решаем эту систему с помощью преобразования Лапласа. Выполним все выкладки в Maple. Определим систему уравнений

```
>restart;with(inttrans,laplace,invlaplace);
>eq1:=phi(x)=1+int((x-y)*psi(y),y=0..x);
eq2:=psi(x)=x+int((x-y)*phi(y),y=0..x);
```

$$eq1 := \phi(x) = 1 + \int_0^x (x-y)\psi(y)dy$$

$$eq2 := \psi(x) = x + \int_0^x (x-y)\phi(y)dy$$

Применим преобразование Лапласа к данной системе интегральных уравнений и сформируем систему уравнений для трансформант:

```
>p1:=laplace(eq1,x,p);p2:=laplace(eq2,x,p);
```

$$p1 := \text{laplace}(\phi(x), x, p) = \frac{1}{p} + \frac{\text{laplace}(\psi(x), x, p)}{p^2}$$

$$p2 := \text{laplace}(\psi(x), x, p) = \frac{1}{p^2} + \frac{\text{laplace}(\phi(x), x, p)}{p^2}$$

```
>e1:=
subs(laplace(phi(x),x,p)=U,laplace(psi(x),x,p)=V,p1);
e2:=
subs(laplace(phi(x),x,p)=U,laplace(psi(x),x,p)=V,p2);
```

$$e1 := U = \frac{1}{p} + \frac{V}{p^2}$$

$$e2 := V = \frac{1}{p^2} + \frac{U}{p^2}$$

Решаем полученную систему и находим оригиналы:

```
>solve({e1,e2},{U,V});assign(%):
```

$$\left\{ U = \frac{p^2 - p + 1}{p^3 - p^2 + p - 1}, V = \frac{p}{p^3 - p^2 + p - 1} \right\}$$

```
>U;phi:=invlaplace(% ,p,x);V;psi:=invlaplace(% ,p,x);
```

$$\frac{p^2 - p + 1}{p^3 - p^2 + p - 1}$$

$$\phi := \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x)$$

$$\frac{p}{p^3 - p^2 + p - 1}$$

$$\psi := -\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}e^x$$

Выполним проверку полученного решения:

```
>phi:=unapply(phi,x);psi:=unapply(psi,x);
```

$$\phi := x \rightarrow \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x)$$

$$\psi := x \rightarrow -\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}e^x$$

```
>simplify(lhs(eq1)-rhs(eq1));simplify(lhs(eq2)-rhs(eq2));
```

0  
0

Итак, решение системы имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}e^x, \quad \psi(x) = -\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}e^x.$$

Команда `intsolve` пакета Maple пока не может решать системы интегральных уравнений. Удобно автоматизировать выкладки, приводящие к решению задачи. Поэтому разработаем процедуру решения системы интегральных уравнений Вольтерры с ядрами, зависящими от разности:

```
>restart;with(inttrans,laplace,invlaplace):
>sysVolterra:=proc(eq,y,N)
local i,j,Y,p,e,eqns,var,res;
var:={};eqns:={};
print(`Решаемая система интегральных уравнений:`);
for i from 1 to N do print(eq||i) end do;
for i from 1 to N do p||i:=laplace(eq||i,x,p) end do;
print(`Уравнения для трансформант Лапласа:`);
```

```

for i from 1 to N do
e||i:=subs(seq(laplace(y||j(x),x,p)=Y||j,j=1..N),p||i);
end do;
for i from 1 to N do
var:=var union {Y||i};
eqns:=eqns union {e||i};
end do;
res:=solve(eqns,var);assign(res);
print(`Решение уравнений для трансформант Лапласа:`);
print(res);
print(`Решение задачи:`);
for i from 1 to N do
Y||i;y||i:=invlaplace(% ,p,x);
y||i:=unapply(y||i,x);
print(y||i(x));
end do;
end proc:

```

Параметрами процедуры `sysVolterra` являются: решаемая система уравнений `eq` (входной параметр),  $N$  — количество уравнений в системе (входной параметр) и искомые функции `y` (выходной параметр). Процедура очень проста и не нуждается в дополнительных комментариях. Проверим работу процедуры на системах уравнений. Зададим несколько систем уравнений:

```

>eq1:=y1(x)=1-int(y2(xi),xi=0..x);
eq2:=y2(x)=cos(x)-1+int(y3(xi),xi=0..x);
eq3:=y3(x)=cos(x)+int(y1(xi),xi=0..x);

```

$$eq_1 := y_1(x) = 1 - \int_0^x y_2(\xi) d\xi$$

$$eq_2 := y_2(x) = \cos(x) - 1 + \int_0^x y_3(\xi) d\xi$$

$$eq_3 := y_3(x) = \cos(x) + \int_0^x y_1(\xi) d\xi$$

```

>sysVolterra(eq,y,3);

```

Решаемая система интегральных уравнений:

$$y_1(x) = 1 - \int_0^x y_2(\xi) d\xi$$

$$y_2(x) = \cos(x) - 1 + \int_0^x y_3(\xi) d\xi$$

$$y_3(x) = \cos(x) + \int_0^x y_1(\xi) d\xi$$

Уравнения для трансформант Лапласа:

$$Y_1 = \frac{1}{p} - \frac{Y_2}{p}$$

$$Y_2 = \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{1}{p} + \frac{Y_3}{p}$$

$$Y_3 = \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{Y_1}{p}$$

Решение уравнений для трансформант Лапласа:

$$\left\{ Y_2 = \frac{1}{p^2 + 1}, Y_1 = \frac{p}{p^2 + 1}, Y_3 = \frac{p + 1}{p^2 + 1} \right\}$$

Решение задачи:

$$\cos(x)$$

$$\sin(x)$$

$$\cos(x) + \sin(x)$$

>eq:='eq':y:='y':

eq1:=y1(x)=x+1+int(y3(xi),xi=0..x);

eq2:=y2(x)=-x+int((x-xi)\*y1(xi),xi=0..x);

eq3:=y3(x)=cos(x)-1-int(y1(xi),xi=0..x);

$$eq_1 := y_1(x) = x + 1 + \int_0^x y_3(\xi) d\xi$$

$$eq_2 := y_2(x) = -x + \int_0^x (x - \xi) y_1(\xi) d\xi$$

$$eq_3 := y_3(x) = \cos(x) - 1 - \left( \int_0^x y_1(\xi) d\xi \right)$$

>sysVolterra(eq,y,3);

Решаемая система интегральных уравнений:

$$y_1(x) = x + 1 + \int_0^x y_3(\xi) d\xi$$

$$y_2(x) = -x + \int_0^x (x - \xi) y_1(\xi) d\xi$$

$$y_3(x) = \cos(x) - 1 - \left( \int_0^x y_1(\xi) d\xi \right)$$

Уравнения для трансформант Лапласа:

$$Y_1 = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} + \frac{Y_3}{p}$$

$$Y_2 = -\frac{1}{p^2} + \frac{Y_1}{p^2}$$

$$Y_3 = \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p} - \frac{Y_1}{p}$$

Решение уравнений для трансформант Лапласа:

$$\left\{ Y_2 = -\frac{1+p^4+p^2-p-p^3}{p^2(2p^2+1+p^4)}, Y_3 = -\frac{2p^2+p^3+1+p}{p(2p^2+1+p^4)}, Y_1 = \frac{p(p+1+p^2)}{2p^2+1+p^4} \right\}$$

Решение задачи:

$$\left(\frac{x}{2}+1\right)\cos(x)+\frac{1}{2}\sin(x)$$

$$-x+1+\left(-\frac{x}{2}-1\right)\cos(x)+\frac{1}{2}\sin(x)$$

$$-1+\cos(x)+\left(-\frac{x}{2}-1\right)\sin(x)$$

Выполним проверку полученного решения

```
>print('Проверка:');
for k from 1 to 3 do
simplify(convert(lhs(eq||k)-rhs(eq||k),exp));
end do;
```

Проверка:

0  
0  
0

С помощью преобразования Лапласа можно успешно решать и задачи Коши для интегродифференциальных уравнений Вольтерры с ядром, зависящим от разности. *Интегродифференциальное уравнение* — уравнение, содержащее неизвестную функцию, как под знаком интеграла, так и под знаком производной. Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 6.** Решить интегродифференциальное уравнение Вольтерры:

$$y''(x) + \int_0^x e^{2(x-y)} y'(y) dy = e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

*Решение.* Ядро уравнения зависит от разности, поэтому решаем его с помощью преобразования Лапласа в системе Maple. Определим задачу:

```

>restart;with(inttrans,laplace,invlaplace):
>eq:=diff(y(x),x$2)+
>int(exp(2*(x-xi))*diff(y(xi),xi),xi=0..x)=exp(2*x);
>ic1:=y(0)=0;ic2:=D(y)(0)=0;

```

$$eq := \frac{d^2}{dx^2} y(x) + \int_0^x e^{2x-2\xi} \left( \frac{d}{d\xi} y(\xi) \right) d\xi = e^{2x}$$

$$ic1 := y(0) = 0$$

$$ic2 := D(y)(0) = 0$$

Применяем преобразование Лапласа и формируем уравнение для трансформанты

```

>req:=laplace(eq,x,p);

```

$$req := p(p \operatorname{laplace}(y(x), x, p) - y(0)) - D(y)(0) + \frac{1}{2} \frac{p \operatorname{laplace}(y(x), x, p) - y(0)}{\frac{p}{2} - 1} = \frac{1}{p - 2}$$

```

>subs(ic1,ic2,laplace(y(x),x,p)=Y,%);

```

$$p^2 Y + \frac{pY}{2\left(\frac{p}{2} - 1\right)} = \frac{1}{p - 2}$$

Решаем полученное уравнение относительно трансформанты:

```

>solve(% ,Y);

```

$$\frac{1}{p(p^2 - 2p + 1)}$$

Находим обратное преобразование:

```

>invlaplace(% ,p,x);

```

$$1 + (-1 + x)e^x$$

```

>y:=unapply(% ,x);

```

$$y := x \rightarrow 1 + (-1 + x)e^x$$

Выполним проверку полученного решения:

```

>simplify(lhs(eq)-rhs(eq));
>simplify(lhs(ic1)-rhs(ic1));
>simplify(lhs(ic2)-rhs(ic2));

```

0  
0  
0



Итак, решение нашего уравнения имеет вид

$$y(x) = 1 + (x - 1)e^x.$$

**Пример 7.** Решить интегродифференциальное уравнение Вольтерры:

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) + 2 \int_0^x \cos(x - \xi) y''(\xi) d\xi + 2 \int_0^x \sin(x - \xi) y'(\xi) d\xi = \cos(x), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

*Решение.* Определим задачу в Maple:

```
>restart;with(inttrans,laplace,invlaplace);
>eq:=diff(y(x),x$2)-2*diff(y(x),x)+y(x)+
2*int(cos(x-xi)*diff(y(xi),xi$2),xi=0..x)+
2*int(sin(x-xi)*diff(y(xi),xi),xi=0..x)=cos(x);
ic1:=y(0)=0;ic2:=D(y)(0)=0;
```

$$eq := \frac{d^2}{dx^2} y(x) - 2 \left( \frac{d}{dx} y(x) \right) + y(x) + 2 \left( \int_0^x \cos(x - \xi) \left( \frac{d^2}{d\xi^2} y(\xi) \right) d\xi \right) + 2 \left( \int_0^x \sin(x - \xi) \left( \frac{d}{d\xi} y(\xi) \right) d\xi \right) = \cos(x)$$

$$ic1 := y(0) = 0$$

$$ic2 := D(y)(0) = 0$$

Решаем:

```
>laplace(eq,x,p);
```

$$\frac{y(0)p^3 + D(y)(0)p^2 + 2pD(y)(0) + py(0) + D(y)(0)}{p^2 + 1} + p^2 \text{laplace}(y(x), x, p) - 2p \text{laplace}(y(x), x, p) + \text{laplace}(y(x), x, p) + \frac{2p^3 \text{laplace}(y(x), x, p)}{p^2 + 1} + \frac{2p \text{laplace}(y(x), x, p)}{p^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + 1}$$

```
>subs(ic1,ic2,laplace(y(x),x,p)=Y,%);
```

$$p^2 Y - 2pY + Y + \frac{2p^3 Y}{p^2 + 1} + \frac{2pY}{p^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + 1}$$

```
>solve(%,Y);
```

$$\frac{p}{(p^2 + 1)^2}$$

>invlaplace(%p,x);

$$\frac{1}{2}x\sin(x)$$

>y:=unapply(%x);

$$y := x \rightarrow \frac{1}{2}x\sin(x)$$

Проверяем полученное решение:

>simplify(convert(lhs(eq)-rhs(eq),exp));

>simplify(lhs(ic1)-rhs(ic1));

>simplify(lhs(ic2)-rhs(ic2));

0

0

0

Итак, решение нашей задачи

$$y(x) = \frac{1}{2}x\sin(x).$$

**Пример 8.** Решить интегродифференциальное уравнение Вольтерры:

$$y''(x) + y(x) + \int_0^x \operatorname{sh}(x-\xi)y(\xi)d\xi + \int_0^x \operatorname{ch}(x-\xi)y'(\xi)d\xi = \operatorname{ch}(x), \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1.$$

*Решение.* Определяем задачу:

>restart;with(intrtrans,laplace,invlaplace):

>eq:=diff(y(x),x\$2)+y(x)+

>int(sinh(x-xi)\*y(xi),xi=0..x)+

>int(cosh(x-xi)\*diff(y(xi),xi),xi=0..x)=cosh(x);

>ic1:=y(0)=-1;ic2:=D(y)(0)=1;

$$eq := \frac{d^2}{dx^2}y(x) + y(x) + \int_0^x \sinh(x-\xi)y(\xi)d\xi$$

$$+ \int_0^x \cosh(x-\xi)\left(\frac{d}{d\xi}y(\xi)\right)d\xi = \cosh(x)$$

$$ic1 := y(0) = 0$$

$$ic2 := D(y)(0) = 0$$

Решаем:

>laplace(eq,x,p);

$$\begin{aligned} & p^2 \operatorname{laplace}(y(x), x, p) - D(y)(0) - py(0) \\ & + \operatorname{laplace}(y(x), x, p) + \frac{\operatorname{laplace}(y(x), x, p)}{p^2 - 1} \\ & + \frac{p^2 \operatorname{laplace}(y(x), x, p)}{p^2 - 1} - \frac{py(0)}{p^2 - 1} = \frac{p}{p^2 - 1} \end{aligned}$$

>subs(ic1,ic2,laplace(y(x),x,p)=Y,%);

$$p^2 Y - 1 + p + Y + \frac{Y}{p^2 - 1} + \frac{p^2 Y}{p^2 - 1} + \frac{p}{p^2 - 1} = \frac{p}{p^2 - 1}$$

>solve(%,Y);

$$\frac{(p-1)(p^2-1)}{p^2(p^2+1)}$$

>invlaplace(%,p,x);

$$-2\cos(x) + 2\sin(x) + 1 - x$$

Проверяем решение:

>y:=unapply(%,x);

$$y := x \rightarrow -2\cos(x) + 2\sin(x) + 1 - x$$

>simplify(convert(lhs(eq)-rhs(eq),exp));

>simplify(lhs(ic1)-rhs(ic1));

>simplify(lhs(ic2)-rhs(ic2));

0

0

0

Итак, решением является функция

$$y(x) = -2\cos(x) + 2\sin(x) - x + 1.$$

**Пример 9.** Решить интегральное уравнение:

$$y(x) = f(x) + \frac{3}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-\xi|} y(\xi) d\xi,$$

где

$$f(x) = e^x [1 - \theta(x)], \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

*Решение.* Данное уравнение в бесконечных пределах с ядром, зависящим от разности. Поэтому для его решения применяем преобразование Фурье. Определим задачу в Maple:

>restart;with(inttrans,fourier,invfourier);

>f:=x->exp(x)\*(1-Heaviside(x));

f(x);convert(%,piecewise);

plot(f(x),x=-5..1,color=black,

title=`Правая часть уравнения`,font=[Courier,bold,14],

labelfont=[Courier,bold,14],gridlines=true);

(рис. 6.3)

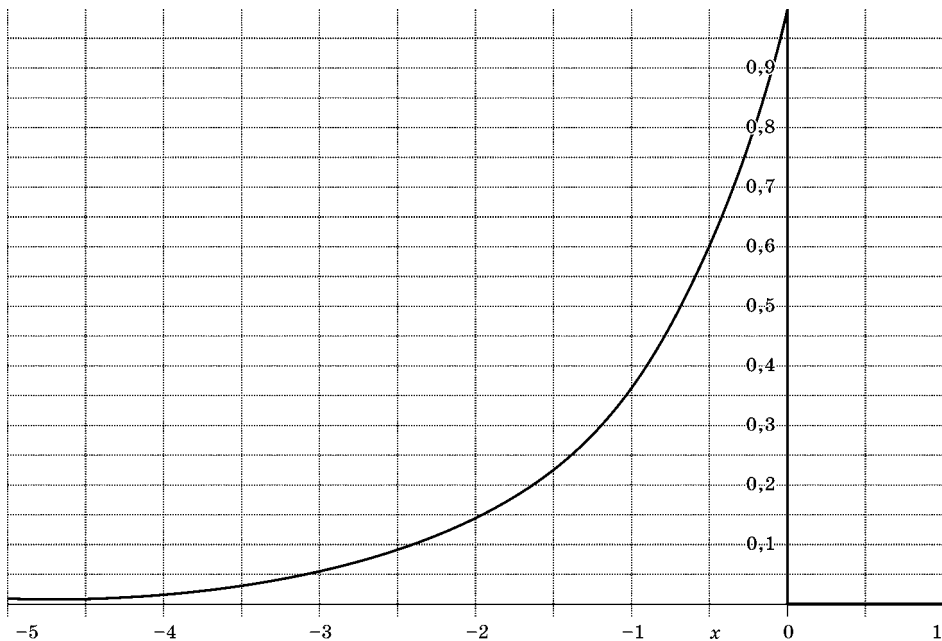


Рис. 6.3  
Правая часть уравнения

$$f := x \rightarrow e^x(1 - \text{Heaviside}(x))$$

$$e^x(1 - \text{Heaviside}(x))$$

$$\begin{cases} e^x & x < 0 \\ \text{undefined} & x = 0 \\ 0 & 0 < x \end{cases}$$

>eqf:=y(x)=f(x)+3/8\*int(exp(-abs(x-s))\*y(s),  
s=-infinity..infinity);

$$eqf := y(x) = e^x(1 - \text{Heaviside}(x)) + \frac{3}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x+s|} y(s) ds$$

Применяем преобразование Фурье и находим трансформанту Фурье:

>fe:=fourier(eqf,x,omega);

$$fe := \text{fourier}(y(x), x, \omega) = \frac{3}{4} \frac{\text{fourier}(y(x), x, \omega)}{\omega^2 + 1} + \frac{1}{1 - I\omega}$$

>subs(fourier(y(x),x,omega)=Y,fe);  
solve(%,{Y});assign(%);

$$Y = \frac{3}{4} \frac{Y}{\omega^2 + 1} + \frac{1}{1 - I\omega}$$

$$\left\{ Y = -\frac{4(\omega^2 + 1)}{(I\omega - 1)(4\omega^2 + 1)} \right\}$$

Вычисляем обратное преобразование:

```
y:=invsfourier(Y,omega,x);
```

$$y := \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\text{Heaviside}(x) + \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}x}\text{Heaviside}(-x)$$

```
>convert(y,piecewise);
```

$$\begin{cases} \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}x} & x < 0 \\ \text{undefined} & x = 0 \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} & 0 < x \end{cases}$$

```
>y:=unapply(y,x);
```

$$y := x \rightarrow \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\text{Heaviside}(x) + \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}x}\text{Heaviside}(-x)$$

Итак, решением нашего уравнения является функция

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\theta(x) + \frac{3}{2}e^{\frac{x}{2}}\theta(-x),$$

где  $\theta(x)$  — единичная функция Хэвисайда, причем  $\theta(-x) = 1 - \theta(x)$ .

```
>plot(y(x),x=-5..5,color=black,
title='Решение уравнения',font=[Courier,bold,14],
labelfont=[Courier,bold,14],gridlines=true);
```

(рис. 6.4)

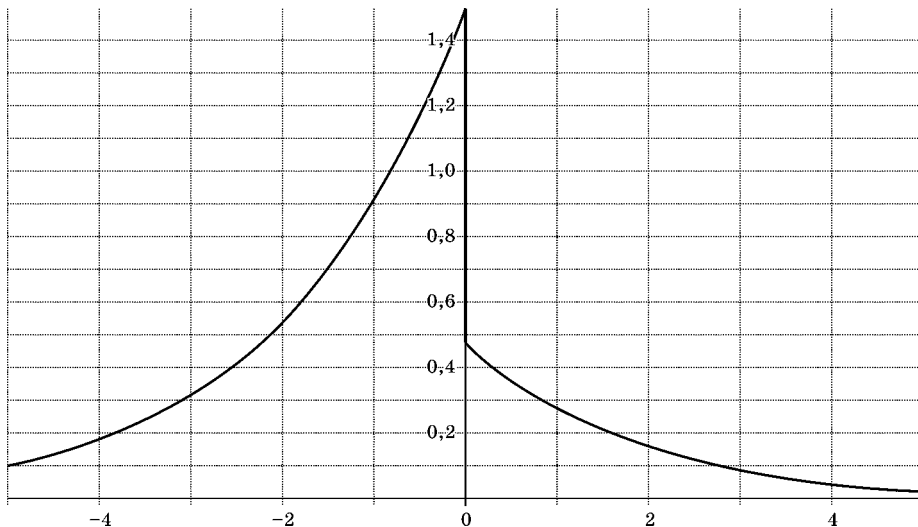


Рис. 6.4  
Решение уравнения

Выполним проверку решения:

```
>convert(simplify(eqf),piecewise);
```

$$\begin{cases} \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}x} & x < 0 \\ \text{undefined} & x = 0 \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} & 0 < x \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}x} & x < 0 \\ \text{undefined} & x = 0 \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} & 0 < x \end{cases}$$

или

```
>simplify(lhs(eqf)-rhs(eqf));
```

$$\begin{cases} \text{undefined} & x = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Все в порядке!

С помощью преобразования Лапласа можно решить и некоторые нелинейные интегральные уравнения.

**Пример 10.** Решить нелинейное интегральное уравнение:

$$\int_0^x \varphi(\xi)\varphi(x-\xi)d\xi = \frac{x^3}{6}.$$

*Решение.* Все необходимые преобразования выполняем в Maple:

```
>restart;with(intrans,laplace,invlaplace);
```

```
>eq:=int(phi(y)*phi(x-y),y=0..x)=x^3/6;
```

$$eq := \int_0^x \phi(y)\phi(x-y)dy = \frac{1}{6}x^3$$

```
>laplace(eq,x,p);
```

$$\text{laplace}(\phi(x), x, p)^2 = \frac{1}{p^4}$$

```
>subs(laplace(phi(x),x,p)=Phi,%);
```

$$\Phi^2 = \frac{1}{p^4}$$

```
>solve(%Phi);
```

$$\frac{1}{p^2}, -\frac{1}{p^2}$$

Решение не единственно!

```
>phi1:=invlaplace(%[1],p,x);phi2:=invlaplace(%[2],p,x);
```

$$\phi1 := x$$

$$\phi2 := -x$$

>phi1:=unapply(phi1,x);phi2:=unapply(phi2,x);

$$\phi 1 := x \rightarrow x$$

$$\phi 2 := x \rightarrow -x$$

Выполним проверку решений:

>subs({phi(y)=phi1(y),phi(x-y)=phi1(x-y)},eq);  
simplify(value(%));

$$\int_0^x y(x-y)dy = \frac{1}{6}x^3$$
$$\frac{1}{6}x^3 = \frac{1}{6}x^3$$

>subs({phi(y)=phi2(y),phi(x-y)=phi2(x-y)},eq);  
simplify(value(%));

$$\int_0^x (-y(-x+y))dy = \frac{1}{6}x^3$$
$$\frac{1}{6}x^3 = \frac{1}{6}x^3$$

Итак, данному уравнению удовлетворяют две функции:

$$\varphi = \varphi_1(x) = x, \quad \varphi = \varphi_2(x) = -x.$$

### ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим несколько примеров численного решения интегральных уравнений. Станем рассматривать интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (6.117)$$

Полагая в уравнении (6.117)  $x = x_k, k = 1, 2, \dots, n, x_k \in [a, b]$  получим

$$\varphi(x_k) - \lambda \int_a^b K(x_k,y)\varphi(y)dy = f(x_k), \quad a \leq x \leq b, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.118)$$

Интеграл в левой части (6.118) заменим суммой с помощью одной из квадратурных формул и получим систему линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными  $\varphi(x_k), k = 1, 2, \dots, n$ , которые являются приближенными значениями решения  $\varphi(x)$  в узлах  $x = x_k, k = 1, 2, \dots, n, x_k \in [a, b]$ :

$$\varphi(x_k) - \lambda \sum_{m=1}^n A_m K(x_k, x_m)\varphi(x_m) = f(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где  $A_m$  — коэффициенты квадратурной формулы (не зависят от подынтегральной функции).

Приведем значения коэффициентов  $A_m$  и абсцисс  $x_m$  квадратурной формулы:

1) для формулы прямоугольников

$$x_m = a + (m-1)h, \quad A_m = h, \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n};$$

2) для формулы трапеций

$$x_m = a + (m-1)h, \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

$$A_1 = A_n = \frac{h}{2}, \quad A_m = h, \quad m = 2, 3, \dots, n-1, \quad h = \frac{b-a}{n-1};$$

3) для формулы Симпсона ( $n = 2m + 1$ )

$$x_1 = a, x_2 = a + h, \dots, x_{2m+1} = a + 2mh = b,$$

$$A_1 = A_{2m+1} = \frac{h}{3}, \quad A_2 = A_4 = \dots = A_{2m} = \frac{4h}{3},$$

$$A_3 = A_5 = \dots = A_{2m-1} = \frac{2h}{3}, \quad h = \frac{b-a}{2m}.$$

За приближенное решение уравнения (6.117) на отрезке  $[a, b]$  принимается функция

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{m=1}^n A_m K(x, x_m) \varphi(x_m), \quad a \leq x \leq b.$$

Расчетные формулы легко программируются. Приведем процедуры вычисления решения интегрального уравнения с применением рассмотренных формул.

Квадратурная формула Симпсона:

```
>Simpson:=proc(m,n,phi)local i,j,k,eq,eqns,var,A,y;
A:=array(1..n);
y:=array(1..n);
A[1]:=h/3;A[2*m+1]:=h/3;
for i from 2 to 2*m by 2 do A[i]:=4*h/3 end do;
for j from 3 to 2*m-1 by 2 do A[j]:=2*h/3 end do;
eqns:={}:var:={};
for k from 1 to n do
eq[k]:=y[k]-lambda*sum(A[s]*K(X[k],X[s])*y[s],
s=1..n)=f(X[k]);
eqns:=eqns union {eq[k]};
var:=var union {y[k]};
end do;
fsolve(eqns,var);assign(%);
phi:=x->f(x)+lambda*sum(A[s]*K(x,X[s])*y[s],s=1..n);
end proc;
```



Квадратурная формула прямоугольников:

```
>Rectangle:=proc(n,phi)local k,eq,eqns,var,y;
y:=array(1..n);
eqns:={}:var:={}:
for k from 1 to n do
eq[k]:=y[k]-lambda*h*sum(K(X[k],X[s])*y[s],
s=1..n)=f(X[k]);
eqns:=eqns union {eq[k]};
var:=var union {y[k]};
end do;
fsolve(eqns,var);assign(%);
phi:=x->f(x)+lambda*h*sum(K(x,X[s])*y[s],s=1..n);
end proc;
```

Квадратурная формула трапеций:

```
>Trapezoid:=proc(n,phi)local k,eq,eqns,var,y;
y:=array(1..n);
eqns:={}:var:={}:
for k from 1 to n do
eq[k]:=y[k]-lambda*h/2*(K(X[k],X[1])*y[1]+
K(X[k],X[n])*y[n])
-lambda*h*sum(K(X[k],X[s])*y[s],s=2..n-1)=f(X[k]);
eqns:=eqns union {eq[k]};
var:=var union {y[k]};
end do;
fsolve(eqns,var);assign(%);
phi:=x->f(x)+lambda*h/2*(K(x,X[1])*y[1]+K(x,X[n])*y[n])
+lambda*h*sum(K(x,X[s])*y[s],s=2..n-1);
end proc;
```

**Пример 1.** Решить интегральное уравнение:

$$u(x) = e^x \sin(x) + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2 + \cos(x)}{2 + \cos(\xi)} u(\xi) d\xi.$$

*Решение.* Все необходимые преобразования выполняем в Maple. Определяем интегральное уравнение Фредгольма второго рода общего вида:

```
>restart;
>interface(displayprecision = 6);
>eq:=u(x)=f(x)+lambda*int(K(x,t)*u(t),t=a..b);
```

$$eq := u(x) = f(x) + \lambda \left( \int_a^b K(x, t) u(t) dt \right)$$

Определяем ядро, свободный член и параметры уравнения:

```
>K:=(x,t)->(2+cos(x))/(2+cos(t));
```

$$K := (x, t) \rightarrow \frac{2 + \cos(x)}{2 + \cos(t)}$$

```
>f:=x->exp(x)*sin(x);
```

$$f := x \rightarrow e^x \sin(x)$$

```
>lambda:=1;
```

$$\lambda := 1$$

```
>a:=0.;b:=0.5;
```

$$a := 0.000000$$

$$b := 0.500000$$

```
>eq;
```

$$u(x) = e^x \sin(x) + \int_{0.000000}^{0.500000} \frac{(2 + \cos(x))u(t)}{2 + \cos(t)} dt$$

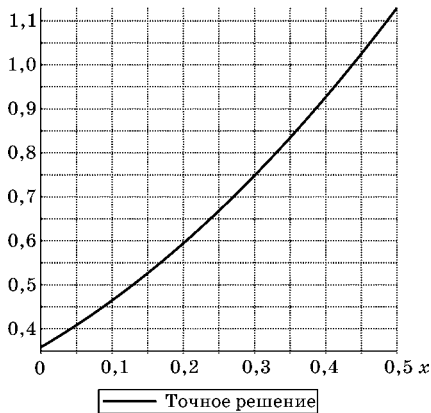


Рис. 6.5  
Точное решение

Это уравнение решается точно в Maple:

```
>intsolve(eq,u(x));
```

$$u(x) = 1.000000e^x \sin(x) + 0.2341555 + 0.117078 \cos(x)$$

Образуем функцию для последующего сравнения с численным решением:

```
>U:=unapply(rhs(%),x);
```

$$U := x \rightarrow 1.000000e^x \sin(x) + 0.2341555 + 0.1170777 \cos(x)$$

и изобразим ее на графике (рис. 6.5).

```
>pU:=plot(U(x),x=a..b,gridlines=true,font=[Times,bold,14],
numpoints=5,labelfont=[Times,bold,14],
legend='точное решение'):
>plots[display](pU);
```

Найдем теперь численное решение с использованием квадратурной формулы прямоугольников:

```
>n:=50;h:=(b-a)/(n-1);X:=seq(a+(i-1)*h,i=1..n);
Rectangle(n,phi);phi(x);
```

$n := 50$   
 $h := 0.010204$   
 $X := 0.000000, 0.010204, 0.020408, 0.030612, 0.040816, 0.051020,$   
 $0.061224, 0.071429, 0.081633, 0.091837, 0.102041, 0.112245,$   
 $0.122449, 0.132653, 0.142857, 0.153061, 0.163265, 0.173469,$   
 $0.183673, 0.193878, 0.204082, 0.214286, 0.224490, 0.234694,$   
 $0.244898, 0.255102, 0.265306, 0.275510, 0.285714, 0.295918,$   
 $0.306122, 0.316327, 0.326531, 0.336735, 0.346939, 0.357143,$   
 $0.367347, 0.377551, 0.387755, 0.397959, 0.408163, 0.418367,$   
 $0.428571, 0.438776, 0.448980, 0.459184, 0.469388, 0.479592,$   
 $0.489796, 0.500000$

$$x \rightarrow f(x) + \lambda h \left( \sum_{s=1}^{50} K(x, X_s) y_s \right)$$

$$e^x \sin(x) + 0.122387 \cos(x) + 0.244774$$

Проверим полученное решение. Подставим его в уравнение:

```
>EQ:=subs({u(x)=phi(x),u(t)=phi(t)},eq);
>IntegrationTools[Expand](EQ);
```

$$e^x \sin(x) + 0.122387 \cos(x) + 0.244774 =$$

$$= e^x \sin(x) + 0.239465 + 0.119732 \cos(x)$$

Оценим модуль разности левой и правой части уравнения:

```
>Error:=abs(lhs(%)-rhs(%));
```

$$Error := |0.002655 \cos(x) + 0.005309|$$

```
>Optimization[Maximize](Error,{x<=0.5,x>=0});
```

$$[0.007964, [x = 0.000000]]$$

Таким образом, наибольшее значение модуля разности не превосходит 0,008 и достигается в точке  $x = 0$ . Построим график этой ошибки (рис. 6.6).

```
>plot(Error,x=a..b,title='Погрешность выполнения уравнения',
font=[Courier,roman,14],labelont=[Helvetica,roman,14],
gridlines=true);
```

Оценим погрешность решения (рис. 6.7):

```
>Delta:=abs(U(x)-phi(x));
```

$$\Delta := |0.010618 + 0.005309 \cos(x)|$$

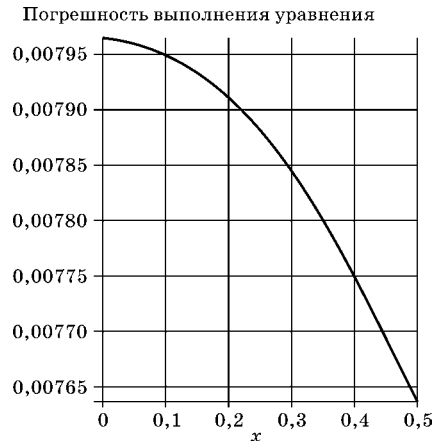


Рис. 6.6  
Погрешность выполнения уравнения

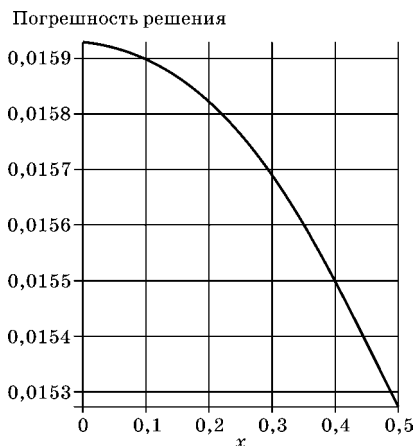


Рис. 6.7  
Погрешность решения

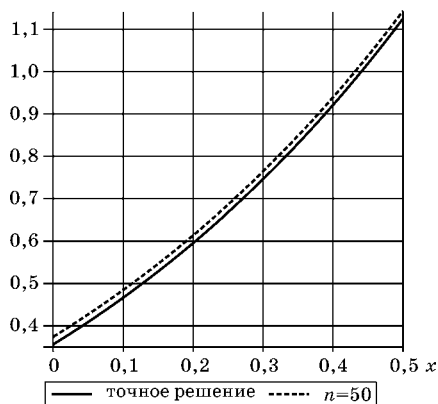


Рис. 6.8  
Сравнение решений:  
точное и формула прямоугольников

```
>Optimization[Maximize](Delta,{x<=0.5,x>=0});
[0.015927,[x = 0.000000]]
```

```
>plot(Delta,x=a..b,title='Погрешность решения`,
font=[Courier,roman,14],
labelfont=[Helvetica,roman,14],gridlines=true);
```

Отообразим на одном графике точное и приближенное решение (рис. 6.8):

```
>plots[display](p||n,pU);
```

Выполним теперь расчет с использованием квадратурной формулы трапеций:

```
>p:=' p ':K:=' K ':lambda:=' lambda' :f:=' f' :
eq:=u(x)=f(x)+lambda*int(K(x,t)*u(t),t=a..b):
K:=(x,t)->(2+cos(x))/(2+cos(t)):
f:=x->exp(x)*sin(x):
lambda:=1:
a:=0.:b:=0.5:
>n:=11;h:=(b-a)/(n-1);X:=seq(a+(i-1)*h,i=1..n);
Trapezoid(n,phi);phi(x);
```

```
n := 11
```

```
h := 0.050000
```

```
X := 0.000000,0.050000,0.100000,0.150000,0.200000,0.250000,
0.300000,0.350000,0.400000,0.450000,0.500000
```

$$x \rightarrow f(x) + \frac{1}{2} \lambda h (K(x, X_1) y_1 + K(x, X_{11}) y_{11}) + \lambda h \left( \sum_{s=2}^{11-1} K(x, X_s) y_s \right)$$

```
ex sin(x) + 0.234564 + 0.117282cos(x)
```

Отобразим полученное решение на графике (рис. 6.9).

```
>p||n:=plot(phi(x),x=a..b,gridlines=true,
font=[Times,bold,14],style=point,symbol=box,numpoints=5,
symbolsize=15,labelfont=[Times,bold,14],
legend=cat(`n =`,convert(n,string))):
>plots[display](p||n,pU);
```

Оценим погрешность численного решения:

```
>EQ:=subs({u(x)=phi(x),u(t)=phi(t)},eq):
IntegrationTools[Expand](EQ);
```

$$e^x \sin(x) + 0.234564 + 0.117282 \cos(x) = e^x \sin(x) + 0.234360 + 0.11780 \cos(x)$$

```
>Error:=abs(lhs(%)-rhs(%));
```

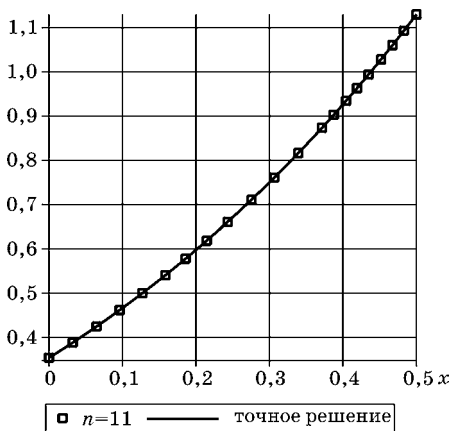
$$Error := |0.000204 + 0.000102 \cos(x)|$$

```
>Optimization[Maximize](Error,{x<=0.5,x>=0});
```

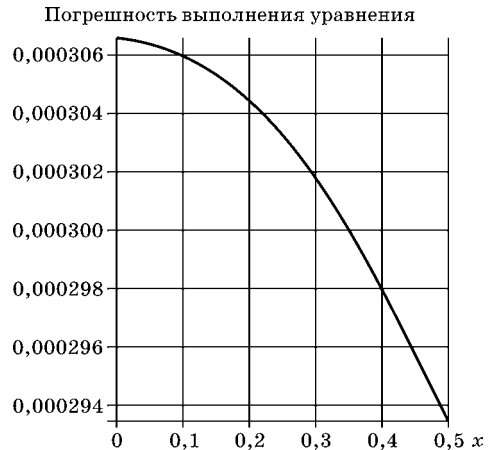
$$[0.000306, [x = 0.000000]]$$

Отобразим на графике невязку в выполнении уравнения (рис. 6.10):

```
>plot(Error,x=a..b,
title=`Погрешность выполнения уравнения`,
font=[Courier,roman,14],
labelfont=[Helvetica,roman,14],gridlines=true);
```



**Рис. 6.9**  
Сравнение решений:  
точное и формула трапеций



**Рис. 6.10**  
Погрешность выполнения уравнения

Оценим погрешность решения (рис. 6.11):

```
>Delta:=abs(U(x)-phi(x));
```

$$\Delta := |0.000408 + 0.000204 \cos(x)|$$

```
>Optimization[Maximize](Delta,{x<=0.5,x>=0});
```

$$[0.000612, [x = 0.000000]]$$

```
>plot(Delta,x=a..b,title='Погрешность решения',  
font=[Courier,roman,14],  
labelfont=[Helvetica,roman,14],gridlines=true);
```

Наконец, выполним расчет с использованием квадратурной формулы Симпсона (рис. 6.12–6.14):

```
>p:=' p' :K:=' K' :lambda:=' lambda' :f:=' f' :  
eq:=u(x)=f(x)+lambda*int(K(x,t)*u(t),t=a..b):  
K:=(x,t)->(2+cos(x))/(2+cos(t)):  
f:=x->exp(x)*sin(x):  
lambda:=1:  
a:=0.:b:=0.5:  
n:=2*m+1:  
m:=1:  
>h:=(b-a)/(2*m);
```

$$h := 0.250000$$

```
>X:=seq(a+(i-1)*h,i=1..n);
```

$$X := 0.000000, 0.250000, 0.500000$$



Рис. 6.11  
Погрешность решения

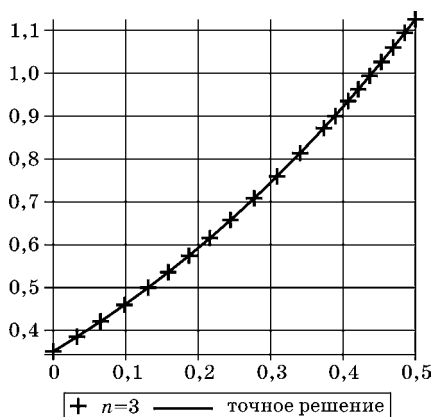


Рис. 6.12  
Сравнение решений:  
точное и формула Симпсона

>Simpson(m,n,phi);phi(x);

$$x \rightarrow f(x) + \lambda \left( \sum_{s=1}^3 A_s K(x, X_s) y_s \right)$$

$$e^x \sin(x) + 0.234299 + 0.117115 \cos(x)$$

>p||n:=plot(phi(x),x=a..b,gridlines=true,  
font=[Times,bold,14],style=point,symbol=cross,  
numpoints=5,color=red,symbolsize=20,  
labelfont=[Times,bold,14],  
legend=cat(`n =`,convert(n,string))):

>plots[display](p||n,pU);

>EQ:=subs({u(x)=phi(x),u(t)=phi(t)},eq);  
IntegrationTools[Expand](EQ);

$$e^x \sin(x) + 0.234229 + 0.117115 \cos(x) = e^x \sin(x) + 0.234192 + 0.117096 \cos(x)$$

>Error:=abs(lhs(%)-rhs(%));

$$Error := |0.000037 + 0.000018 \cos(x)|$$

>Optimization[Maximize](Error,{x<=0.5,x>=0});

$$[0.000055, [x = 0.000000]]$$

>plot(Error,x=a..b,title=`Погрешность выполнения уравнения`,  
font=[Courier,roman,14],labelfont=[Helvetica,roman,14],gridlines=true);

>Delta:=abs(U(x)-phi(x));

$$\Delta := |0.000074 + 0.000037 \cos(x)|$$

>plot(Delta,x=a..b,title=`Погрешность решения`,  
font=[Courier,roman,14],labelfont=[Helvetica,roman,14],  
gridlines=true);

Сравнивая полученные численные решения, видим, что наилучший результат дает формула Симпсона, а худший — формула прямоугольников.

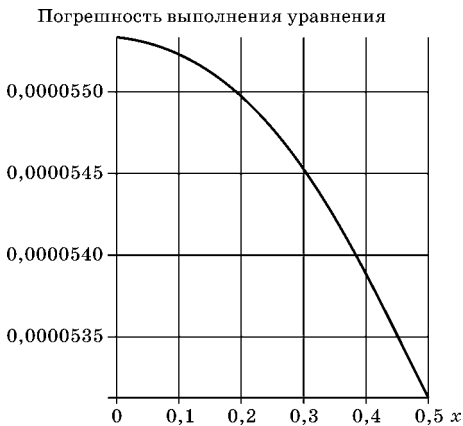


Рис. 6.13

Погрешность выполнения уравнения

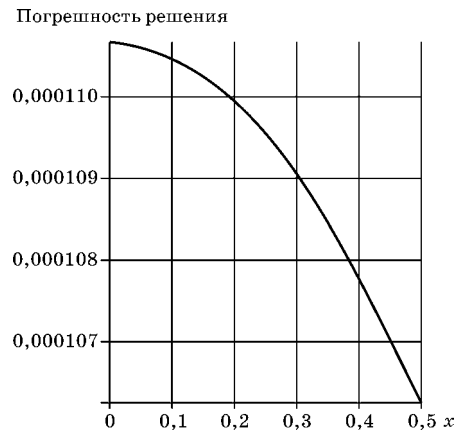


Рис. 6.14

Погрешность решения

# 7

## ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

### Г Л А В А

**В** этой главе рассмотрим некоторые методы приближенного аналитического (или, правильнее, численно-аналитического) решения задач математической физики. Известно, что многие проблемы физики наряду с дифференциальными уравнениями управляются так называемыми минимальными принципами. Так, например, положение равновесия механической системы есть положение, отвечающее минимуму ее потенциальной энергии. Поэтому проблема решения краевой задачи для дифференциального уравнения, описывающей поведение механической системы, оказывается эквивалентной проблеме нахождения функции, доставляющей минимум интеграла, которым выражается потенциальная энергия системы. Математически проблема решения краевой задачи для дифференциального уравнения эквивалентна задаче вариационного исчисления о минимуме интеграла, для которого данное дифференциальное уравнение является уравнением Эйлера — Лагранжа. Для решения задач вариационного исчисления можно применять непосредственные, прямые методы; в силу указанной эквивалентности задач эти методы являются одновременно и методами решения краевых задач для дифференциальных уравнений. Целью этой главы будет изложение такого рода методов, наиболее известными среди которых являются методы Ритца и Бубнова — Галёркина.

Прежде чем перейти к изложению вариационных методов, мы напомним некоторые понятия вариационного исчисления.

### 7.1. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Вариационное исчисление является разделом математики, в котором изучается свойство стационарности функции от функций, т. е. *функционала*\*. Таким образом, цель вариационного исчисления состоит не в отыскании экстремума функции конечного числа переменных, а в нахождении среди множества допустимых функций такой, которая придает заданному функционалу стационарное значение.

---

\* Термин «функционал» введен Адамаром в 1903 г.



Вариационное исчисление имеет обширную область приложений в математической физике благодаря тому, что физическая система часто ведет себя таким образом, что некоторый функционал, зависящий от ее поведения, принимает стационарное значение. Иначе говоря, уравнения, описывающие физические явления, часто являются условиями стационарности некоторой вариационной задачи. Типичным примером является принцип Ферма в оптике. Он состоит в том, что луч света между двумя точками проходит по пути, который требует наименьшего времени. Отсюда непосредственно следует вывод, что в любой *однородной* среде свет распространяется по прямой линии.

Механика также является одним из разделов математической физики, в котором широко применяются вариационные методы. В частности, вариационные принципы механики выражают столь общие свойства различных механических систем, что из них как следствия получаются уравнения движения данной системы.

Вариационное исчисление, основанное в XVIII в. Л. Эйлером и Лагранжем, было значительно развито в трудах математиков XIX в.

В качестве примера вариационной задачи рассмотрим задачу об изгибе стержня. Пусть для определенности концы стержня жестко защемлены и стержень в недеформированном состоянии занимает отрезок  $[0, l]$  оси  $Ox$ . Как известно из механики, полная потенциальная энергия упругого стержня выражается следующим интегралом:

$$U[y(x)] = \int_0^l \left[ \frac{EJ}{2} \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 - q(x)y(x) \right] dx, \quad y(x) \in C^{(2)},$$

где  $E$  — модуль Юнга;  $J$  — момент инерции поперечного сечения стержня;  $q(x)$  — заданная поперечная нагрузка.

В положении равновесия стержень принимает такую форму, что его полная потенциальная энергия минимальна.

Таким образом, мы приходим к следующей вариационной задаче: найти функцию  $y = y(x)$  такую, что

$$U[y(x)] \rightarrow \min,$$

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0.$$

Для этой задачи характерны два обстоятельства. Во-первых, это задача на экстремум, т. е. задача, в которой речь идет о максимуме или минимуме некоторой числовой величины. Во-вторых, искомой в этой задаче является функция.

Переменная величина, экстремумом которой мы интересуемся в приведенном примере, называется *функционалом*. Мы говорим, что нам задан функционал, если каждой функции из некоторого класса функций поставлено в соответствие определенное число.

Таким образом, если каждой функции  $y = y(x)$ , принадлежащей некоторому функциональному классу  $A$ , ставится в соответствие числовое значение  $J$ , то говорят, что  $J$  есть функционал, определенный на классе  $A$ , и пишут

$$J = \mathcal{J}[y(x)], \quad y(x) \in A.$$

Те функции  $y = y(x)$ , от выбора которых зависит функционал  $J[y]$ , называются *функциональными аргументами*. Как правило, в качестве класса  $A$  функций мы будем использовать классы функций  $C, C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(k)}$ .

В рассмотренной задаче об изгибе функция  $y(x)$  зависит только от одной переменной  $x$ . На самом деле это не важно — функция  $y$  может зависеть от любого числа переменных; в этом случае под  $x$  понимается точка многомерного пространства, например  $n$ -мерного  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , и соответствующий интеграл  $J$  будет кратным.

Приведем примеры функционалов.

1. Рассмотрим на плоскости всевозможные спрямляемые кривые\*. Каждой такой кривой соответствует определенное число — ее длина. Таким образом, длина кривой представляет собой функционал, определенный на множестве спрямляемых кривых.

2. Рассмотрим на плоскости всевозможные пути, соединяющие две данные точки  $A$  и  $B$ . Пусть некоторое тело может двигаться по любому из этих путей, имея в каждой точке  $(x, y)$  определенную скорость  $v(x, y)$ . Мы получим функционал, поставив в соответствие каждому пути то время, за которое рассматриваемое тело проходит этот путь.

3. Пусть  $y = y(x)$  — произвольная, непрерывно дифференцируемая функция, определенная на отрезке  $[a, b]$ . Определим на множестве всех таких функций функционал  $J[y]$  равенством

$$J[y(x)] = \int_a^b \left( \frac{dy(x)}{dx} \right)^2 dx.$$

4. Рассмотрим более общий пример. Пусть  $F(x, y, z)$  — некоторая непрерывная функция трех переменных. Выражение  $J[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx$ , где

$y(x)$  пробегает совокупность всевозможных непрерывно дифференцируемых функций, определенных на отрезке  $[a, b]$ , представляет собой функционал. Выбирая ту или иную функцию  $F$ , мы будем получать различные функционалы, например, если  $F(x, y, z) = \sqrt{1 + z^2}$ , то  $J[y]$  — длина кривой  $y = y(x)$ , а при  $F(x, y, z) = z^2$  получаем предыдущий пример 3.

5. Функционал может выражаться и кратным интегралом. Так, например, функционалом является потенциальная энергия изгибаемой мембраны, занимающей некоторую область  $D$  на плоскости  $Oxy$  в недеформированном состоянии ( $T$  — натяжение мембраны,  $q(x, y)$  — заданная поперечная нагрузка):

$$U[u(x, y)] = \iint_D \left\{ \frac{T}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - q(x, y)u(x, y) \right\} dx dy.$$

Основной задачей вариационного исчисления является разыскание наибольших и наименьших значений функционалов от линий и поверхностей, выражаемых некоторыми определенными интегралами.

Эта задача аналогична задаче дифференциального исчисления об отыскании наибольших и наименьших значений некоторой функции, которая непо-

\* Кривые, имеющие конечную длину, принято называть спрямляемыми.

средственно связана с задачей разыскания экстремумов функции, а именно разыскиваются такие значения независимых переменных, при которых функция принимает наибольшее или наименьшее значение по сравнению со всеми достаточно близкими значениями.

Аналогичным образом мы будем рассматривать задачу и для функционалов. Если функционал для некоторой линии или поверхности имеет значение не меньшее (или не большее), чем для всех близких к ней линий или поверхностей, то говорят, что для этой линии или поверхности функционал имеет экстремум.

Мы знаем, что для нахождения тех значений  $x$ , при которых функция  $f(x)$  достигает экстремума, нам необходимо решить уравнение  $f'(x) = 0$ . В вариационном исчислении доказывается, что линия  $y = y(x)$  или поверхность  $z = z(x, y)$ , дающая экстремум некоторому функционалу, должна удовлетворять некоторому дифференциальному уравнению. Удовлетворение этому уравнению представляет собой необходимое условие экстремума функционала, совершенно так же, как равенство  $f'(x) = 0$  является необходимым условием того, чтобы заданная функция  $f(x)$  имела экстремум при некотором значении  $x$ .

### НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛА, ЗАДАННОГО ОПРЕДЕЛЕННЫМ ИНТЕГРАЛОМ

Рассмотрим случай, когда интеграл содержит производные искомой функции:

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx, \quad (7.1)$$

где  $F$  — заданная функция. Мы будем считать ее непрерывной вместе с производными  $n$ -го порядка в некоторой области.

В вариационном исчислении доказывается, что функция  $y = y(x)$ , дающая экстремум интегралу (7.1), должна удовлетворять дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0. \quad (7.2)$$

Это дифференциальное уравнение порядка  $2n$ . Его общий интеграл содержит  $2n$  произвольных постоянных, и мы должны иметь еще  $2n$  предельных условий. В простейшем случае эти условия сводятся к заданию функции и ее производных до порядка  $(n - 1)$  на концах промежутка  $[x_0, x_1]$ .

Мы считаем, что искомая функция  $y(x)$  имеет непрерывные производные порядка  $2n$ , т. е. принадлежит классу  $C^{(2n)}$ .

Частным случаем является простейший функционал:

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx, \quad (7.3)$$

где  $F$  — заданная функция трех аргументов, непрерывная вместе с производными второго порядка в некоторой области. Функционал (7.3) получает опре-

деленное численное значение, если мы фиксируем функцию  $y = y(x)$ , или, что то же, кривую  $y = y(x)$ , которую всегда считаем лежащей внутри указанной области.

Значения функции  $y(x)$  на концах промежутка интегрирования заданы:

$$y(x_0) = y_0; \quad y(x_1) = y_1. \quad (7.4)$$

Будем считать, что искомая функция  $y(x)$  имеет непрерывную производную в  $[x_0, x_1]$ , т. е.  $y(x) \in C^{(1)}([x_0, x_1])$ .

Функция  $y = y(x)$ , дающая экстремум интегралу (7.3), должна удовлетворять дифференциальному уравнению (частный случай уравнения (7.2)):

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \quad (7.5)$$

Можно показать [26], что если вдоль исследуемой линии  $y = y(x)$  производная  $\partial^2 F / \partial y'^2 \neq 0$ , то функция  $y = y(x)$  имеет непрерывную вторую производную  $y''$  и тем самым уравнение (7.5) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (7.6)$$

Уравнение (7.5) было дано Л. Эйлером и называется обычно *уравнением Эйлера* данной задачи. Уравнение (7.6) представляет собой уравнение второго порядка, и его общий интеграл содержит две произвольные постоянные, которые определяются из двух предельных условий (7.4).

Интегральные кривые уравнения Эйлера называются *экстремальями*. Таким образом, экстремаль — это та кривая, на которой *может* достигаться экстремум функционала (7.3). Так как уравнение Эйлера дополняется не начальными, а граничными условиями, то теорема Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения здесь неприменима. Иными словами, экстремаль не обязательно существует, а если существует, то не обязательно единственна. Все зависит от вида уравнения Эйлера (7.5) и разрешимости системы уравнений для граничных условий (7.4).

Уравнение (7.5) дает необходимое, но, вообще говоря, недостаточное условие экстремума. Для того чтобы выяснить, есть экстремум или нет, необходимо дополнительное исследование.

В ряде случаев, однако, уже одно уравнение Эйлера дает исчерпывающее решение задачи. Действительно, часто само существование экстремума бывает ясно из физического или геометрического смысла. Если при этом существует лишь единственная экстремаль, удовлетворяющая граничным условиям задачи, то именно она и будет непременно той кривой, которая реализует искомый экстремум.

#### **ПРИМЕР. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ БАЛКИ**

Рассмотрим решение задачи об изгибе прямолинейного стержня, сформулированной выше. Будем считать, что концы стержня жестко заземлены и стержень в недеформированном состоянии занимает отрезок  $[0, l]$  оси  $Ox$ . В положении равновесия стержень принимает такую форму, что его потенциальная

энергия минимальна. Таким образом, мы приходим к следующей вариационной задаче: найти функцию  $y = y(x)$  (прогиб стержня) такую, что

$$U[y(x)] = \int_0^l \left[ \frac{EJ}{2} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 - q(x)y(x) \right] dx, \quad y(x) \in C^{(2)},$$

$$U[y(x)] \rightarrow \min,$$

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0,$$

где  $E$  — модуль Юнга;  $J$  — момент инерции поперечного сечения стержня;  $q(x)$  — заданная поперечная нагрузка.

В рассматриваемом случае подынтегральная функция:

$$F = \frac{EJ}{2} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 - q(x)y(x),$$

и, следовательно, уравнение Эйлера (7.2) имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial y''} \right) = 0.$$

Вычисляя производные, входящие в уравнение Эйлера, получим

$$-q(x) + \frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = q(x).$$

В частном случае стержня постоянной жесткости  $EJ = \text{const}$  последнее уравнение принимает вид

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x).$$

Это линейное уравнение — известное уравнение изгиба балки; оно легко интегрируется. Общее решение этого уравнения может быть записано в виде

$$EJy(x) = A + Bx + C \frac{x^2}{2} + D \frac{x^3}{6} + \int_0^x q(\xi) \frac{(x-\xi)^3}{6} d\xi. \quad (7.7)$$

Такая форма представления решения была дана еще Л. Эйлером в 1778 г. Формула (7.7) легко может быть получена методом Лагранжа вариации произвольных постоянных. Представление общего интеграла основного уравнения изгиба балок в виде (7.7) вносит значительное упрощение в расчеты, придает единообразную форму этим расчетам, применимую во всех случаях, причем нет необходимости прибегать ни к теореме трех моментов, ни к началу наименьшей работы, когда имеет место многократная статическая неопределенность.

Постоянные  $A, B, C$  и  $D$  легко находятся из граничных условий, причем две из них почти всегда равны нулю. Дело в том, что эти постоянные имеют вполне определенный физический смысл:

$$A = EJy(0), \quad B = EJy'(0), \quad C = EJy''(0), \quad D = EJy'''(0).$$

Поэтому, например, в случае заземленных концов балки мы имеем  $A = 0, B = 0$ , и остается определить только две константы  $C$  и  $D$  из граничных условий  $y(l) = 0, y'(l) = 0$  на другом конце балки.

### НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛА, ЗАДАННОГО КРАТНЫМ ИНТЕГРАЛОМ

Приведем теперь необходимое условие экстремума для кратного интеграла. Впервые это условие было указано М. В. Остроградским. Станем рассматривать двойной интеграл:

$$J[u(x, y)] = \iint_B F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy, \quad (7.8)$$

где  $u_x \equiv \partial u / \partial x, u_y \equiv \partial u / \partial y$  — частные производные функции  $u(x, y)$ , а  $B$  — некоторая конечная область плоскости  $Oxy$ . Будем считать, что функция  $F(x, y, u, p, q)$  имеет непрерывные производные до второго порядка, если точка  $(x, y, u)$  находится внутри некоторой трехмерной области  $D$ , а  $p$  и  $q$  — любые ( $p = u_x, q = u_y$ ). Будем искать поверхность  $u = u(x, y)$ , лежащую внутри  $D$ , с границей  $\lambda$ , однозначно проектирующуюся на плоскость  $Oxy$  в виде области  $B$  с границей  $\Gamma$ , дающую экстремум функционалу (7.8). Иными словами, ищется функция  $u(x, y)$  в области  $B$ , дающая экстремум функционалу (7.8) и принимающая заданные значения на  $\Gamma$ :

$$u|_{\Gamma} = f(P).$$

Необходимое условие экстремума функционала (7.8), так называемое уравнение Остроградского — Эйлера, имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) = 0. \quad (7.9)$$

Таким образом, искомая функции  $u(x, y)$ , дающая экстремум функционалу (7.8), должна удовлетворять уравнению Остроградского — Эйлера.

Уравнение (7.9) — дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных, которое должно быть удовлетворено внутри области  $B$ . Граничным условием является задание функции  $u$  на контуре  $\Gamma$ .

В случае тройного интеграла и функции  $u(x, y, z)$ , зависящей от трех независимых переменных, получается уравнение следующего вида:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F}{\partial u_z} \right) = 0.$$

Если под знак интеграла входят производные функции  $u(x, y)$  до порядка  $n$ , то уравнение Остроградского — Эйлера будет иметь вид

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F}{\partial u_z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{xy}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{yy}} \right) + \dots + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial y^n} \left( \frac{\partial F}{\partial u_{yy\dots y}} \right) = 0.$$

**ПРИМЕР.  
СВЯЗЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ С ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕЙ**

Рассмотрим следующую вариационную задачу: найти функцию  $u(x, y)$ , доставляющую минимум функционалу

$$J[u(x, y)] = \frac{1}{2} \iint_B \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (7.10)$$

и принимающую заданные значения на границе  $\Gamma$

$$u|_{\Gamma} = f(P).$$

Составим соответствующее уравнение Остроградского — Эйлера. Имеем

$$F = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right], \quad \frac{\partial F}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u_x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial u_y} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Следовательно, уравнение Остроградского — Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Таким образом, необходимым условием экстремума функционала (7.10) является условие, чтобы функция  $u(x, y)$  была решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u|_{\Gamma} = f(P).$$

Покажем достаточность этого условия. Пусть  $u = u(x, y)$  — решение задачи. Будем предполагать, что функция  $u(x, y)$  имеет непрерывные производные до второго порядка в области  $B$ , т. е.  $u \in C^{(2)}$ . Образует функцию сравнения

$$\bar{u} = \bar{u}(x, y) = u(x, y) + \varepsilon \eta(x, y),$$

причем  $\eta(x, y) \in C^{(2)}$ ,  $\eta|_{\Gamma} = 0$ . Тогда

$$\bar{u}(x, y) \in C^{(2)}, \quad \bar{u}|_{\Gamma} = f(P).$$

Образует разность  $J[\bar{u}] - J[u]$ :

$$\begin{aligned} J[\bar{u}] - J[u] &= \frac{1}{2} \iint_B [(u_x + \varepsilon \eta_x)^2 + (u_y + \varepsilon \eta_y)^2 - u_x^2 - u_y^2] dx dy = \\ &= \varepsilon \iint_B [u_x \eta_x + u_y \eta_y] dx dy + \frac{\varepsilon^2}{2} \iint_B [\eta_x^2 + \eta_y^2] dx dy = \\ &= \varepsilon \iint_B \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u_x \eta) + \frac{\partial}{\partial y} (u_y \eta) \right] dx dy - \varepsilon \underbrace{\iint_B [u_{xx} + u_{yy}] \eta dx dy}_{=0} + \frac{\varepsilon^2}{2} \iint_B [\eta_x^2 + \eta_y^2] dx dy = \\ &= \varepsilon \int_{\Gamma} (u_x dy - u_y dx) + \frac{\varepsilon^2}{2} \iint_B [\eta_x^2 + \eta_y^2] dx dy = \frac{\varepsilon^2}{2} \iint_B [\eta_x^2 + \eta_y^2] dx dy > 0, \end{aligned}$$

т. е. мы действительно имеем минимум.

Видим, что краевые задачи для дифференциальных уравнений можно сводить к вариационным задачам, если существуют независимые методы решения последних.

Обобщением рассмотренной вариационной задачи на случай многих независимых переменных является следующая задача. Пусть

$$J[u(x)] = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx, \quad u|_{\Gamma} = g(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Дифференциальное уравнение Остроградского — Эйлера для этого функционала, как нетрудно проверить, имеет вид

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0$$

или короче  $\Delta u = 0$ . Это уравнение надо интегрировать при граничных условиях  $u|_{\Gamma} = g(x)$ .

Пусть теперь

$$J[u(x)] = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 - 2f(x)u(x) \right] dx, \quad u|_{\Gamma} = 0, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Как нетрудно проверить, в этом случае уравнение Остроградского — Эйлера приводится к виду  $\Delta u = -f(x)$ ; его нужно интегрировать при граничном условии  $u|_{\Gamma} = 0$ .

## 7.2. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ

### СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Будем предполагать, что рассматриваемые функции непрерывны в замкнутой области  $\bar{\Omega} = \Omega + S$ .

Скалярным произведением двух функций относительно данной области называется интеграл

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(P)v(P)d\Omega, \quad P \in \Omega.$$



Область  $\Omega$  может быть одномерной, двумерной, трехмерной и, вообще,  $m$ -мерной. Соответствующий интеграл будет  $m$ -кратным.

Отметим некоторые свойства скалярного произведения:

- 1)  $(u, v) = (v, u)$ ;
- 2)  $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$ ;
- 3)  $(au, v) = a(u, v)$ ,  $a = \text{const}$ ;
- 4)  $(u, u) \geq 0$ , причем  $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ .

Скалярное произведение функций очень похоже на хорошо известное из векторного исчисления скалярное произведение векторов, которое, очевидно, обладает всеми свойствами 1)–4).

Введем еще одно понятие, аналогичное понятию длины вектора. А именно назовем *нормой* функции арифметический квадратный корень из скалярного произведения этой функции самой на себя:

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}$$

или

$$\|u\| = \sqrt{\int_{\Omega} u^2(P) d\Omega}.$$

Отметим также основные свойства нормы:

- 1)  $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u \equiv 0$ ;
- 2)  $\|au\| = |a| \cdot \|u\|$ ,  $a = \text{const}$ ;
- 3)  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  — неравенство треугольника;
- 4)  $|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ .

Последнее неравенство — неравенство Коши — Буняковского. В развернутом виде оно выглядит так:

$$\left( \int_{\Omega} u(P)v(P) d\Omega \right)^2 \leq \int_{\Omega} u^2(P) d\Omega \cdot \int_{\Omega} v^2(P) d\Omega.$$

## ПОНЯТИЕ ОБ ОПЕРАТОРЕ

Будем говорить, что на некотором множестве функций определен *оператор*, если задан закон, в силу которого каждой функции данного множества поставлена в соответствие одна и только одна функция.

Говорят, что оператор действует на функции того множества, на котором он определен. Это множество называется областью определения оператора, а функции, которые оператор приводит в соответствие функциям из своей области определения, называются значениями оператора. Множество всех значений оператора называется его областью значений.

Оператор будем обозначать так:  $A$  или  $Au$ , где  $u = u(P)$  — функция из области определения оператора. Область определения оператора  $A$  будем обозначать  $D_A$ , а его область значений — символом  $R_A$ .

Одним из важнейших операторов математической физики является оператор Лапласа; в случае пространства  $m$  измерений с декартовыми координатами  $x_1, x_2, \dots, x_m$  оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta u = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Область определения оператора Лапласа — множество дважды дифференцируемых функций. В ряде случаев целесообразно рассматривать оператор Лапласа в более узкой области. Так, если для уравнения Пуассона:

$$\Delta u = f(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

мы ищем решение, которое удовлетворяет краевому условию:

$$u|_S = 0,$$

то целесообразно с самого начала рассматривать оператор  $\Delta$  не на всевозможных дважды дифференцируемых функциях, а только на тех, которые обращаются в нуль на границе  $S$  области.

Оператор  $A$  называется *дистрибутивным*, если для любой конечной совокупности  $u_k \in D_A$  и любого числового набора  $c_k$  будет выполнено равенство

$$A(c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_m u_m) = c_1 A u_1 + c_2 A u_2 + \dots + c_m A u_m.$$

Оператор  $A$ , заданный на  $D_A$ , называется *непрерывным* в точке  $u_0 \in D_A$ , если из условия  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_0$  будет следовать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} A u_n = A u_0$ .

Оператор  $A$  называется *ограниченным*, если существует константа  $c$  такая, что  $\forall u \in D_A$  и будет выполняться неравенство  $\|A u\| \leq c \|u\|$ .

Дистрибутивный и ограниченный оператор называется *линейным*.

### СИММЕТРИЧНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Линейный оператор называется *симметричным*, если для любых двух функций  $u, v \in D_A$  справедливо тождество

$$(A u, v) = (u, A v).$$

Рассмотрим пример — одномерный оператор Лапласа, взятый с обратным знаком. На этом примере демонстрируется важность включения тех или иных дополнительных условий в область определения оператора.

Пусть  $\Omega$  — отрезок  $a < x < b$  и оператор  $A$ :

$$A u = -\frac{d^2 u}{dx^2}.$$

Пусть область определения  $D_A$  этого оператора образуют всевозможные функции, непрерывные на  $[a, b]$  и имеющие там непрерывную первую и вторую производные. Оператор  $A$  несимметричен. Действительно,

$$(A u, v) - (u, A v) = -\int_a^b \left( v \frac{d^2 u}{dx^2} - u \frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx.$$

Нетрудно проверить, что

$$v \frac{d^2 u}{dx^2} - u \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right),$$

а тогда

$$(Au, v) - (u, Av) = -(vu' - uv')\Big|_a^b.$$

В общем случае правая часть последнего равенства отлична от нуля. Например, если  $u = x - a$ ,  $v = (x - a)(x - b)$ , то  $(vu' - uv')\Big|_a^b = -(b - a)^2$ . Таким образом,

$$(Au, v) \neq (u, Av).$$

Если же включить в область определения оператора  $A$  дополнительные условия, например условия первого или второго или третьего рода, то оператор становится симметричным. Действительно, если в область определения оператора включены условия первого рода, т. е. допустим, что эта область содержит дважды дифференцируемые функции, которые обращаются в нуль при  $x = a$  и  $x = b$ . Если  $u \in D_A$  и  $v \in D_A$ , то

$$u(a) = u(b) = 0, \quad v(a) = v(b) = 0$$

и тогда

$$(Au, v) - (u, Av) = -(vu' - uv')\Big|_a^b = 0 \Rightarrow (Au, v) = (u, Av),$$

т. е. оператор  $A$  симметричен.

Если в область определения оператора включены условия второго рода, т. е. допустим, что эта область содержит дважды дифференцируемые функции  $u \in D_A$ ,  $v \in D_A$  и такие, что

$$u'(a) = u'(b) = 0, \quad v'(a) = v'(b) = 0,$$

тогда

$$(Au, v) - (u, Av) = -(vu' - uv')\Big|_a^b = 0 \Rightarrow (Au, v) = (u, Av),$$

т. е. оператор  $A$  симметричен.

Пусть, наконец, область определения  $D_A$  составляют дважды дифференцируемые функции, подчиненные граничным условиям:

$$u'(a) + \alpha u(a) = 0; \quad u'(b) + \beta u(b) = 0,$$

где  $\alpha, \beta$  — заданные числа. Пусть  $u \in D_A$ ,  $v \in D_A$ . Имеем

$$(Au, v) - (u, Av) = -(vu' - uv')\Big|_a^b = [u(b)v'(b) - v(b)u'(b)] - [u(a)v'(a) - v(a)u'(a)].$$

Каждая скобка справа в последнем равенстве равна нулю. Действительно, выпишем второе граничное условие для функций  $u$  и  $v$ , умножим каждую строчку на указанное справа от уравнений число и вычтем из второй строки первую:

$$\begin{array}{l} u'(b) + \beta u(b) = 0 \\ v'(b) + \beta v(b) = 0 \end{array} \times \begin{array}{l} v(b) \\ u(b) \end{array} \Rightarrow u(b)v'(b) - v(b)u'(b) = 0.$$

Аналогично устанавливаем, что  $u(a)v'(a) - v(a)u'(a) = 0$ . Следовательно,  $(Au, v) = (u, Av)$ . Таким образом, симметричность оператора  $A$  установлена.

## ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Симметричный оператор  $A$  называется *положительным*, если для любой функции  $u(P)$  из его области определения имеет место неравенство

$$(Au, u) \geq 0,$$

причем равенство  $(Au, u) = 0$  возможно только тогда, когда  $u(P) \equiv 0$ .

В качестве примера снова рассмотрим симметричный оператор  $A$ :

$$Au = -\frac{d^2u}{dx^2},$$

причем функции  $u(x)$  подчинены краевым условиям первого рода:  $u(a) = u(b) = 0$ .

Область  $\Omega$  в данном примере есть отрезок  $a < x < b$ . Составим скалярное произведение:

$$(Au, u) = -\int_a^b u \frac{d^2u}{dx^2} dx.$$

Интегрируя по частям, имеем (с учетом граничных условий):

$$(Au, u) = -u \frac{du}{dx} \Big|_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx = \int_a^b \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx \geq 0.$$

Пусть теперь  $(Au, u) = 0$ . Это значит, что

$$\int_a^b \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 0 \Rightarrow u = \text{const}.$$

В силу непрерывности и с учетом краевых условий тогда получаем, что  $u \equiv 0$ . Следовательно, оператор  $A$  положителен.

Пусть теперь в область определения оператора  $A$  включены функции  $u(x)$ , дважды дифференцируемые и удовлетворяющие условиям:

$$u'(a) + \alpha u(a) = 0; \quad u'(b) + \beta u(b) = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} (Au, u) &= -\int_a^b u \frac{d^2u}{dx^2} dx = \int_a^b \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx - u \frac{du}{dx} \Big|_{x=a}^{x=b} = \\ &= \int_a^b \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx - u(b) \frac{du}{dx} \Big|_{x=b} + u(a) \frac{du}{dx} \Big|_{x=a}. \end{aligned}$$

Исключая производные с помощью граничных условий, получаем

$$(Au, u) = \int_a^b \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx + \beta u^2(b) - \alpha u^2(a).$$

При произвольных числах  $\alpha$  и  $\beta$  нельзя судить о положительности оператора  $A$ . Можно, однако, указать для этого простые достаточные условия: оператор  $A$  положителен, если  $\alpha \leq 0$ ,  $\beta \geq 0$ , причем хотя бы одна из постоянных  $\alpha$  или  $\beta$  отлична от нуля.

Действительно, пусть, например,  $\beta \geq 0$  и  $\alpha = -\gamma$ , где  $\gamma > 0$ . Тогда

$$(Au, u) = \int_a^b \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx + \beta u^2(b) + \gamma u^2(a) \geq 0.$$

Если  $(Au, u) = 0$ , то  $u(a) = 0$ ,  $u(b) = 0$ ,  $\frac{du}{dx} = 0 \Rightarrow u \equiv 0$ .

Если обе постоянные  $\alpha$ ,  $\beta$  равны нулю (условия второго рода), то оператор  $A$  не положителен. Действительно, в этом случае краевые условия принимают вид:

$$u'(a) = 0; \quad u'(b) = 0.$$

Кроме того,

$$(Au, u) = \int_a^b \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx.$$

Функция  $u \equiv 1$  удовлетворяет краевым условиям и потому принадлежит области определения оператора  $A$ , при этом  $(Au, u) = 0$ .

Рассмотрим еще один пример. Пусть  $\Delta$  — оператор Лапласа. Областью определения оператора будем считать множество дважды дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию Дирихле:

$$u|_S = 0,$$

где  $S$  — граница области  $\Omega$ , в которой функция  $u$  определена. Докажем, что при так выбранной области определения оператор  $(-\Delta)$  положителен. Действительно, имеем

$$(-\Delta u, u) = - \int_{\Omega} u \Delta u d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega - \int_S u \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$$

Здесь мы воспользовались формулой Грина (1.3) для оператора Лапласа. В силу условия Дирихле интеграл по поверхности исчезает и

$$(-\Delta u, u) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega \geq 0.$$

При этом если  $(-\Delta u, u) = 0$ , то необходимо  $\frac{\partial u}{\partial x_i} \equiv 0$  но тогда, очевидно,  $u = \text{const}$  и в силу краевого условия Дирихле  $u \equiv 0$ .

Интересно выяснить физический смысл понятия положительного оператора. Для этого рассмотрим закрепленную по контуру мембрану, изогнутую под действием некоторой стационарной поперечной нагрузки. Пусть в ненагружен-

ном состоянии мембрана занимает область  $\Omega$  в плоскости  $(x, y)$  и пусть  $u(x, y)$  означает прогиб мембраны. Через  $T$  обозначим натяжение мембраны, а через  $q$  — поперечную нагрузку, рассчитанную на единицу площади. Как известно\*, стационарный прогиб мембраны удовлетворяет дифференциальному уравнению Пуассона:

$$-\Delta u = \frac{q}{T}.$$

То обстоятельство, что мембрана закреплена по контуру, выражается краевым условием Дирихле  $u|_S = 0$  на контуре  $S$  мембраны.

С другой стороны, в данном случае выражение

$$\Pi = \frac{T}{2} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \frac{T}{2} (-\Delta u, u)$$

определяет потенциальную энергию деформации изогнутой мембраны. Теперь ясно, что в задаче об изгибе мембраны положительность оператора  $(-\Delta)$  выражает тот физически очевидный факт, что потенциальная энергия деформации мембраны, изогнутой как угодно, положительна, иначе говоря, что невозможно изогнуть мембрану, не затратив на это энергии.

Многочисленные примеры показывают следующее. Пусть некоторая физическая система под действием внешней причины, характеризуемой некоторой функцией  $f(P)$ , приобретает смещение  $u(P)$  и пусть эти две функции связаны уравнением

$$Au = f,$$

где  $A$  — положительный оператор. Часто оказывается, что величина  $(Au, u)$  пропорциональна энергии, которую необходимо затратить, чтобы сообщить системе смещение  $u(P)$ . Таким образом, положительность оператора означает, что невозможно сообщить системе никакого смещения, не затратив для этого некоторой энергии.

Если оператор  $A$  положителен, то, имея в виду только что указанный физический смысл величины  $(Au, u)$ , эту величину называют *энергией функции*  $u \in D_A$ .

Симметричный оператор  $A$  называется *положительно определенным*, если для любой функции  $u \in D_A$  справедливо неравенство

$$(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2,$$

где  $\gamma$  — положительная постоянная.

Очевидно, всякий положительно определенный оператор в то же время и положителен. Обратное заключение, вообще говоря, неверно.

Дадим теперь физическую интерпретацию понятия положительной определенности оператора. Будем оценивать величину смещения, которое испыта-

---

\* Уравнение равновесия мембраны получается из уравнения колебаний (2.8), если считать, что прогиб не зависит от времени.

ла физическая система, его нормой, полагая смещение «большим», если велика норма, и «малым», если норма мала. При такой оценке мы, очевидно, не учитываем даже относительно больших «местных» смещений, если они мало влияют на норму. Неравенство  $(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2$  означает, что системе, для которой соответствующий оператор положительно определенный, можно сообщить большое смещение, только затратив достаточно большую энергию.

Если же оператор положительный, но не положительно определенный, то системе можно сообщить сколь угодно большое смещение, затратив сколь угодно малую энергию.

### 7.3. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Под *прямыми методами* приближенного решения задач математической физики понимают такие методы, которые сводят эти задачи к конечным системам алгебраических уравнений\*. Во многих случаях краевую задачу для дифференциального уравнения можно заменить равносильной задачей об отыскании функции, доставляющей некоторому интегралу наименьшее значение. Задачи такого типа называются *вариационными*, а методы, позволяющие свести задачу об интегрировании дифференциального уравнения к равносильной вариационной задаче, называются *вариационными методами*.

Широкое развитие в математической физике получили методы, которые обходят применение дифференциальных уравнений. В основе этих методов лежит идея построить искомую функцию, дающую экстремум функционала, при помощи некоторого предельного процесса, исходя непосредственно из вида того интеграла, экстремум которого ищется.

Данная задача представляется гораздо более трудной, чем соответствующая задача на экстремум функции из дифференциального исчисления. В последнем случае согласно теореме Вейерштрасса о непрерывных функциях мы знаем, что всякая функция, непрерывная в замкнутой области, принимает в некоторой точке этой области свое наибольшее или наименьшее значение. В случае задач вариационного исчисления мы уже не имеем такой теоремы, и таким образом, ставится под вопрос само существование решения задачи.

Пусть  $J[y(x)]$  есть некоторый функционал от искомой функции  $y(x)$  (переменная  $x$  может быть многомерной, например,  $n$ -мерной  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  точкой), и мы ищем эту функцию так, чтобы функционал  $J$  имел наименьшее значение в некотором классе  $D$  функций  $y(x)$ . При любом выборе функции  $y(x)$  из класса  $D$  функционал  $J$  получает определенное значение. Используя все функции класса  $D$ , мы получим, таким образом, бесчисленное множество чисел — значений функционала  $J$ . Пусть  $d$  — точная нижняя граница этого множества чисел. Мы не знаем заранее, существует ли в классе  $D$  функция  $y(x)$ , которая дает нашему функционалу это наименьшее значение  $d$ . Но в силу определения точной нижней границы числового множества мы можем, во всяком случае, найти такую последовательность  $y_n(x)$  функций из класса  $D$ , что числа  $J[y_n(x)]$

---

\* Такое определение дает в своей книге [22] С. Г. Михлин, ссылаясь на С. Л. Соболева.

имеют своим пределом  $d$  при неограниченном возрастании  $n$ . Последовательность функций  $y_n(x)$  называется обычно *минимизирующей последовательностью* [22].

Одной из возможностей осуществления прямых методов вариационного исчисления является следующий прием: дается способ построения минимизирующих последовательностей с таким расчетом, чтобы из построенной минимизирующей последовательности путем некоторого предельного перехода получалась бы искомая функция, дающая наименьшее значение нашему функционалу. Если удастся довести таким путем задачу до конца, то этот прием приводит к решению краевой задачи для дифференциального уравнения, которое выражает необходимое условие экстремума исследуемого функционала. Такой метод применим не только для доказательства существования решения, но и для построения практически удобного способа его приближенного вычисления. На этом принципе основан метод Ритца решения вариационных задач. Обобщение метода Ритца на случай дифференциальных уравнений, не связанных с вариационным исчислением, было дано И. Г. Бубновым и детально разработано Б. Г. Галёркиным. Исследование сходимости методов Ритца и Бубнова — Галёркина и вопрос об оценке погрешности содержатся в книге Л. В. Канторовича и В. И. Крылова [14], а также в упомянутой выше книге С. Г. Михлина [22]. Теоретическое обоснование прямых методов в связи с теоремами существования соответствующих экстремальных функций и исследованием их свойств изложено в монографии С. Л. Соболева [28].

#### ТЕОРЕМА О МИНИМАЛЬНОМ ФУНКЦИОНАЛЕ

Нашей основной задачей является решение дифференциальных уравнений при соответствующих условиях. Станем рассматривать уравнение

$$Au = f(P), \quad (7.11)$$

где  $A$  — оператор, определенный на множестве  $D_A$  функций, удовлетворяющих краевым условиям;  $f(P)$  — заданная функция, имеющая конечную норму. Будем предполагать, что оператор  $A$  положительный.

**Теорема 1.** Если оператор  $A$  положителен, то уравнение (7.11) не может иметь более одного решения.

*Доказательство.* Пусть уравнение имеет два решения  $u_1$  и  $u_2$ , так что  $Au_1 = f$  и  $Au_2 = f$ . Положим  $\tilde{u} = u_1 - u_2$ . Тогда, пользуясь линейностью оператора  $A$ , будем иметь  $A\tilde{u} = 0$ . Последнее уравнение умножим скалярно на  $\tilde{u} : (A\tilde{u}, \tilde{u}) = 0$ . Но оператор  $A$  — положительный, поэтому необходимо  $\tilde{u} \equiv 0$  и, следовательно,  $u_1 \equiv u_2$ , что и требовалось доказать.

Отметим, что приводимые в курсах математической физики теоремы единственности решения основных краевых задач для эллиптических уравнений чаще всего суть частные случаи теоремы 1, и доказательства их проводятся по той же схеме.

Справедлива теорема

**Теорема 2 (о минимальном функционале).** Пусть  $A$  — положительный оператор. Если уравнение (7.11) имеет решение, то из всех значений, которые сообщают квадратичному функционалу:



$$F[u(P)] = (Au, u) - 2(u, f) = \int_{\Omega} [u(P)Au(P) - 2u(P)f(P)]d\Omega \quad (7.12)$$

всевозможные функции из области  $D_A$  определения оператора  $A$ , наименьшим является значение, сообщаемое этому функционалу решением уравнения (7.11).

Наоборот, если в области  $D_A$  существует функция, сообщающая функционалу (7.12) минимальное значение, то эта функция есть решение уравнения (7.11).

Выскажем некоторые общие замечания.

1. В ряде задач математической физики величина функционала (7.12) пропорциональна потенциальной энергии рассматриваемого тела. В таких случаях теорема 2 утверждает справедливость принципа минимума потенциальной энергии.

2. Теорема 2 позволяет заменить задачу об интегрировании дифференциального уравнения при заданных краевых условиях задачей об отыскании функции, реализующей минимум функционала (7.12).

Метод решения задач математической физики, который состоит в том, что интегрирование дифференциального уравнения при заданных условиях заменяется отысканием функции, реализующей минимум функционала (7.12), называется *вариационным* или *энергетическим* методом.

### МИНИМИЗИРУЮЩАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И ЕЕ СХОДИМОСТЬ

Пусть  $\Phi[u]$  — некоторый функционал, значения которого ограничены снизу. Тогда существует точная нижняя граница  $d$  функционала  $\Phi[u]$ :

$$d = \inf \Phi[u].$$

Последовательность функций  $u_n(p)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , принадлежащих области определения функционала  $\Phi[u]$ , называется *минимизирующей* для этого функционала, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi[u_n] = d.$$

Пусть  $A$  — положительный оператор. Рассмотрим уравнение (7.11):

$$Au = f(P)$$

и пусть  $u_0(P)$  — решение этого уравнения. Рассмотрим функционал

$$F[u] = (Au, u) - 2(u, f).$$

Нетрудно доказать, что для функционала  $F[u]$  минимизирующая последовательность характеризуется равенством

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F[u_n] = -(u_0, f).$$

Справедлива следующая **теорема**: если уравнение (7.11) имеет решение  $u_0(P)$ , то всякая последовательность  $\{u_n(P)\}$ , минимизирующая для функционала (7.12), удовлетворяет условию  $\lim_{n \rightarrow \infty} (A(u_n - u_0), (u_n - u_0)) = 0$ . В этом случае говорят, что последовательность  $\{u_n(P)\}$  сходится по энергии к этому решению.

## МЕТОД РИТЦА

Метод Ритца представляет собой один из методов построения минимизирующей последовательности. Мы знаем, что решение уравнения (7.11):

$$Au = f(P),$$

где  $A$  — положительный оператор, сводится к нахождению минимума функционала

$$F[u] = (Au, u) - 2(u, f).$$

Эту последнюю задачу будем приближенно решать следующим образом. Выберем последовательность функций

$$\varphi_1(P), \varphi_2(P), \dots, \varphi_n(P), \dots, \quad (7.13)$$

принадлежащих области определения оператора  $A$ . Подчиним эти функции двум условиям:

- 1) последовательность (7.13) полна по энергии\*;
- 2) для любого  $n$  функции  $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \dots, \varphi_n(P)$  линейно независимы. Функции (7.13) называют *координатными*, или *базисными функциями*. Возьмем линейную комбинацию первых  $n$  координатных функций:

$$u_n(P) = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(P), \quad (7.14)$$

где  $a_j$  — произвольные числа.

Подставим (7.14) вместо  $u(P)$  в функционал (7.12); это превратит функционал  $F[u(P)]$  в функцию  $n$  независимых переменных  $a_1, a_2, \dots, a_n$ :

$$F[u_n] = \left( \sum_{j=1}^n a_j A\varphi_j, \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j \right) - 2 \left( \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j, f \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (A\varphi_j, \varphi_k) a_j a_k - 2 \sum_{j=1}^n (\varphi_j, f) a_j. \quad (7.15)$$

Выберем коэффициенты  $a_j$  так, чтобы функция (7.15) приняла минимальное значение. Необходимые условия минимума функции (7.15), как известно, такие:

$$\frac{\partial F[u_n]}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.16)$$

Отметим, что, используя положительность оператора  $A$ , можно доказать, что коэффициенты  $a_j$ , удовлетворяющие системе (7.16), реализуют минимум величины  $F[u_n]$ .

---

\* Система функций  $\varphi_n(P) \in D_A$  называется *полной по энергии по отношению к данному классу функций из  $D_A$* , если каковы бы ни были число  $\varepsilon > 0$  и функция  $u(P)$  из данного класса, можно указать такое натуральное число  $N$  и такие постоянные числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ , что выполняется

$$\text{неравенство} \quad \left( A \left( u - \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k \right), u - \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k \right) < \varepsilon.$$

Получим явно систему (7.16), для этого вычислим производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial F[u_n]}{\partial a_i} &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (A\varphi_j, \varphi_k) \left[ \frac{da_j}{da_i} a_k + a_j \frac{da_k}{da_i} \right] - 2 \sum_{j=1}^n (\varphi_j, f) \frac{da_j}{da_i} = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (A\varphi_j, \varphi_k) [\delta_{ji} a_k + a_j \delta_{ki}] - 2 \sum_{j=1}^n (\varphi_j, f) \delta_{ji}, \end{aligned}$$

где  $\delta_{ji} = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$  — символ Кронекера.

Таким образом, будем иметь

$$\frac{\partial F[u_n]}{\partial a_i} = \sum_{k=1}^n (A\varphi_i, \varphi_k) a_k + \sum_{j=1}^n (A\varphi_j, \varphi_i) a_j - 2(\varphi_i, f) = 2 \sum_{k=1}^n (A\varphi_i, \varphi_k) a_k - 2(\varphi_i, f).$$

Здесь мы учли, что положительный оператор  $A$  симметричен, т. е.  $(A\varphi_j, \varphi_i) = (A\varphi_i, \varphi_j)$ , и заменили индекс суммирования во второй сумме справа с  $j$  на  $k$ .

Приравняв полученные производные к нулю, получим систему уравнений Ритца:

$$\sum_{k=1}^n (A\varphi_i, \varphi_k) a_k = (\varphi_i, f), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.17)$$

Определитель системы (7.17) есть так называемый определитель Грамма линейно независимых функций, поэтому он отличен от нуля [22]. Отсюда следует, что система (7.17) всегда разрешима, если оператор  $A$  — положительный. Найдя коэффициенты  $a_k$  из системы (7.17) и подставив их в (7.14), получим функцию  $u_n(P)$ , которую называют приближенным решением уравнения (7.11) по Ритцу.

Справедлива **теорема**: приближенные решения уравнения (7.11) по Ритцу образуют минимизирующую последовательность для функционала (7.12), если только уравнение (7.11) имеет решение с конечной энергией.

Следовательно, приближенные решения по Ритцу сходятся по энергии к точному решению. Они сходятся к точному решению и в среднем, если  $A$  — положительно определенный оператор.

#### МЕТОД БУБНОВА — ГАЛЁРКИНА

Пусть функция  $u(P)$  удовлетворяет в некоторой области  $\Omega$  неоднородному уравнению (7.11):

$$Au = f(P)$$

и некоторым однородным граничным условиям. Здесь мы не будем предполагать положительность оператора  $A$ . Выберем бесконечную последовательность координатных функций:

$$\varphi_1(P), \varphi_2(P), \dots, \varphi_n(P), \dots,$$

которые достаточное число раз (в соответствии с данными задачи) непрерывно дифференцируемы в замкнутой области  $\bar{\Omega} = \Omega + S$ , где  $S$  — граница области  $\Omega$ .

Будем считать, что эти функции удовлетворяют всем краевым условиям задачи. Будем считать также, что как уравнение (7.11), так и краевые условия — линейные.

Составим функцию (7.14):

$$u_n(P) = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(P),$$

где  $a_j$  — произвольные числа.

Эта функция удовлетворяет всем краевым условиям задачи. Подставим теперь (7.14) в (7.11), получим невязку в выполнении уравнения

$$Au_n - f(P) = 0. \quad (7.18)$$

По методу Бубнова — Галёркина коэффициенты  $a_j$  определяются из требования, чтобы левая часть (7.18) была ортогональна функциям  $\varphi_1(P)$ ,  $\varphi_2(P)$ , ...,  $\varphi_n(P)$ . Таким образом, метод Бубнова — Галёркина приводит к системе линейных алгебраических уравнений (7.17) по виду тождественной системе, к которой приводит метод Ритца:

$$\sum_{k=1}^n (A\varphi_i, \varphi_k) a_k = (\varphi_i, f), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Отсюда заключаем, что методы Бубнова — Галёркина и Ритца совпадают, если оператор  $A$  — положительно определенный. В общем же случае метод Ритца неприменим, тогда как метод Бубнова — Галёркина сохраняет силу.

## ФОРМУЛИРОВКИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

### ИЗГИБ БАЛКИ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Уравнение изгиба балки, лежащей на упругом основании (рис. 7.1), имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EJ(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] + Kw = q(x). \quad (7.19)$$

Здесь  $w$  — прогиб балки в сечении с абсциссой  $x$ ;  $J(x)$  — момент инерции этого сечения;  $E$  — модуль Юнга материала балки;  $K$  — коэффициент податливости основания;  $q(x)$  — интенсивность нормальной нагрузки.

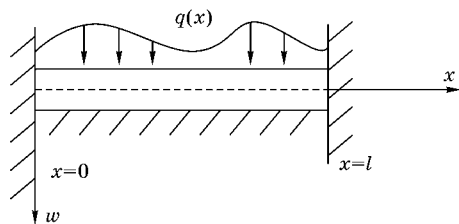


Рис. 7.1

Защемленная балка на упругом основании

Если концы балки жестко закреплены, то должны выполняться условия:

$$w|_{x=0,l} = 0; \quad w'|_{x=0,l} = 0. \quad (7.20)$$

Можно показать [22], что оператор  $A$ , определяемый левой частью уравнения (7.19) и краевыми условиями (7.20), положительно определенный.

Следовательно, задача об изгибе балки, лежащей на упругом основании и имеющей жестко закрепленные концы, сводится к задаче о минимуме функционала

$$F[w] = (Aw, w) - 2(w, q)$$

в классе функций, удовлетворяющих краевым условиям (7.20).

Интегрированием по частям с учетом граничных условий (7.20) функционал  $F[w]$  можно привести к виду

$$F[w] = \int_0^l \left[ EJ(x) \left( \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 + Kw^2(x) - 2q(x)w(x) \right] dx. \quad (7.21)$$

Решение задачи о минимуме функционала (7.21) можно получить методом Ритца. Для этого необходимо выбрать полную по энергии систему координатных функций  $\varphi_n(x)$ , удовлетворяющих условиям (7.20).

Можно показать, что система функций

$$\varphi_n(x) = (l-x)^2 x^{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

полна по энергии. Тогда приближенное решение нашей задачи получим, приняв

$$w_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) = (l-x)^2 \sum_{k=1}^n a_k x^{k+1}.$$

Коэффициенты  $a_k$  определим из системы (7.17), которую запишем так:

$$\sum_{k=1}^n A_{ik} a_k = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь

$$b_i = (q, \varphi_i) = \int_0^l q(x)(l-x)^2 x^{i+1} dx.$$

Коэффициенты матрицы  $A_{ik}$  можно представить в форме

$$A_{ik} = (A\varphi_i, \varphi_k) = \int_0^l \varphi_k A\varphi_i dx = \int_0^l \varphi_k(x) \left[ EJ(x) \left( \frac{d^2 \varphi_i(x)}{dx^2} \right)^2 + K\varphi_i^2(x) \right] dx.$$

Можно показать [22], что первые производные  $w'_n(x)$  сходятся равномерно. Но тогда по теореме Вейерштрасса об интегрировании равномерно сходящихся последовательностей будут равномерно сходиться сами приближенные решения  $w_n(x)$ ; вторые производные  $w''_n(x)$  сходятся в среднем.

Если какой-либо из концов балки свободен, то условия (7.20) заменяются условиями обращения в нуль величин  $\frac{d^2 w}{dx^2}$  и  $\frac{d}{dx} \left[ EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right]$  на этом конце. Например, если конец  $x = 0$  жестко закреплен, а конец  $x = l$  свободен, то краевые условия таковы:

$$w|_{x=0} = 0; \quad w'|_{x=0} = 0; \quad w''|_{x=l} = 0; \quad (EJw')'|_{x=l} = 0.$$

Нетрудно проверить, что при этих условиях оператор в левой части уравнения (7.19) по-прежнему будет положительно определенным.

Все сказанное остается в силе и в том случае, когда коэффициент  $K$  податливости основания — переменный.

#### ОСНОВНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПУАССОНА И ЛАПЛАСА

Пусть дано уравнение Пуассона:

$$-\Delta u = f(P), \quad (7.22)$$

где  $P$  — точка некоторой  $m$ -мерной области  $\Omega$ .

Для определенности можно считать  $m = 2$  или  $m = 3$ . Поставим для этого уравнения задачу Дирихле: найти решение уравнения (7.22), непрерывное в замкнутой области  $\bar{\Omega} = \Omega + S$  и удовлетворяющее на границе  $S$  этой области краевому условию:

$$u|_S = 0. \quad (7.23)$$

За область определения оператора Лапласа примем множество  $M_1$  функций, удовлетворяющих следующим условиям: 1) они непрерывны вместе с первыми и вторыми производными в области  $\bar{\Omega} = \Omega + S$ ; 2) они равны нулю на  $S$ .

На множестве  $M_1$  оператор  $(-\Delta)$  положителен. Действительно, применим формулу Грина для оператора Лапласа:

$$(-\Delta u, u) = -\int_{\Omega} u \Delta u d\Omega = -\int_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{\Omega} (\text{grad} u)^2 d\Omega,$$

где  $n$  — внешняя нормаль к  $S$ . Поверхностный интеграл пропадает, так как  $u|_S = 0$ . Отсюда

$$(-\Delta u, u) = \int_{\Omega} (\text{grad} u)^2 d\Omega \geq 0. \quad (7.24)$$

Остается показать, что  $u \equiv 0$ , если  $(-\Delta u, u) = 0$ . Очевидно, что если  $(-\Delta u, u) = 0$ , то из (7.24) следует, что  $\text{grad} u = 0$ , откуда вытекает, что  $u = \text{const}$ , а так как  $u|_S = 0$ , то  $u \equiv 0$ .

Из всего сказанного следует, что сформулированная задача Дирихле равносильна задаче о минимуме функционала

$$F[u] = (-\Delta u, u) - 2(u, f)$$

или с учетом (7.24):

$$F[u] = \int_{\Omega} [(\text{grad} u)^2 - 2uf] d\Omega. \quad (7.25)$$

Если вместо (7.23) поставить краевое условие третьего рода

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial n} + h(P)u \right]_S = 0, \quad (7.26)$$

где  $h(P) \geq 0$ ,  $h(P) \not\equiv 0$ , то в качестве области определения оператора Лапласа мы должны ввести множество  $M_3$  функций, удовлетворяющих краевому условию

(7.26) и тем же условиям непрерывности и дифференцируемости, что и функции множества  $M_1$ .

На множестве  $M_3$  оператор  $(-\Delta)$  также положителен. Действительно, по формуле Грина для оператора Лапласа с учетом (7.26):

$$(-\Delta u, u) = -\int_{\Omega} u \Delta u d\Omega = -\int_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{\Omega} (\text{grad} u)^2 d\Omega = \int_S hu^2 dS + \int_{\Omega} (\text{grad} u)^2 d\Omega \geq 0$$

при этом если  $(-\Delta u, u) = 0$ , то необходимо

$$\int_S hu^2 dS = 0, \quad \int_{\Omega} (\text{grad} u)^2 d\Omega = 0.$$

Из второго равенства вытекает, что  $u = C = \text{const}$ . Тогда первое равенство принимает вид

$$C^2 \int_S h dS = 0.$$

Функция  $h(P) \geq 0, h(P) \not\equiv 0$ , следовательно,  $\int_S h dS > 0$ , но тогда  $C = 0$  и  $u \equiv 0$ .

Таким образом, на множестве  $M_3$  оператор  $(-\Delta)$  положителен. А значит, задачу интегрирования уравнения (7.22) при краевом условии (7.26) можно заменить задачей о минимуме функционала:

$$F[u] = (-\Delta u, u) - 2(u, f) = \int_{\Omega} [(\text{grad} u)^2 - 2uf] d\Omega + \int_S hu^2 dS \quad (7.27)$$

на множестве  $M_3$ .

Рассмотрим теперь задачу Неймана для уравнения (7.22). Пусть ищется решение уравнения (7.22), непрерывное и непрерывно дифференцируемое в  $\Omega$  и удовлетворяющее краевому условию:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = 0. \quad (7.28)$$

Можно, аналогично предыдущему, выделить множество функций, удовлетворяющих условию (7.28) и тем же условиям непрерывности и дифференцируемости, что и функции множества  $M_1$ . Однако оператор  $(-\Delta)$  не будет положительным на этом множестве. Действительно, и в этом случае будем иметь

$$(-\Delta u, u) = \int_{\Omega} (\text{grad} u)^2 d\Omega \geq 0.$$

Но из равенства  $(-\Delta u, u) = 0$  теперь не следует, что  $u \equiv 0$ . В самом деле, например, функция  $u \equiv 1$ , очевидно, входит в область определения оператора  $(-\Delta)$  и  $(-\Delta u, u) = 0$ .

Чтобы обойти это затруднение, можно поступить следующим образом [22]. Прежде всего заметим, что задача Неймана неразрешима при произвольной функции  $f(P)$ . Как мы знаем (см. п. 2.7), условие, которому должна удовлетворять функция  $f(P)$  (условие разрешимости задачи Неймана), имеет вид

$$\int_{\Omega} f(P) d\Omega = 0.$$

Далее, если задача Неймана разрешима, то она имеет бесчисленное множество решений, различающихся между собой на постоянную. Эту постоянную выберем так, чтобы решение  $u(P)$  удовлетворяло тому же условию, что и функция  $f(P)$ :

$$\int_{\Omega} u(P) d\Omega = 0. \quad (7.29)$$

Очевидно, такое решение задачи Неймана единственно.

Рассматривая задачу Неймана для уравнения (7.22), примем за область определения оператора Лапласа множество функций  $M_2$ , которые:

- 1) непрерывны вместе с первыми и вторыми производными в  $\bar{\Omega}$ ;
- 2) удовлетворяют краевому условию (7.28);
- 3) удовлетворяют уравнению (7.29).

На множестве  $M_2$  оператор  $(-\Delta)$  положителен. Действительно, по-прежнему

$$(-\Delta u, u) = \int_{\Omega} (\text{grad } u)^2 d\Omega \geq 0.$$

Если  $(-\Delta u, u) = 0$ , то  $u = C = \text{const}$ , но постоянная, удовлетворяющая условию (7.29), необходимо равна нулю.

Задача Неймана может быть заменена следующей вариационной задачей: на множестве  $M_2$  найти функцию, реализующую минимум функционала:

$$F[u] = (-\Delta u, u) - 2(u, f)$$

или, с учетом краевого условия (7.28):

$$F[u] = \int_{\Omega} [(\text{grad } u)^2 - 2uf] d\Omega.$$

*Замечание.* Отметим, что условия (7.26) и (7.28) являются так называемыми *естественными условиями*. Эти условия непосредственно получаются из условия экстремума функционала  $F[u]$ . В отличие от условий (7.26) и (7.28), условие (7.23) является так называемым *главным условием*.

При применении метода Ритца нет необходимости подчинять координатные функции естественным условиям — достаточно, чтобы удовлетворялись главные условия. Это обстоятельство сильно облегчает выбор координатных функций.



Как отличать естественные краевые условия от главных? Ответ на этот вопрос дает следующий признак [22]. Пусть оператор  $A$  имеет вид

$$Au = \sum_{k=0}^s \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_k=0 \\ j_1, j_2, \dots, j_k=0}}^m \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \left( \Phi_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{j_1, j_2, \dots, j_k}(P) \frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}} \right),$$

так что его порядок равен  $2s$ , и пусть этот оператор — положительно определенный на множестве функций, удовлетворяющих некоторым краевым условиям. Тогда естественными будут те однородные краевые условия, в которые входят производные от  $u(P)$  порядка  $s$  и выше, а главными — те условия, которые содержат производные от  $u(P)$  только до порядка  $(s - 1)$ .

Например, для оператора Лапласа  $s = 1$  условие  $u|_S = 0$  — главное, а условие  $\left[ \frac{\partial u}{\partial n} + h(P)u \right]_S = 0$  — естественное. Для бигармонического оператора  $s = 2$

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$$

условия

$$u|_S = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_S = 0 \quad (7.30)$$

— главные, а из условий

$$u|_S = 0; \quad \left[ \Delta u - \frac{1-\nu}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right]_S = 0 \quad (7.31)$$

первое главное, а второе естественное.

Бигармонический оператор играет фундаментальную роль в теории изгиба тонких пластин. Условия (7.30) означают жестко закрепленный край пластины, а условия (7.31) — свободное опирание, причем естественное условие совпадает с условием отсутствия изгибающих моментов на свободно опертом крае.

Часто приходится решать уравнение Лапласа с сопутствующим ему неоднородным краевым условием. Приведем соответствующие вариационные задачи.

Задача Дирихле для уравнения Лапласа приводит к отысканию минимума функционала

$$F[u] = \int_{\Omega} (\text{grad } u)^2 d\Omega$$

на множестве функций, удовлетворяющих условию

$$u|_S = g(P).$$

Задача Неймана при краевом условии

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_S = \sigma(P)$$

приводит к отысканию минимума функционала

$$F[u] = \int_{\Omega} (\text{grad} u)^2 d\Omega - 2 \int_S \sigma u dS$$

на множестве функций, которые никаким краевым условиям не подчинены (условие Неймана — естественное).

В случае третьей краевой задачи с условием смешанного типа

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial n} + h(P)u \right]_S = \sigma(P)$$

соответствующий функционал имеет вид

$$F[u] = \int_{\Omega} (\text{grad} u)^2 d\Omega + \int_S (hu^2 - 2\sigma u) dS.$$

Условие третьего рода — естественное, поэтому нет нужды удовлетворять ему заранее, отыскивая минимум функционала.

*Замечание.* Мы установили положительность оператора  $(-\Delta)$  на каждом из множеств  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$ . Однако для того, чтобы с уверенностью пользоваться методом Ритца, было бы важно установить, что оператор  $(-\Delta)$  является положительно определенным на каждом из перечисленных множеств. Мы принимаем это без доказательства.

### О ВЫБОРЕ БАЗИСНЫХ (КООРДИНАТНЫХ) ФУНКЦИЙ

Применение метода Ритца требует предварительного выбора системы аппроксимирующих базисных функций, полной в смысле сходимости по энергии соответствующего оператора.

Если мы приняли за конечный результат  $u_N(x)$  при некотором значении  $N$ , то правильность полученного результата можно оценить, сравнивая значения  $u_N(x)$  для различных значений  $N$ . Можно также сравнивать результаты при различном выборе функций  $\varphi_n(x)$ .

Скажем несколько слов о выборе системы координатных (базисных) функций (7.13). Мы предполагаем, что имеет место разложение

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

или, по крайней мере, можно аппроксимировать функцию  $u(x)$  отрезком этого ряда с наперед заданной точностью. Иными словами, любая допустимая функция может быть сколь угодно точно аппроксимирована вместе со своей производной посредством функций семейства (7.13). Это *условие полноты* системы функций (7.13). Условие полноты является достаточным условием для того, чтобы последовательность функций (7.14) была минимизирующей. Второе тре-

бование, которому должны удовлетворять функции системы (7.13), — это их линейная независимость. Требование линейной независимости функций является условием однозначной разрешимости системы уравнений (7.17). Конечно, кроме всего прочего, функции должны быть допустимыми, т. е., в частности, удовлетворять всем граничным условиям задачи.

Приведем примеры систем базисных функций. Можно доказать, что система функций

$$\varphi_k(x) = x^{k-1}(x-a)^m(x-b)^m, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

полна по энергии оператора

$$(-1)^m \frac{d^{2m}u}{dx^{2m}}$$

при краевых условиях

$$u^{(k)}(a) = u^{(k)}(b) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

В частном случае  $m = 1$  можно также использовать систему функций

$$\varphi_k(x) = \sin\left[\frac{k\pi(x-a)}{(b-a)}\right], \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

В прямоугольнике  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$  для оператора  $Au = -\Delta u$  с граничными условиями  $u = 0$  на контуре прямоугольника система функций

$$\varphi_{m,n}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

полна в смысле сходимости в среднем и по энергии.

Пусть в некоторой области рассматривается задача Дирихле для уравнения Пуассона при условии, что на границе области искомая функция равна нулю. Полную по энергии систему функций можно построить так. Пусть  $\omega(x, y)$  — непрерывная в замкнутой области функция, равная нулю в точках границы области и положительная внутри области; кроме того, ее производные непрерывны и ограничены внутри области. Тогда система функций

$$\omega(x, y)x^m y^n, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

полна по энергии в рассматриваемой области. Эту систему функций или ей аналогичную для большего числа независимых переменных можно использовать не только при решении уравнения Пуассона, но и в более сложных задачах (примеры таких задач рассматриваются в п. 7.9).

Для бигармонического оператора при краевых условиях на границе  $S$   $u|_S = 0, \frac{\partial u}{\partial \nu}|_S = 0$  полной по энергии является система функций

$$[\omega(x, y)]^2 x^m y^n, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

Подробно эти вопросы обсуждаются в [14] и [22].

## 7.4. ПРИМЕНЕНИЯ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА

Вариационные методы имеют обширную область приложений в математической физике. Эти методы применяются: для вывода уравнений математической физики исходя из минимальных принципов; для решения задач математической физики, точного или приближенного, путем сведения этих задач к вариационным.

Вариационные методы применяются в теории задачи Штурма — Лиувилля — доказательство свойств собственных значений и собственных функций и приближенное их вычисление; эти методы используются при получении точных оценок различных физических величин; а также в теории оптимального управления.

Рассмотрим некоторые из приложений.

### ЗАДАЧА О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ В БРУСЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Будем предполагать, что по проводнику с прямоугольным сечением протекает электрический ток, выделяя при этом тепло  $Q$ . Поверхность проводника поддерживается при нулевой температуре. Требуется определить стационарное распределение температуры в проводнике.

Сформулируем задачу: требуется найти функцию  $T(x, y)$ , удовлетворяющую в открытом прямоугольнике  $-a < x < a$ ,  $-b < y < b$  стационарному уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{Q}{k} \quad (7.32)$$

и граничным условиям:

$$T|_{x=\pm a} = 0; \quad T|_{y=\pm b} = 0. \quad (7.33)$$

Задача решается точно методом Гринберга. Решим эту задачу вариационным методом. Сформулируем соответствующую вариационную задачу для уравнения Пуассона (см. формулу (7.25)): найти функцию  $T(x, y)$ , доставляющую экстремум функционалу

$$J[T(x, y)] = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 - \frac{Q}{k} T \right] dx dy \rightarrow \text{extr},$$

при дополнительных условиях (7.33).

Построим решение вариационной задачи в форме

$$T = \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \left( C_0 + C_1 \frac{x^2}{a^2} + D_1 \frac{y^2}{b^2} + \dots \right). \quad (7.34)$$

Выражение (7.34) удовлетворяет граничным условиям (7.33) и является функцией, симметричной относительно  $x$  и  $y$ . Это выражение хорошо передает характер зависимости температуры от координат  $x$  и  $y$ .

Далее будем считать, что

$$T \approx C_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right).$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{2x}{a^2} C_0 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right); \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{2y}{b^2} C_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} J[T(x, y)] &= \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[ \frac{2x^2 C_0^2}{a^4} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{2y^2 C_0^2}{b^4} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 \right] dx dy - \\ &- \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{QC_0}{k} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dx dy. \end{aligned}$$

Удобно ввести безразмерные координаты  $\xi = x/a$ ,  $\eta = y/b$ ; в силу симметрии области  $D$  будем иметь

$$\begin{aligned} J[T] &= 4ab \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{2C_0^2}{a^2} \xi^2 (1 - \eta^2)^2 + \frac{2C_0^2}{b^2} \eta^2 (1 - \xi^2)^2 \right] d\xi d\eta - \\ &- 4ab \int_0^1 \int_0^1 \frac{QC_0}{k} (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) d\xi d\eta = \Phi(C_0), \end{aligned}$$

где  $\Phi(C_0)$  — квадратичная функция от  $C_0$ . Вычисления дают

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \xi^2 (1 - \eta^2)^2 d\xi d\eta &= \int_0^1 \int_0^1 \eta^2 (1 - \xi^2)^2 d\xi d\eta = \frac{8}{45}, \\ \int_0^1 \int_0^1 (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) d\xi d\eta &= \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

В итоге получим

$$\Phi(C_0) = \frac{64}{45} ab \left[ \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} C_0^2 - \frac{5Q}{4k} C_0 \right].$$

Для определения  $C_0$  будем иметь

$$\Phi'(C_0) = 0 \Rightarrow 2 \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} C_0 - \frac{5Q}{4k} = 0 \Rightarrow C_0 = \frac{5Q a^2 b^2}{8k(a^2 + b^2)}.$$

Таким образом, приближенное решение задачи имеет вид

$$T \approx \frac{5Q a^2 b^2}{8k(a^2 + b^2)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right).$$

Для сравнения полученного решения с точным решением вычислим температуру на оси проводника при  $a = b$ :

$$T|_{x=y=0} \approx \left. \frac{5Qa^2b^2}{8k(a^2+b^2)} \right|_{a=b} = \frac{5Qa^2}{16k} \approx 0,312 \frac{Qa^2}{k}.$$

Точное решение задачи при  $a = b$  имеет вид

$$T|_{x=y=0} = \frac{Qa^2}{2k} \left[ 1 - \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3 \operatorname{ch}\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)} \right] \approx 0,295 \frac{Qa^2}{k}.$$

### ВЫВОД УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

Получим вариационным методом уравнение плоских малых поперечных колебаний струны, натянутой силой  $\tau$  между точками  $x = 0$  и  $x = l$  оси  $x$ . Напомним, что *струной* считается одномерная среда, работающая только на растяжение, но не на изгиб, т. е. не сопротивляющаяся изгибу.

Будем считать, что сила натяжения  $\tau$  в процессе колебаний не меняется. Это оправдано, если колебания малы по амплитуде. Будем также считать, что каждая точка  $x$  струны в процессе колебаний смещается перпендикулярно оси  $x$ ; обозначим ординату этой точки в момент времени  $t$  через  $u(x, t)$ . Функция  $u(x, t)$  и определяет закон колебаний, ее график в фиксированный момент времени представляет форму струны в этот момент.

Потенциальная энергия струны выражается интегралом

$$U = \tau \left[ \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx - l \right]$$

(струна есть одномерная механическая система, потенциальная энергия каждого участка которой пропорциональна его удлинению по сравнению с положением равновесия). Разлагая радикал в ряд и отбрасывая в предположении малости  $|u|$  члены с  $(\partial u / \partial x)^4$ , получим

$$U = \tau \left[ \int_0^l \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \dots \right\} dx - l \right] = \frac{\tau}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx.$$

Кинетическая энергия струны, как сумма кинетических энергий ее частиц, выражается интегралом

$$T = \int_0^l \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx,$$

где  $\rho$  — линейная плотность струны (будем считать  $\rho$  постоянным, т. е. струну однородной).

Составим интеграл действия

$$J[u(x, t)] = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \tau \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx dt.$$

Согласно принципу Остроградского — Гамильтона этот интеграл должен принимать экстремальное значение, т. е. должно выполняться соответствующее уравнение Остроградского — Эйлера. Обозначим

$$F = \frac{1}{2} [\rho(u_t)^2 - \tau(u_x)^2],$$

где  $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ .

Уравнение Остроградского — Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial F}{\partial u_t} \right) = 0.$$

Вычисляя производные, окончательно получаем известное уравнение свободных колебаний струны:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

## 7.5. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В ПАКЕТЕ MAPLE

### ПРОСТЕЙШАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД ЭЙЛЕРА

Мы начнем рассмотрение с простейшей вариационной задачи для одномерного интеграла: найти функцию  $y(x)$ , доставляющую экстремум (или просто стационарное значение) функционалу

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx,$$

где  $F$  — заданная функция трех аргументов, непрерывная вместе с производными второго порядка в некоторой области. Значения искомой функции  $y(x)$  на концах промежутка интегрирования заданы:

$$y(a) = y_a; \quad y(b) = y_b.$$

Будем решать задачу одним из прямых методов — конечно-разностным методом Эйлера. Значения функционала  $J[y(x)]$  станем рассматривать не на произвольных, допустимых в данной вариационной задаче кривых, а лишь на ломаных, составленных из заданного числа  $N$  прямолинейных звеньев, с заданными абсциссами вершин

$$a, a + h, a + 2h, \dots, a + (N - 1)h, a + Nh, \quad h = \frac{b - a}{N}.$$

На этих ломаных функционал превращается в функцию  $\Phi(Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-1}, Y_N)$  ординат  $Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-1}, Y_N$  вершин ломаной. Ординаты  $Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-1}, Y_N$  выбираются так, чтобы функция  $\Phi(Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-1}, Y_N)$  достигала экстремума, т. е. они определяются из системы уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Y_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N-1,$$

ординаты  $Y_0$  и  $Y_N$  известны из граничных условий  $y(a) = y_a, y(b) = y_b$ .

Это типичный метод дискретизации, который состоит в приближенной замене функционала  $J[y(x)]$  на сумму

$$I_N = h \sum_{k=0}^{N-1} F\left(X_k, Y_k, \frac{Y_{k+1} - Y_k}{h}\right),$$

зависящую от конечного числа дискретных значений  $Y_k = y(X_k)$  искомой функции в заданных узлах  $X_k = a + kh$ .

**Пример 1.** Найти экстремаль функционала:

$$J[y] = \int_{-1}^1 (\cos(x) - 2y'e^x + y'^2) dx; \quad \begin{cases} y(-1) = 2; \\ y(1) = 3. \end{cases}$$

*Решение.* Реализацию намеченного алгоритма решения поставленной задачи выполним в системе аналитических вычислений Maple:

```
>restart;
```

```
>interface(displayprecision=3):
```

Аппроксимация подынтегральной функции конечными разностями:

```
>F:=proc(Y,m,h)
```

```
(Y[m+1]-Y[m])^2/h^2-2*(Y[m+1]-Y[m])*exp(X[m])/h+cos(X[m])
```

```
end proc;
```

Интеграл заменяем суммой по формуле прямоугольников:

```
>JN:=proc(h,F,N) options operator, arrow;
```

```
h*(sum(F(Y,i,h),i=0..N-1))
```

```
end proc;
```

Задаем пределы интегрирования:

```
>a := -1: b := 1:
```

Выбираем число узловых точек и определяем шаг интегрирования; сначала решим задачу при небольшом числе интервалов разбиения, например:

```
>N:=7: h:=(b-a)/N:
```

Вычисляем абсциссы вершин ломаной:

```
>for j from 0 to N do X[j] := h*j+a end do:
```



Функционал как функция ординат вершин ломаной:

```
>Phi:=JN(h,F,N):
```

Учет граничных условий:

```
>Y[0]:=2: Y[N]:=3:
```

Составление минимизирующей системы уравнений:

```
>for k to N-1 do  
eq[k]:=evalf(diff(Phi,Y[k]))=0:  
end do:  
>var:={}: eqns:={}:  
for k to N-1 do  
var:=var union {Y[k]}:  
eqns:=eqns union {eq[k]}:  
end do:
```

Решение системы:

```
>res:=solve(eqns,var):  
>assign(res):
```

Формирование списка точек вершин ломаной:

```
>for j from 0 to N do  
P[j]:=[X[j],Y[j]]  
end do:  
>L:=seq(P[k-1],k=1..N+1):
```

Для сравнения найдем точное решение задачи:

```
>with(VariationalCalculus):  
>f:=(diff(y(x),x))^2-2*(diff(y(x),x))*exp(x)+cos(x);
```

$$f := \left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2 - 2\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)e^x + \cos(x)$$

```
>ode:=EulerLagrange(f,x,y(x));
```

$$ode := \left\{ -2\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + 2e^x, 2\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) - 2e^x - K_1 \right\}$$

```
>problem:={ode[1]} union {y(-1)=2,y(1)=3};
```

$$problem := \left\{ -2\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + 2e^x, y(-1) - 2, y(1) - 3 \right\}$$

```
>dsolve(problem,y(x));
```

$$y(x) = e^x + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}e\right)x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^{-1}$$

```
>simplify(convert(% ,trig));
```

$$y(x) = -x \sinh(1) - \cosh(1) + \cosh(x) + \sin(x) + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

```
>y:=unapply(rhs(%),x);
```

$$y := x \rightarrow -x \sinh(1) - \cosh(1) + \cosh(x) + \sinh(x) + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Построим графики приближенного и точного решений (рис. 7.2):

```
>plot([L,y(x)],x=-1..1,  
title=cat("Число интервалов N = ",convert(N,string)),  
titlefont=[Helvetica,15],font=[Helvetica,14],  
linestyle=[dash,solid],gridlines=true,  
legend=["метод Эйлера","Точное решение"]);
```

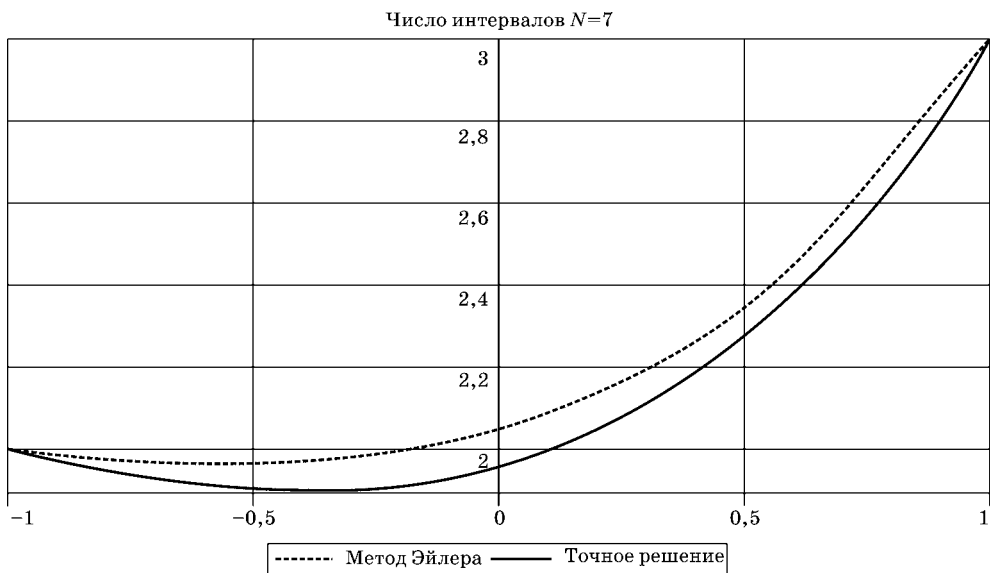
Численное решение удобно представить в виде таблицы значений:

```
>fd_table1:=  
eval([seq([X[k],Y[k],evalf(y(X[k]))],k=0..N)],res):  
>z:=['x','Y','y'];  
>linalg[stackmatrix](z,fd_table1);
```

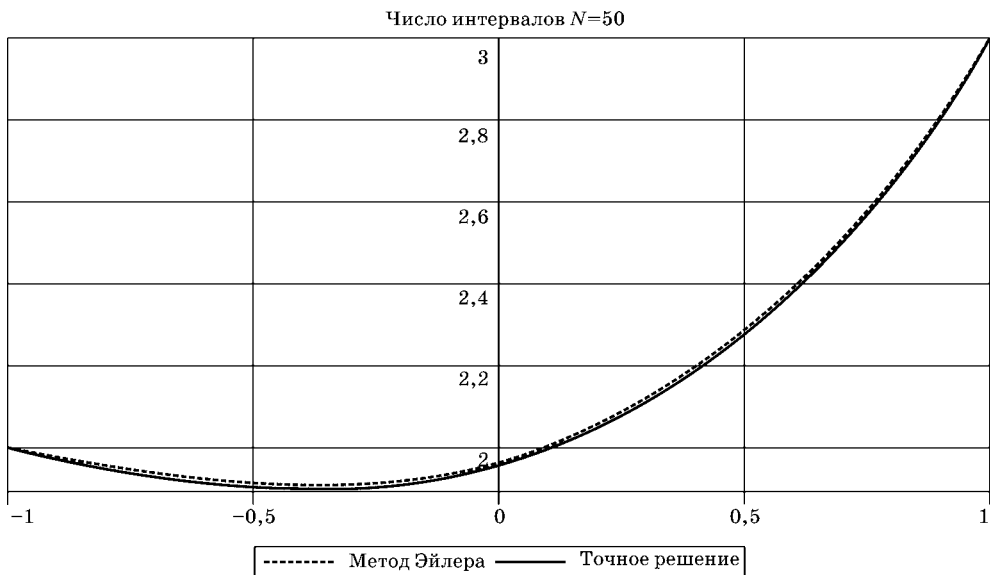
$x$	$Y$	$y$
-1	2	2.000
$-\frac{5}{7}$	1.958	1.929
$-\frac{3}{7}$	1.951	1.898
$-\frac{1}{7}$	1.989	1.920
$\frac{1}{7}$	2.090	2.014
$\frac{3}{7}$	2.272	2.203
$\frac{5}{7}$	2.564	2.517
1	3	3.000

Уточнить результат можно, увеличив  $N$ . Например, при  $N = 50$  получим рисунок 7.3.

Как видим, результат не плох. Однако отметим, что приведенные рассуждения имеют скорее методическое значение, так как в вычислительном отношении процедура получается в точности такая же, как если от вариационной задачи перейти к уравнению Эйлера для исследуемого функционала, а затем решать для этого уравнения краевую задачу методом сеток.



**Рис. 7.2**  
Сравнение решений



**Рис. 7.3**  
Сравнение решений при  $N = 50$

## ПРОСТЕЙШАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА. МЕТОД РИТЦА

Для сравнения решим методом Ритца задачу из примера 1:

```
>restart;
```

Выбираем базисные функции и определяем аппроксимирующую функцию:

```
>phi0:=x->y1+(y2-y1)*(x-x1)/(x2-x1);
```

$$\phi_0 := x \rightarrow y_1 + \frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1}$$

```
>phi:=(x,n)->sin(n*Pi*(x-x1)/(x2-x1));
```

$$\phi(x, n) \rightarrow \sin\left(\frac{n\pi(x - x_1)}{x_2 - x_1}\right)$$

```
>Us:=proc(x,N)option operator,arrow; local n;
```

```
phi0(x)+sum(a[n]*phi(x,n), 'n' =1..N);
```

```
end proc;
```

$$Us := (x, N) \rightarrow \phi_0(x) + \sum_{n=1}^N a_n \phi(x, n)$$

Разработаем процедуру для составления уравнений метода Ритца:

```
>Ritz:=proc(F,u,i0,N,a)local Fu,eqns,var,eq,i,res;
```

```
global x1,x2;
```

```
Fu:=simplify(int(subs(y(x)=u,F),x=x1..x2));
```

```
eqns:={}:var:={};
```

```
for i from i0 to N do
```

```
var:=var union {a[i]}:
```

```
eq[i]:=diff(Fu,a[i])=0:
```

```
eqns:=eqns union {eq[i]}:
```

```
od:
```

```
res:=solve(eqns,var);
```

```
assign(res);
```

```
end proc:
```

```
>interface(displayprecision=3):
```

Вводим граничные точки, задаем количество членов ряда, задаем подынтегральную функцию и выполняем расчеты:

```
>x1:=-1:x2:=1:y1:=2:y2:=3:
```

```
>N:=5:c1:=`cross`:c2:=`circle`:
```

```
c3:=`box`:c4:=`point`:c5:=`diamond`:
```

```
y:=`y`:
```

```
F:=(diff(y(x),x))^2-2*(diff(y(x),x))*exp(x)+cos(x):
```

```
>for j from 1 to N do
```

```
a:=array(1..j):
```

```
Ritz(F,Us(x,j),1,j,a);
```

```
pu_||j:=plot(Us(x,j),x=x1..x2,color=blue,
```

```

style=point,symbol=c|j,
legend=cat('Метод Рунца N = ',convert(j,string)),
gridlines=true,font=[Helvetica,14],
labelfont=[Helvetica,14],symbolsize=20,numpoints=5):
end do:

```

Точное решение имеет вид:

```

>y:=proc(x) options operator,arrow;
-x*sinh(1)-cosh(1)+cosh(x)+sinh(x)+(1/2)*x+5/2
end proc;

```

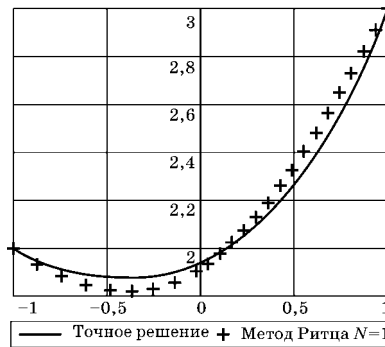
$$y := x \rightarrow -x \sinh(1) - \cosh(1) + \cosh(x) + \sinh(x) + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Построим графики приближенных решений по Рунцу при разном количестве удерживаемых членов и точного решения (рис. 7.4–7.7):

```

>pr3:=plot(y(x),x=-1..1,
legend='Точное решение',color=black):
>plots[display]({pu_1,pr3});

```

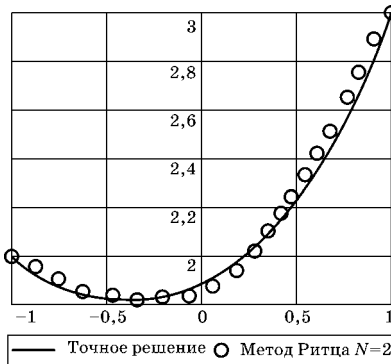


**Рис. 7.4**  
Сравнение решений:  $N = 1$

```

>plots[display]({pu_2,pr3});

```



**Рис. 7.5**  
Сравнение решений:  $N = 2$

```
>plots[display]({pu_3,pr3});
```

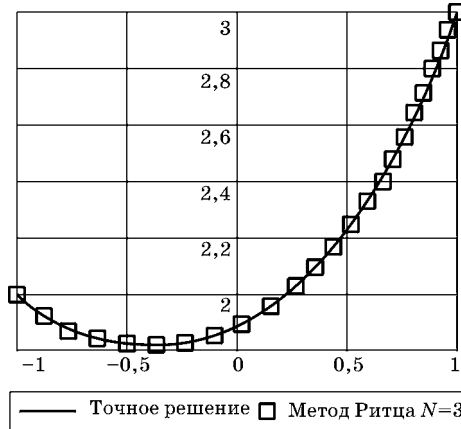


Рис. 7.6  
Сравнение решений:  $N = 3$

```
>plots[display]({pu_5,pr3});
```

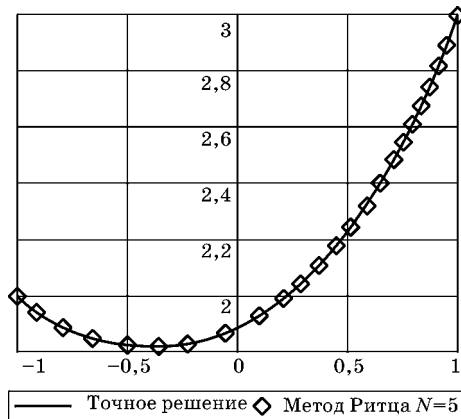


Рис. 7.7  
Сравнение решений:  $N = 5$

Для количественного сравнения решений удобно иметь таблицу значений в конкретных точках. Подготовим такую таблицу:

```
>M := 7:  
>h := (x2-x1)/M:  
>for j from 0 to M do  
X[j]:=h*j+x1:Y[j]:=evalf(Us(X[j],5)):  
end do:  
>ftab:=eval([seq([X[k],Y[k],evalf(y(X[k]))],k=0..M))]:  
>z:=[ ' x' , ' Y' , ' y ' ]:  
>linalg[stackmatrix](z,ftab);
```

$x$	$Y$	$y$
-1	2.000	2.000
$-\frac{5}{7}$	1.927	1.929
$-\frac{3}{7}$	1.900	1.898
$-\frac{1}{7}$	1.918	1.920
$\frac{1}{7}$	2.016	2.014
$\frac{3}{7}$	2.202	2.203
$\frac{5}{7}$	2.516	2.517
1	3.000	3.000

### ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Рассмотрим следующую задачу Дирихле для уравнения Пуассона: требуется найти функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую уравнению Пуассона  $-\Delta u = f(x, y)$  в прямоугольнике и условию  $u|_{\Gamma} = 0$  на границе  $\Gamma$  этого прямоугольника — граничному условию первого рода.

Эта задача встречается во многих приложениях математической физики. В механике жидкости и газа она описывает стационарное течение вязкой жидкости в канале с поперечным сечением в форме прямоугольника; в электростатике — потенциал электростатического поля; в теории теплопроводности — стационарное распределение температуры; в статике упругих тел — равновесие прямоугольной мембраны, кручение стержня с поперечным сечением в форме прямоугольника и многие другие процессы.

**Пример 2.** Рассмотрим модельную задачу о стационарном течении вязкой жидкости в канале с поперечным сечением в форме квадрата [34]. Уравнение для компоненты скорости, направленной вдоль канала, приведенное к безразмерной форме записи за счет надлежащего выбора масштабов, имеет вид  $\Delta u = -1$ ; граничные условия —  $u|_{x=\pm 1} = 0$ ,  $u|_{y=\pm 1} = 0$ .

*Решение.* Продемонстрируем применение метода Бубнова — Галёркина к решению этой задачи в системе Maple:

```
>restart;
>interface(displayprecision = 5):

Уравнение Пуассона определим как:
>pde:=diff(u(x,y),x$2)+diff(u(x,y),y$2)+1;
```

$$pde := \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) + 1$$

Подготовим процедуру, реализующую алгоритм метода Бубнова — Галёркина:

```
>Bubnov_Gal:=proc(pde,n,a,bol::boolean)
local eqns,vars,sol,i;
eqns:={}; vars:={};
for i from 1 to n do
eqns:=eqns union
{int(eval(pde)*phi(i,x,y),[x=-1..1,y=-1..1])};
vars:=vars union {a[i]};
end do;
if bol then print(eval(eqns));
print(eval(vars)); end if;
sol:=solve(eqns,vars);
if bol then print(sol); end if;
assign(sol);
end proc;
```

Определяем полиномиальные базисные функции:

```
>phi:=(n,x,y)->(1-x^2)^n*(1-y^2)^n;
```

$$\phi := (n, x, y) \rightarrow (1 - x^2)^n (1 - y^2)^n$$

Эти функции, очевидно, удовлетворяют граничным условиям.

Определяем аппроксимирующую функцию:

```
>W:=(x,y,N)->sum(a[i]*phi(i,x,y), i=1..N);
```

$$W := (x, y, N) \rightarrow \sum_{i=1}^N a_i \phi(i, x, y)$$

Задаем количество членов в аппроксимации и выполняем расчет:

```
>N:=2;
```

```
>eq:=value(subs(u(x,y)=W(x,y,N),pde));
```

```
>Bubnov_Gal(eq,N,a,true);
```

$$\left\{ -\frac{131072}{33075} a_2 - \frac{2048}{525} a_1 + \frac{256}{225}, -\frac{2048}{525} a_2 - \frac{256}{45} a_1 + \frac{16}{9} \right\}$$

$$\{a_1, a_2\}$$

$$\left\{ a_1 = \frac{37}{104}, a_2 = -\frac{105}{1664} \right\}$$

Вычислим скорость на оси канала и безразмерный расход (расход определяется как интеграл от функции скорости по области сечения):

```
>value(W(x,y,N));evalf(W(0,0,N));
```

$$\frac{37}{104}(-x^2 + 1)(-y^2 + 1) - \frac{105}{1664}(-x^2 + 1)^2(-y^2 + 1)^2$$

0.29267



```
>Int(Int(u(x,y),x=-1..1),y=-1..1)=
evalf(Int(Int(W(x,y,N),x=-1..1),y=-1..1));
```

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u(x,y) dx dy = 0.56068$$

Точные значения приведены в [33, с. 26]:

$$u(0,0) = 0.2947, \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u(x,y) dx dy = 0.5623$$

При помощи команд пакетов `plots` и `ColorTools` изобразим (рис. 7.8) несколько изолиний:

```
>W_b:=value(W(x,y,N)):
myskyblue := ColorTools:-Color([0.8, 0.9, 1.]):
pic3:=implicitplot([W_b=0.01,W_b=0.1,W_b=0.2,W_b=0.25],
x=-1..1,y=-1..1,grid=[50,50],color=khaki,
font=["Helvetica", 14],labelfont=["Courier", 14]),
polygonplot(ngon,font=["Helvetica", 14],color=myskyblue):
pict:=textplot({[0., 1.1, "u = 0.01"],
[0., 0.9, "u = 0.1"],[0., 0.7, "u = 0.2"],
[0., 0.5, "u = 0.25"]}):
display([pic3,pict],axes=frame);
```

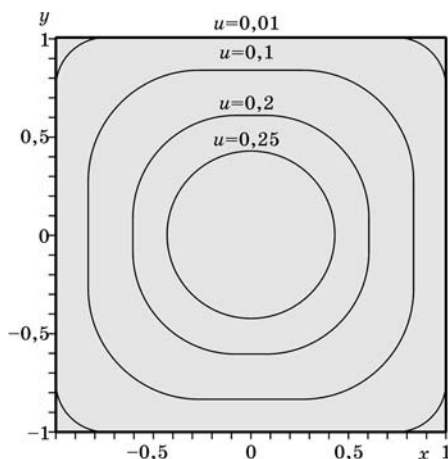


Рис. 7.8  
Изолинии скорости

### ИЗГИБ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Как обычно, мы располагаем плоскость  $(x, y)$  в срединной плоскости пластины; через  $h$  обозначим толщину пластины, которую считаем малой. Обозначим через  $w(x, y)$  нормальные смещения точек  $(x, y)$  срединной плоскости. Обозначим область и границу, составляющие срединную поверхность пластины,

через  $S$  и  $C$ . Система координат выбирается таким образом, чтобы оси  $x$  и  $y$  лежали в срединной плоскости, а ось  $z$  совпадала с направлением нормали к ней, так что оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  образуют правую прямоугольную систему координат. Будем предполагать пластину односвязной, а ее боковую поверхность — цилиндрической, т. е. параллельной оси  $z$ . Пластина подвергается действию распределенной поперечной нагрузки  $q(x, y)$  на единицу площади срединной поверхности в направлении оси  $z$ .

Уравнение, устанавливающее связь между нагрузкой  $q(x, y)$  и малыми прогибами  $w(x, y)$  пластины, имеет вид

$$\Delta^2 w \equiv \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D},$$

где  $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$  — цилиндрическая жесткость пластины;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $E$  — модуль Юнга;  $\Delta$  — оператор Лапласа, так что  $\Delta^2$  — бигармонический оператор.

Это уравнение известно как уравнение Софи Жермен. Оно получено Лагранжем в 1811 г. в связи с рассмотрением доклада С. Жермен во французской Академии наук.

Интегрировать уравнение С. Жермен надлежит с теми или иными граничными условиями, определяющими условия закрепления контура пластины. Так, например, расчет заземленной по контуру пластины сводится к следующей краевой задаче для функции  $w(x, y)$ :

$$\Delta^2 w = \frac{q}{D}, \quad w|_C = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_C = 0,$$

где  $\left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_C$  — производная по нормали к контуру. Граничные условия означают, что прогиб и угол поворота закрепленного сечения пластины равны нулю.

Возможны и другие граничные условия.

Можно доказать, что бигармонический оператор, входящий в уравнение С. Жермен, — симметричный и положительно определенный на множестве функций, удовлетворяющих условиям жесткого заземления, и задача расчета жестко заземленной по контуру пластины сводится к задаче о минимуме функционала

$$F[w] = \iint_S \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - \frac{2q}{D} w \right] dx dy$$

на множестве функций, удовлетворяющих условиям жесткого заземления.

**Пример 3. Изгиб секторальной пластины.** Рассмотрим пластину постоянной толщины  $h$ , имеющую форму полукруга радиуса  $r$ . Предположим, что пластина жестко заделана по контуру и находится под действием внешней нагрузки  $q$ , нормальной к срединной плоскости.

*Решение.* Решение поставленной задачи выполним в системе аналитических вычислений Maple. С помощью графических структур изобразим пластину (пусть радиус круга  $r = 1$ ) (рис. 7.9):

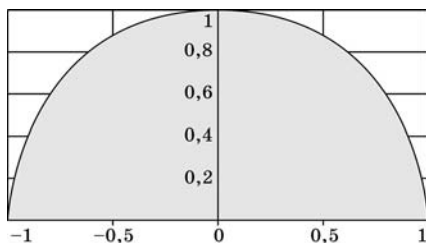


Рис. 7.9  
Секторальная пластина

```
>restart;
>with(plottools):
>r:=1.:
>plottools[sector]([0,0],r,0..Pi,color="Khaki"):
plots[display](%,scaling=constrained,
font=[Courier,bold,13],labelfont=[Courier,bold,13],
gridlines=true);
```

Обозначим плотность полной потенциальной энергии защемленной пластины через  $F(x, y)$ :

```
>F:=(x,y)->
(diff(w(x,y),x,x)+diff(w(x,y),y,y))^2-2*q(x,y)*w(x,y)/Dcil;
```

$$F := (x, y) \rightarrow \left( \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right)^2 - \frac{2q(x, y)w(x, y)}{Dcil}$$

Процедура формирования и решения системы уравнений по Ритцу:

```
>Ritz:=proc(Mbeg,M,Nbeg,N,B)
local eqns, vars, eq, m, n; global U;
eqns:={}:vars:={}:m:='m':n:='n':
for m from Mbeg to M do
for n from Nbeg to N do
vars:=vars union {c[m,n]};
eq[m,n]:=diff(U,c[m,n])=0:
eqns:=eqns union {eq[m,n]}
end do:
end do:
B:=solve(eqns,vars)
end proc:
```

Подготовим формулы для расчета изгибающего момента и максимального нормального напряжения:

```
>Mx:=(x,y)->
-E*h^3*(diff(w(x,y),x,x)+nu*(diff(w(x,y),y,y)))/
(12-12*nu^2):
sigma[x,max]:=(x,y)->6*Mx(x,y)/h^2:
```

Выбираем базисные функции, удовлетворяющие граничным условиям защемления на контуре:

```
>phi:=(x,y,i,j)->(1-x^2-y^2)^2*y^2*x^(i-1)*y^(j-1);
phi := (x, y, i, j) -> (1 - x^2 - y^2)^2 y^2 x^{i-1} y^{j-1}
```

Задаем уравнения, определяющие контур пластины:

```
>bc:={y=0,-x^2-y^2+1=0};
```

$$bc := \{y = 0, -x^2 - y^2 + 1 = 0\}$$

Задаем вектор нормали к контуру (здесь  $\theta$  — полярный угол):

```
>v1:={cos(theta),sin(theta)};
```

$$v1 := \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

Проверяем выполнение граничных условий для базисных функций:

```
>VectorCalculus[DirectionalDiff]
```

```
(phi(x,y,i,j),v1,carthesian[x,y]):
```

```
simplify(subs(bc,%));
```

0

```
>phi(x,0,i,j);
```

0

Задаем функцию, аппроксимирующую прогиб:

```
>W:=(x,y,M,N)->sum(sum(c[i,j]*phi(x,y,i,j),  
'j'=1..N),'i'=1..M);
```

$$W := (x, y, M, N) \rightarrow \sum_{i'=1}^M \left( \sum_{j'=1}^N c_{i,j} \phi(x, y, i, j) \right)$$

Задаем нагрузку, толщину пластины и радиус:

```
>q:=(x,y)->q0:
```

```
>h:=0.1e-1: q0:=10000.:
```

Задаем коэффициент Пуассона, модуль Юнга и вычисляем цилиндрическую жесткость пластины:

```
>nu:=0.3: E:=2.2*10^11: Dcil:=E*h^3/12/(1-nu^2):
```

Выполняем расчет:

```
>w:=(x,y)->W(x,y,M,N):
```

```
>M := 3: N := 3:
```

Вычисляем плотность энергии:

```
>ff:=simplify(F(x,y)):
```

Вычисляем полную потенциальную энергию:

```
>U:=VectorCalculus[int](ff,[x,y]=
```

```
Sector(Circle(<0,0>,r),0,Pi)):
```

Определяем коэффициенты разложения методом Ритца:

```
>Ritz(1,M,1,N,B):
```

```
>assign(B);
```

Изобразим пространственную эпюру прогибов (рис. 7.10):

```
>WW:=changecoords(w(x,y),[x,y],polar);
>plot3d([x,y,WW],x=0..r,y=0..Pi,coords=cylindrical,
font=[Courier,bold,13], axes=frame,
labelfont=[Courier,bold,13],color=gray);
```

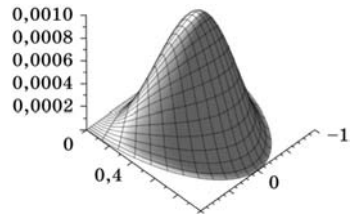


Рис. 7.10  
Пространственная эпюра прогибов при  $M = N = 3$

Эпюра радиального напряжения в центральном сечении пластины (рис. 7.11):

```
>SigmaX:=changecoords(sigma[x,max](x,y),[x,y],polar);
>pS||M:=plot(subs(y=Pi/2,SigmaX),x=0..r,
font=[Courier,bold,13],labelfont=[Courier,bold,13],
gridlines=true,title="Радиальное напряжение",
legend=cat("M = N = ",convert(M,string)));
plots[display](pS||M);
```

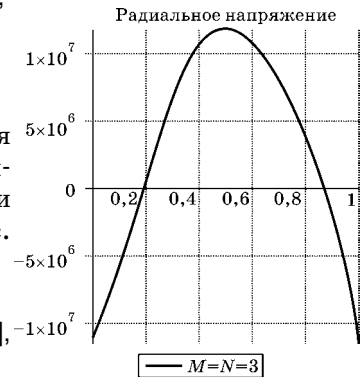


Рис. 7.11  
Нормальное напряжение в центральном сечении

Отметим, что прогибы надежно вычисляются при малом числе базисных функций в аппроксимации. Изобразим прогиб в центральном сечении пластины, выполнив расчет при  $M = N = 5$  (рис. 7.12):

```
>wX:=changecoords(w(x,y),[x,y],polar);
plot(subs(y=Pi/2,wX),x=0..r,font=[Courier,bold,13],
labelfont=[Courier,bold,13],gridlines=true,
title=cat("Прогиб, M = N = ",convert(M,string)));
```

Из сравнения рисунков 7.10 и 7.12 видно, что для вычисления прогиба достаточно ограничиться значениями  $M = N = 3$ .

Для определения моментов и напряжений достаточно ограничиться значениями  $M = N = 5$  (рис. 7.13).

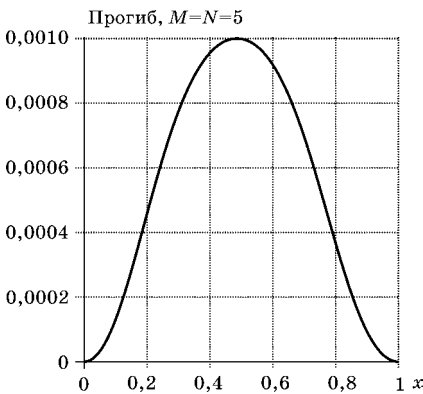


Рис. 7.12  
Прогиб в центральном сечении пластины

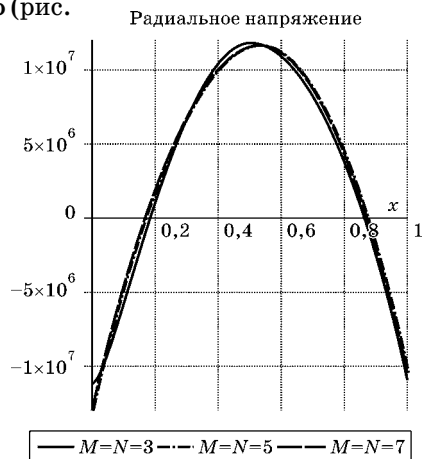


Рис. 7.13  
Сравнение решений для нормального напряжения в центральном сечении

Энергетический метод особенно удобен при исследовании составных конструкций, составленных из нескольких частей с различными физико-геометрическими параметрами. При использовании подходов, основанных на рассмотрении условий равновесия таких конструкций, необходимо составлять уравнения для каждой части в отдельности и добавлять условия неразрывности, которые отражают тот факт, что перемещения частей в местах их соединения непрерывны, а силы, с которыми они действуют друг на друга, представляют собой действие и равное ему противодействие (реакцию). Применяя энергетический метод с выбранными выражениями для перемещений, удовлетворяющими условиям непрерывности, необходимо только использовать суммарную энергию деформации, полученную суммированием внутренних энергий деформаций, накапливаемых в каждой части при таких перемещениях, и решать задачу точно так же, как и в случае отдельной пластины.

Пусть прямоугольная пластина ( $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ) нагружена поперечной нагрузкой  $q(x, y)$  и подкреплена ребрами жесткости, расположенными параллельно осям  $x$  и  $y$  по линиям  $x = x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, K_1$ ;  $y = y_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, K_2$ . Будем предполагать, что ребра изготовлены из относительно тонкого материала и имеют открытого профиля поперечное сечение (типа швеллера, двутавра или Z-образного профиля); при этом их жесткость на кручение мала по сравнению с изгибной жесткостью и, таким образом, ею можно пренебречь. Тогда суммарную энергию деформации можно представить в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a D \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy - \int_0^b \int_0^a q w dx dy + \\ + \sum_{i=1}^{K_1} \frac{EJ_{1,i}}{2} \int_0^b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \Big|_{x=x_i} dy + \sum_{j=1}^{K_2} \frac{EJ_{2,j}}{2} \int_0^b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \Big|_{y=y_j} dx,$$

где  $EJ_{1,i}$ ,  $EJ_{2,j}$  — жесткости ребер при изгибе, расположенных в направлениях  $x = x_i$ ,  $y = y_j$  соответственно; жесткости следует вычислять относительно средней поверхности пластины.

Если ребра имеют жесткость на кручение такую, что ею нельзя пренебречь, что обычно бывает в том случае, когда ребро имеет форму замкнутой трубы, то к выражению суммарной энергии деформации следует добавить выражения для энергии деформации кручения ребер; для этой энергии можно записать

$$\sum_{i=1}^{K_1} \frac{GJ_{1,i}}{2} \int_0^b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \Big|_{x=x_i} dy + \sum_{j=1}^{K_2} \frac{GJ_{2,j}}{2} \int_0^b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \Big|_{y=y_j} dx,$$

где  $GJ_{1,i}$ ,  $GJ_{2,j}$  — жесткости ребер при кручении,  $G = E/[2(1+\nu)]$  — модуль сдвига.

Если пластина жестко закреплена по контуру, то функционал энергии упрощается и имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b D \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right\} dx dy - \int_0^a \int_0^b q w dx dy + \sum_{i=1}^{K_1} \frac{EJ_{1,i}}{2} \int_0^b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \Big|_{x=x_i} dy + \sum_{j=1}^{K_2} \frac{EJ_{2,j}}{2} \int_0^a \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \Big|_{y=y_j} dx.$$

**Пример 4. Изгиб ребристой прямоугольной пластины.** Пусть прямоугольная пластина ( $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ) нагружена постоянной равномерно распределенной поперечной нагрузкой  $q(x, y) = q_0$  и подкреплена ребрами жесткости, расположенными параллельно оси  $x$  по линиям  $y = y_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, K$ . Ребра жесткости — тавры: высота стенки  $h_s = 0,6$  м; толщина стенки  $t_s = 0,02$  м; ширина полки  $b_p = 0,35$  м; толщина полки  $t_p = 0,03$  м. Координаты расположения ребер:  $y_1 = 1$  м,  $y_2 = 2$  м,  $y_3 = 3$  м; размеры в плане  $a = 4$  м,  $b = 4$  м (рис. 7.14).

Рассматриваемая задача является хорошей расчетной моделью плоского стального затвора гидротехнических сооружений (ригельного либо стоечного, типов).

*Решение.* Решение поставленной задачи выполним в системе аналитических вычислений Maple. Размерности физических величин — в системе СИ: метры, Паскали.

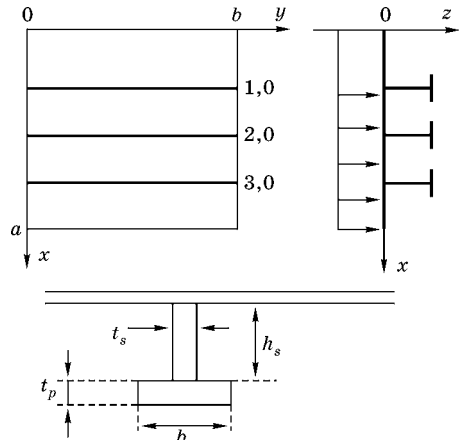


Рис. 7.14  
Схема к примеру 4

```
>restart;
>interface(displayprecision = 3);
```

Функционал полной потенциальной энергии в случае защемленной по контуру пластины:

```
>U:=E*h^3/(24*(1-nu^2))*int((diff(w(x,y),x,x)+
diff(w(x,y),y,y))^2,[x=0..a,y=0..b])
-int(q(x,y)*w(x,y),[x=0..a,y=0..b])+
sum(E*J[j]/2*int(diff(w(x,Y[j]),x,x)^2,[x=0..a]),'j'=1..K);
```

Процедура формирования и решения системы уравнений по Ритцу:

```
>Ritz:=proc(Mbeg,M,Nbeg,N,B)
local eqns,vars,eq,m,n,NumberEquations,NumberVariables;
global A;
eqns:={}; vars:={}; m:='m'; n:='n';
for m from Mbeg to M do
for n from Nbeg to N do
vars:=vars union {c[m,n]};
eq[m,n]:=diff(A,c[m,n])=0;
```

```

eqns:=eqns union {eq[m,n]}
end do;
end do;
NumberEquations:=nops(eqns);
NumberVariables:=nops(vars);
print(`Контроль формирования основной системы:`);
print(cat(`Количество уравнений NumberEquations = `,
convert(NumberEquations,string)));
print(cat(`Количество неизвестных NumberVariables = `,
convert(NumberVariables,string)));
B:=fsolve(eqns,vars,fulldigits);
end proc:

```

Процедура вычисления момента инерции сечения в форме тавра относительно оси, лежащей в срединной плоскости пластины:

```

>rib_rJ:=proc(h,hs,ts,bp,tp);
evalf(ts*(hs^3)/12+((hs+h)^2)*ts*hs/4+bp*(tp^3)/12+
((hs+(tp+h)/2)^2)*tp*bp);
end proc:

```

Процедуры-функции вычисления изгибающего момента и максимального нормального напряжения в пластине:

```

>Mx:=(x,y)->-E*h^3*(diff(w(x,y),x,x)+nu*(diff(w(x,y),y,y)))
/(12-12*nu^2);
>sigma[x,max]:=(x,y)->6*Mx(x,y)/h^2:

```

Выбираем базисные функции, удовлетворяющие граничным условиям заземления на контуре:

```

>phi:=(x,y,i,j)->(a-x)^2*(b-y)^2*x^2*y^2*x^(i-1)*y^(j-1):

```

Задаем аппроксимацию прогиба:

```

>W:=proc(x,y,M,N) local i,j;
sum(sum(c[i,j]*phi(x,y,i,j),j=1..N),i=1..M)
end proc:

```

Задаем параметры пластины:

```

>h:=0.1e-1:nu:=0.3:E:=2.2*10^11:Dcil:=E*h^3/(12*(1-nu^2)):
a:=4.:b:=4.:

```

Определяем нагрузку:

```

>q:=(x,y)->q0; q0:=10000.;

```

Определяем количество, расположение и геометрические характеристики ребер жесткости:

```

>K:=3;Y:=[1.,2.,3.];J:=array(1..3);rJy0:=array(1..3);
>hs:=0.6; ts:=0.2e-1; bp:=0.35; tp:=0.3e-1; i:='i';
>for i to K do
J[i]:=rib_rJ(h,hs,ts,bp,tp);zci[i]:=rib_zc(h,hs,ts,bp,tp)
end do:

```



Выполняем расчет:

```
>w:=(x,y)->W(x,y,M,N):
```

```
>M:=15: N:=15: Digits:=50:
```

Вычисляем полную потенциальную энергию:

```
>i:='i': j:='j': A:=value(U):
```

Определяем коэффициенты разложения методом Ритца:

```
> Ritz(1,M,1,N,B): assign(B):
```

*Контроль формирования основной системы:*

*Количество уравнений NumberEquations = 225*

*Количество неизвестных NumberVariables = 225*

Изобразим пространственную эпюру прогиба (рис. 7.15):

```
>plot3d(w(x,y),x=0..a,y=0..b,axes=frame,  
title=cat("Прогиб w(x, ",convert(2,string),"), M = N = ",  
convert(M,string)),axesfont=[Helvetica,roman,14],  
font=[Helvetica,roman,14],labelfont=[Helvetica,roman,14]);
```

Можно отобразить плотность прогибов (рис. 7.16):

```
>plots[densityplot](w(x,y),x=0..a,y=0..b,  
grid=[20,20],axes=BOXED,symbolsize=15,  
font=[Times,roman,14],  
labelfont=[Helvetica,roman,14],  
title=cat("Сумма при N = M = ",convert(N,string)));
```

Наглядное представление о деформациях дает и контурный рисунок (рис. 7.17):

```
>pcont:=plots[contourplot](w(x,y),x=0..a,y=0..b,  
grid=[128,128],axes=BOXED,symbolsize=14,  
font=[Times,roman,14],  
labelfont=[Helvetica,roman,14],gridlines=true):  
plots[display]({pcont},axes=BOXED);
```

Прогиб  $w(x, 2)$ ,  $M=N=15$

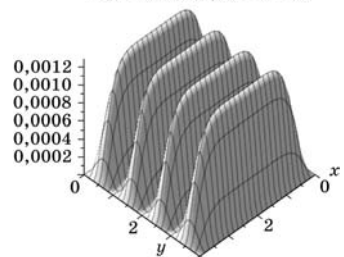


Рис. 7.15  
Пространственная эпюра прогиба

Сумма при  $N=M=15$

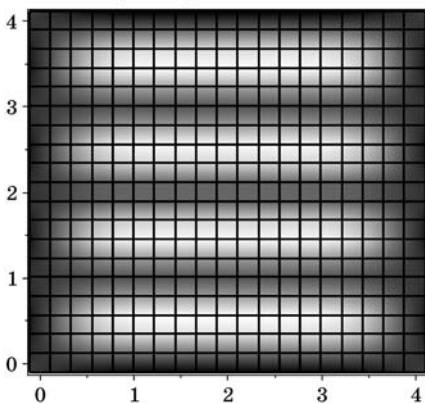


Рис. 7.16  
Плотность распределения прогиба

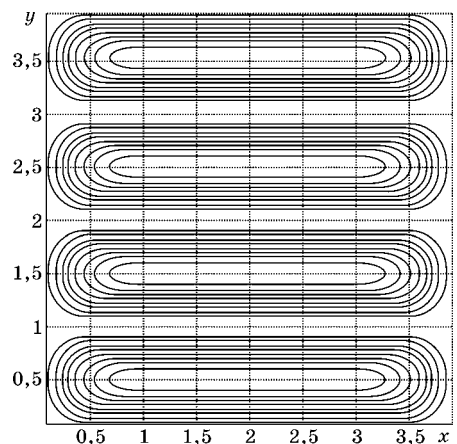
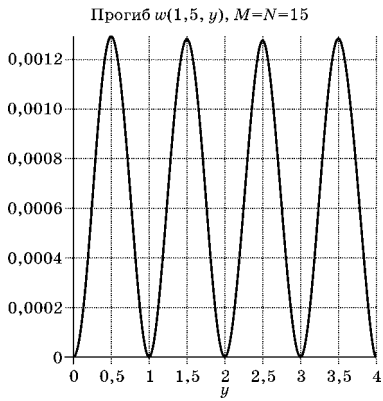


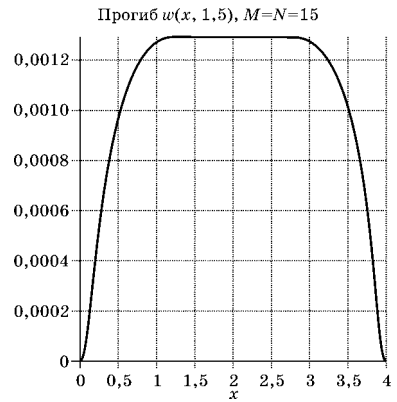
Рис. 7.17  
Изолинии прогибов

Прогибы по сечениям (рис. 7.18 и 7.19):

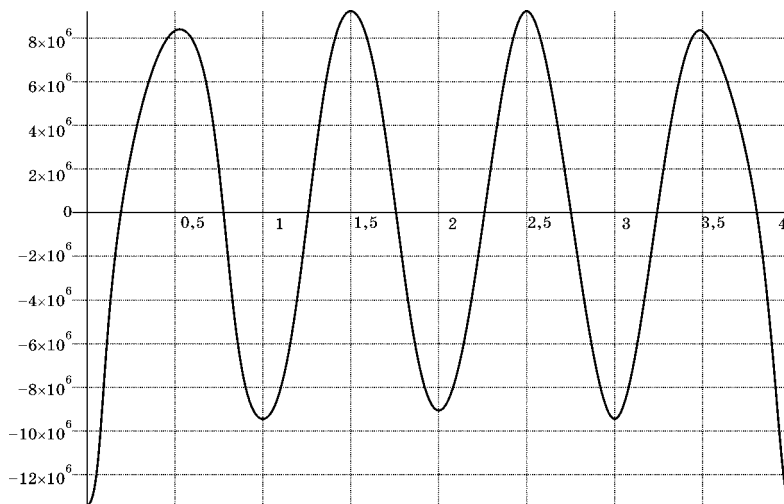
```
>plot(w(1.5,y),y=0..b,axes=normal,
xtickmarks=10,ytickmarks=10,
title=cat("Прогиб w(",
convert(1.5,string),",y), M = N = ",convert(M,string)),
axis=[gridlines=[10,color=blue]],
axesfont=[Helvetica,roman,14],font=[Helvetica,roman,14],
labelfont=[Helvetica,roman,14]);
>plot(w(x,1.5),x=0..a,axes=normal,
xtickmarks=10,ytickmarks=10,
title=cat("Прогиб w(x,",
convert(1.5,string),"), M = N = ",convert(M,string)),
axis=[gridlines=[10,color=blue]],
axesfont=[Helvetica,roman,14],font=[Helvetica,roman,14],
labelfont=[Helvetica,roman,14]);
```



**Рис. 7.18**  
Прогиб в сечении  $x = 1,5$  м



**Рис. 7.19**  
Прогиб в сечении  $y = 1,5$  м



**Рис. 7.20**  
Напряжение  
в сечении  
 $x = 1,5$  м

Эпюра нормальных напряжений в сечении (рис. 7.20):

```
>sigma[x,max](x,y):SigmaXmax:=unapply(%,x,y):
>plot(SigmaXmax(1.5,y),y=0..b,axes=normal,
xtickmarks=10,ytickmarks=10,
title=
cat("Нормальное напряжение SigmaXmax(1.5, ",y), M = N = ",
convert(M,string)),axis=[gridlines=[10,color=blue]],
axesfont=[Helvetica,roman,14],font=[Helvetica,roman,14],
labelfont=[Helvetica,roman,14]);
```

**Пример 5. Изгиб ребристой секторальной пластины.** Рассмотрим пластину постоянной толщины  $h = 0,01$  м, имеющую форму полукруга радиуса  $r = 1$  м. Предположим, что пластина жестко заделана по контуру и находится под действием внешней постоянной равномерно распределенной поперечной нагрузки  $q(x, y) = q_0$ , нормальной к срединной плоскости. Пластина подкреплена ребрами жесткости, расположенными вдоль линий  $x_1 = -3r/8$  м,  $x_2 = 3r/8$  м,  $y_1 = r/2$  м. Ребра жесткости прямоугольного поперечного сечения: высота стенки  $h_s = 0,6$  м; толщина стенки  $t_s = 0,02$  м.

*Решение.* Решение поставленной задачи выполним в системе аналитических вычислений Maple. С помощью графических структур изобразим пластину (рис. 7.21):

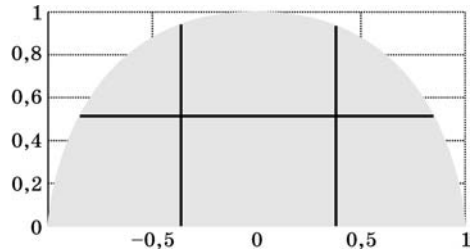


Рис. 7.21  
Секторальная пластина, подкреплённая ребрами жесткости

```
>restart;
>with(plottools):
>r:=1.:
>s:=plottools[sector]([0,0],1,0..Pi,color="Khaki"):
L1:=plottools[line]([-3/8,0],[-3/8,(1-(-3/8)^2)^(1/2)],
color=black,thickness=5):
L2:=plottools[line]([3/8,0],[3/8,(1-(3/8)^2)^(1/2)],
color=black,thickness=5):
L3:=plottools[line]([-1-(1/2)^2)^(1/2),1/2],
[(1-(1/2)^2)^(1/2),1/2],color=black,thickness=5):
plots[display]([s,L1,L2,L3],
font=[Courier,bold,12],labelfont=[Courier,bold,12],
gridlines=true,scaling=constrained,axes=framed);
```

Обозначим плотность полной потенциальной энергии заземленной пластины через  $F(x, y)$ :

```
>F:=(x,y)->
(diff(w(x,y),x,x)+diff(w(x,y),y,y))^2-2*q(x,y)*w(x,y)/Dcil;
```

$$F := (x, y) \rightarrow \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} w(x, y) \right)^2 - \frac{2q(x, y)w(x, y)}{Dcil}$$

Функции для вычисления плотности потенциальной энергии ребер:

```
>fy:=(y,A)->(diff(w(A,y),y,y))^2; # ребра вдоль оси y
fx:=(x,A)->(diff(w(x,A),x,x))^2; # ребра вдоль оси x
```

$$f_y := (y, A) \rightarrow \left( \frac{\partial^2 w(A, y)}{\partial y^2} \right)^2$$

$$f_x := (x, A) \rightarrow \left( \frac{\partial^2 w(x, A)}{\partial x^2} \right)^2$$

Процедура формирования и решения системы уравнений по Ритцу:

```
>Ritz:=proc(Mbeg,M,Nbeg,N,B)
local eqns,vars,eq,m,n,NumberEquations,NumberVariables;
global U;
eqns:={}; vars:={}; m:='m'; n:='n';
for m from Mbeg to M do
for n from Nbeg to N do
vars:=vars union {c[m,n]};
eq[m,n]:=diff(U,c[m,n])=0;
eqns:=eqns union {eq[m,n]}
end do;
end do;
NumberEquations:=nops(eqns);
NumberVariables:=nops(vars);
print(`Контроль формирования основной системы:`);
print(cat(`Количество уравнений NumberEquations = `,
convert(NumberEquations,string)));
print(cat(`Количество неизвестных NumberVariables = `,
convert(NumberVariables,string)));#print(eqns);
B:=fsolve(eqns,vars,fulldigits)
end proc;
```

Подготовим формулы для расчета изгибающего момента и нормального напряжения:

```
>Mx:=(x,y)->
-E*h^3*(diff(w(x,y),x,x)+nu*(diff(w(x,y),y,y)))/
(12-12*nu^2);
sigma[x,max]:=(x,y)->6*Mx(x,y)/h^2;
```

Выбираем базисные функции, удовлетворяющие граничным условиям заземления на контуре:

```
>phi:=(x,y,i,j)->(1-x^2-y^2)^2*y^2*x^(i-1)*y^(j-1);
```

$$\phi := (x, y, i, j) \rightarrow (1 - x^2 - y^2)^2 y^2 x^{i-1} y^{j-1}$$

Задаем уравнения, определяющие контур пластины:

```
>bc:={y=0, -x^2-y^2+1=0};
```

$$bc := \{y = 0, -x^2 - y^2 + 1 = 0\}$$

Задаем вектор нормали к контуру (здесь  $\theta$  — полярный угол):

```
>v1:=<cos(theta),sin(theta)>;
```

$$v1 := \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

Проверяем выполнение граничных условий для базисных функций:

```
>VectorCalculus[DirectionalDiff]
```

```
(phi(x,y,i,j),v1,cartesian[x,y]):
```

```
simplify(subs(bc,%));
```

0

```
>phi(x,0,i,j);
```

0

Задаем аппроксимацию прогиба:

```
>W:=(x,y,M,N)->sum(sum(c[i,j]*phi(x,y,i,j),  
'j'=1..N),'i'=1..M);
```

$$W := (x, y, M, N) \rightarrow \sum_{i=1}^M \left( \sum_{j=1}^N c_{i,j} \phi(x, y, i, j) \right)$$

Задаем параметры пластины и нагрузку:

```
>q:=(x,y)->q0:
```

```
>h:=0.01: q0:=10000.:
```

```
>nu:=0.3: E:=2.2*10^11:
```

```
>w:=(x,y)->W(x,y,M,N):
```

```
>Digits:=25:interface(displayprecision=5):
```

```
>M := 7: N := 7:
```

Проверяем выполнение граничных условий для функции прогиба:

```
>VectorCalculus[DirectionalDiff](w(x,y),v1,cartesian[x,y]):
```

```
simplify(% ,bc);w(x,0);
```

0

0

Задаем параметры ребер (сечение ребра — прямоугольник: ширина  $ts$ , высота  $hs$ ):

```
>rib_rJ:=proc(h,hs,ts,bp,tp);
evalf( ts*(hs^3)/12+((hs+h)^2)*ts*hs/4+bp*(tp^3)/12+
((hs+(tp+h)/2)^2)*tp*bp);
end proc:
>K1:=2: J1:=array(1..K1): X:=array(1..K1,[-3*r/8,3*r/8]):
K2:=1: J2:=array(1..K2): Y:=array(1..K2,[r/2]):
>hs:=0.6: ts:=0.2e-1: bp:=0: tp:=0: i:='i': j:='j':
for i to K1 do
J1[i]:=rib_rJ(h,hs,ts,bp,tp):
end do:
>for j to K2 do
J2[j]:=rib_rJ(h,hs,ts,bp,tp):
end do:
```

Вычисляем плотность энергии пластины-обшивки:

```
>i:='i':j:='j':
st:=time():Fp:=simplify(F(x,y)):time()-st;
```

2.761

Здесь мы определили и время расчета плотности энергии пластины — 2,8 с.  
Вычисляем полную потенциальную энергию:

```
>st:=time():
Up:=VectorCalculus[int]
(Fp,[x,y]=Sector(Circle(<0,0>,r),0,Pi)):
time()-st;
```

1284.871

Время расчета энергии пластины — 1284,9 с.

```
>Ury:=sum(E*J1[e]/2*(int(fy(y,X[e]),
y=0..sqrt(r^2-X[e]^2))),e=1..K1):
>Urx:=sum(E*J2[z]/2*(int(fx(x,Y[z]),
x=-sqrt(r^2-Y[z]^2)..sqrt(r^2-Y[z]^2))),z=1..K2):
>U:=Up+Urx+Ury:
```

Определяем коэффициенты разложения методом Рунца:

```
>Ritz(1,M,1,N,B):
```

*Контроль формирования основной системы:*  
*Количество уравнений NumberEquations = 49*  
*Количество неизвестных NumberVariables = 49*

```
>assign(B):
>WW:=changecoords(w(x,y),[x,y],polar):
```

Пространственная эпюра прогиба  $w(x, y)$  (рис. 7.22):

```
>plot3d([x,y,WW],x=0..r,y=0..Pi,coords=cylindrical,
font=[Courier,bold,13],
labelfont=[Courier,bold,13],color=gray);
```

Прогиб в центральном сечении (рис. 7.23):

```
>wX:=changecoords(w(x,y),[x,y],polar):
plot(subs(y=Pi/2,wX),x=0..r,font=[Courier,bold,13],
labelfont=[Courier,bold,13],gridlines=true,
title=cat("Прогиб, M = N = ",convert(M,string)));
```

Эпюра радиального напряжения в центральном сечении пластины (рис. 7.24):

```
>SigmaX:=changecoords(sigma[x,max](x,y),[x,y],polar):
>pS||M:=plot(subs(y=Pi/2,SigmaX),x=0..r,
font=[Courier,bold,13],labelfont=[Courier,bold,13],
gridlines=true,title="Радиальное напряжение",
legend=cat("M = N = ",convert(M,string)));
>plots[display](pS||M);
```

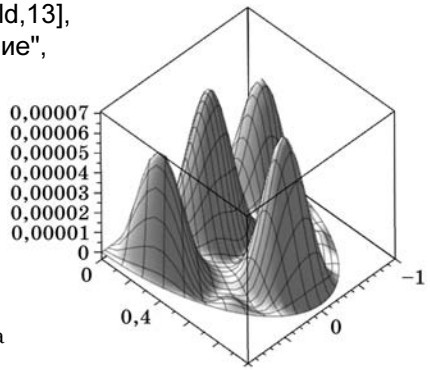


Рис. 7.22  
Пространственная эпюра  
прогиба  $w(x, y)$

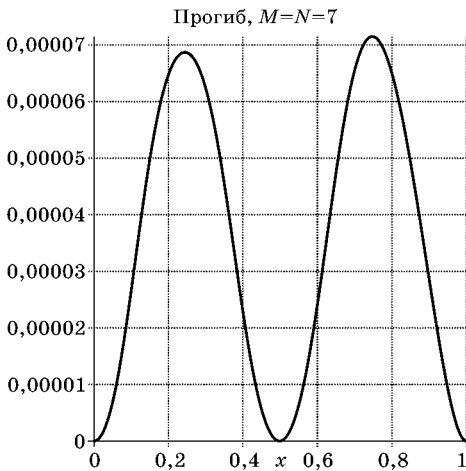


Рис. 7.23  
Прогиб в центральном сечении

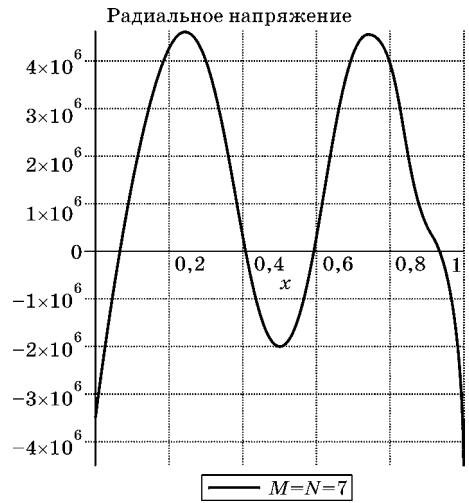


Рис. 7.24  
Нормальное напряжение в центральном сечении

**РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА  
ВТОРОГО РОДА МЕТОДОМ БУБНОВА — ГАЛЁРКИНА**

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt + f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

где  $\varphi(x)$  — неизвестная функция;  $K(x, t)$  — ядро уравнения;  $f(x)$  — заданная непрерывная функция (свободный член интегрального уравнения);  $x$  и  $t$  — действительные переменные, изменяющиеся в интервале  $(a, b)$ ;  $\lambda$  — числовой множитель.

Решение данного уравнения по методу Бубнова — Галёркина ищется так: выбираем систему функций  $\{u_n(x)\}$ , полную и такую, что при любом  $n$  функции системы линейно независимы, и ищем приближенное решение  $\varphi_n(x)$  в виде

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k u_k(x).$$

Коэффициенты  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) определяются из следующей линейной системы:

$$(\varphi_n, u_i) = \lambda \left( \int_a^b K(x, t)\varphi_n(t)dt, u_i \right) + (f, u_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где, как обычно, введено обозначение скалярного произведения  $(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$ .

Если значение  $\lambda$  не является характеристическим, то при достаточно больших значениях  $n$  система однозначно разрешима и при  $n \rightarrow \infty$  приближенное решение  $\varphi_n(x)$  стремится в метрике пространства  $L_2(a, b)$  к точному решению  $\varphi(x)$  исходного уравнения.

**Пример 6.** Методом Бубнова — Галёркина решить уравнение

$$\varphi(x) = \int_{-1}^1 xt\varphi(t)dt + x.$$

*Решение.* Задаем уравнение:

>eq := phi(x) = x + int(x\*t\*phi(t), t = -1 .. 1);

$$eq := \phi(x) = x + \int_{-1}^1 xt\phi(t)dt$$

Решим уравнение стандартной функцией Maple:

>intsolve(eq, phi(x));

$$\phi(x) = 3x$$



Для последующего сравнения определим точное решение как функцию:

```
>u:=unapply(rhs(%),x);
```

$$u := x \rightarrow 3x$$

В качестве полной системы функций на  $[-1, 1]$  выбираем систему полиномов Лежандра  $P_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  Для этого подключаем пакет:

```
>with(orthopoly):
```

Приближенное решение будем искать в виде:

```
>Phi:=(x,n)->sum(c[k]*P(k,x),k=0..n);phi:=x->Phi(x,n);
```

$$\Phi := (x, n) \rightarrow \sum_{k=0}^n c_k P(k, x)$$
$$\phi := x \rightarrow \Phi(x, n)$$

Подставляем это представление решения в уравнение:

```
>eq1:=eq;
```

$$eq1 := \sum_{k=0}^n c_k P(k, x) = x + \int_{-1}^1 xt \left( \sum_{k=0}^n c_k P(k, t) \right) dt$$

Формируем и решаем систему Бубнова — Галёркина:

```
>n:=3;
```

```
>eqns:={}:var:={}
```

```
>for i from 0 to n do
```

```
p[i]:=int(lhs(eq1)*P(i,x),x=-1..1)=
```

```
int(rhs(eq1)*P(i,x),x=-1..1);
```

```
eqns:=eqns union {p[i]}:var:=var union {c[i]}:
```

```
end do:
```

```
print(eqns);
```

$$\left\{ 2c_0 = 0, \frac{2}{3}c_1 = \frac{2}{3} + \frac{4}{9}c_1, \frac{2}{5}c_2 = 0, \frac{2}{7}c_3 = 0 \right\}$$

```
>res:=solve(eqns,var);
```

$$res := \{c_0 = 0, c_1 = 3, c_2 = 0, c_3 = 0\}$$

```
>assign(%);
```

```
>Phi(x,n);
```

$$3x$$

Как видим, в результате получили точное решение. Это связано с тем, что точное решение оказалось пропорционально полиному  $P_1(x) = x$ .

**Пример 7.** Методом Бубнова — Галёркина решить уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{[2 + \cos(x)]\varphi(t)}{2 + \cos(t)} dt + e^x \sin(x).$$

*Решение.* Задаем уравнение:

```
>interface(displayprecision=5):
>eq:=phi(x)=exp(x)*sin(x)+int((2+cos(x))*phi(t)/(2+cos(t)),
t=0..0.5);
```

$$eq := \phi(x) = e^x \sin(x) + \int_0^{0.50000} \frac{(2 + \cos(x))\phi(t)}{2 + \cos(t)} dt$$

Решим уравнение стандартной функцией Maple:

```
>intsolve(eq, phi(x));
```

$$\phi(x) = 1.00000e^x \sin(x) + 0.23416 + 0.11708 \cos(x)$$

Для последующего сравнения определим точное решение как функцию:

```
>u:=unapply(rhs(%),x);
```

$$u := x \rightarrow 1.00000e^x \sin(x) + 0.234155 + 0.117078 \cos(x)$$

В качестве системы координатных функций снова выбираем систему полиномов Лежандра  $P_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  Для этого подключаем пакет:

```
>with(orthopoly):
```

Приближенное решение будем искать в виде:

```
>Phi:=(x,n)->sum(c[k]*P(k,x),k=0..n);phi:=x->Phi(x,n);
```

$$\Phi := (x, n) \rightarrow \sum_{k=0}^n c_k P(k, x)$$

$$\phi := x \rightarrow \Phi(x, n)$$

Подставляем это представление решения в уравнение:

```
>n:=3:
>Digits:=50:
>with(IntegrationTools):
>Expand(eq);
```

$$c_0 + c_1 + c_2 \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} x^2 \right) + c_3 \left( \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x \right) = e^x \sin(x)$$

$$+ 0.33802c_0 - 2.31910c_1 + (1.20210 + 1.00000 \cdot 10^{-54} I) \cos(x)c_1$$

$$- 0.12629c_2 + 3.50543c_3 + (-1.80314 - 2.00000 \cdot 10^{-53} I) \cos(x)c_3$$

$$+ 0.16901 \cos(x)c_0 - 1.15955 \cos(x)c_1 + (2.40419 - 4.00000 \cdot 10^{-53} I)c_1$$

$$- 0.06314 \cos(x)c_2 + 1.75271 \cos(x)c_3 + (-3.60629 - 4.00000 \cdot 10^{-53} I)c_3$$

>evalc(lm(%));

$$0 = 1.0000010^{-54} \cos(x)c_1 - 2.0000010^{-53} \cos(x)c_3 - 4.0000010^{-53} c_1 - 4.0000010^{-53} c_3$$

Здесь мы видим, что мнимая часть пренебрежимо мала; отбрасываем ее, оставляя только действительную часть:

>eq1:=evalc(Re(%));

$$eq1 := c_0 + c_1 x - \frac{1}{2} c_2 + \frac{3}{2} c_2 x^2 + \frac{5}{2} c_3 x^3 - \frac{3}{2} c_3 x = e^x \sin(x) + 0.33802c_0 + 0.08509c_1 + 0.04255\cos(x)c_1 - 0.12629c_2 - 0.10086c_3 - 0.05043\cos(x)c_3 + 0.16901\cos(x)c_0 - 0.06314\cos(x)c_2$$

Формируем и решаем систему Бубнова — Галёркина:

```
>eqns:={}:var:={}:
>for i from 0 to n do
p[i]:=int(lhs(eq1)*P(i,x),x=-1..1)=
int(rhs(eq1)*P(i,x),x=-1..1);
eqns:=eqns union {p[i]};var:=var union {c[i]};
end do;
print(eqns);
```

$$\left\{ \begin{aligned} 2c_0 &= 0.66349 + 0.96048c_0 + 0.24179c_1 - 0.35884c_2 - 0.28660c_3, \\ \frac{2}{3}c_1 &= 0.79013, \\ \frac{2}{5}c_2 &= -0.02097c_0 - 0.00528c_1 + 0.00783c_2 + 0.00626c_3 + 0.026455, \\ \frac{2}{7}c_3 &= 0.03368 \end{aligned} \right\}$$

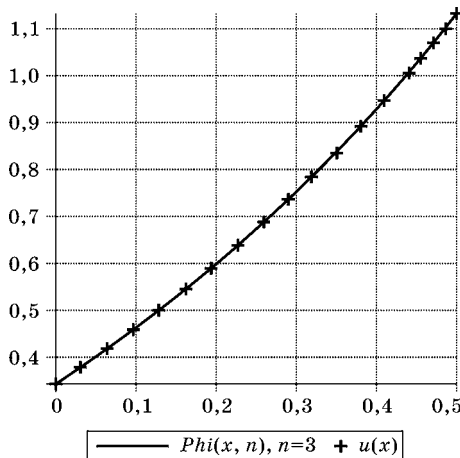


Рис. 7.25  
Сравнение решений

```
>res:=solve(eqns,var);
```

```
res := {c0 = 0.66573, c1 = 1.18520, c2 = 0.62492, c3 = 0.11786}
```

```
>assign(%);
```

```
>Phi(x,n);
```

```
0.35327 + 1.00840x + 0.93738x2 + 0.29466x3
```

Изобразим на графике точное и приближенное решения (рис. 7.25):

```
>plot([Phi(x,n),u(x)],x=a..b,style=[line,point],  
gridlines=true,font=[Times,bold,14],symbol=cross,  
numpoints=1,color=[blue,red],symbolsize=25,  
labelfont=[Times,bold,14],  
legend=[cat("Phi(x,n), n = ",convert(n,string)),"u(x)");
```

Как видим, приближенное решение, полученное по методу Бубнова — Галёркина, вполне удовлетворительно.

## ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 7

1. Какие задачи решает вариационное исчисление? Приведите примеры вариационных задач.
2. Что называется функционалом? Приведите примеры функционалов.
3. В чем состоит основная задача вариационного исчисления? Сформулируйте аналогичную задачу дифференциального исчисления.
4. Напишите уравнение Эйлера в случае простейшей вариационной задачи. Какой порядок имеет это уравнение?
5. Что такое экстремаль? Что можно сказать о существовании и единственности экстремали?
6. Сформулируйте необходимое условие экстремума в случае простейшей вариационной задачи.
7. Сформулируйте вариационную задачу для функционалов, содержащих производные высших порядков.
8. Напишите уравнение Эйлера для функционалов, содержащих производные высших порядков.
9. Дайте решение задачи об изгибе балки вариационным методом.
10. Сформулируйте вариационную задачу, функционал которой представляется кратным интегралом.
11. Напишите уравнение Остроградского — Эйлера для функционала, представляемого двойным интегралом.
12. Укажите связь задачи Дирихле для уравнения Лапласа с вариационной задачей.
13. Какие методы называются прямыми методами вариационного исчисления?
14. Что такое минимизирующая последовательность?
15. Изложите основную идею метода Ритца.
16. Что такое координатные (базисные) функции? Каким условиям они должны удовлетворять?
17. Что такое условие полноты системы функций?
18. Какие функции называются линейно независимыми?
19. Приведите наиболее часто используемые системы координатных функций.
20. Дайте точное решение методом Гринберга задачи о стационарном распределении температуры в бруске прямоугольного сечения.
21. Дайте приближенное решение вариационным методом задачи о стационарном распределении температуры в бруске прямоугольного сечения и сравните его с точным решением.
22. Дайте вывод уравнения малых колебаний струны вариационным методом.
23. Дайте вывод уравнения продольных колебаний стержня вариационным методом.

24. Дайте вывод уравнения малых поперечных колебаний мембраны вариационным методом.
25. Сформулируйте основные краевые задачи для уравнений Пуассона и Лапласа и их вариационные аналоги.
26. Дайте определение оператора и функционала.
27. Какие операторы называют симметричными?
28. Дайте определение положительного и положительно определенного оператора.
29. Дайте определение скалярного произведения функций. Как определяется норма функции?
30. Какие функции называют ортогональными, ортонормированными?

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Решить следующие задачи методами Ритца, Бубнова — Галёркина и конечно-разностным методом Эйлера. Полученные приближенные решения сравнить с точными решениями.

$$1) J[y] = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y^2 - 8xy + 2x^2) dx; \quad y(-1) = 3; \quad y(1) = 1;$$

$$2) J[y] = \int_{-1}^1 (y'^2 - 4y^2 + 2xy - x^2) dx; \quad y(-1) = 2; \quad y(1) = 4;$$

$$3) J[y] = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y^2 + 4x^2y + x \cos x) dx; \quad y(-1) = 2; \quad y(1) = 0,5;$$

$$4) J[y] = \int_0^2 (y'^2 - 4y' \sin 2x - x^2) dx; \quad y(0) = 1; \quad y(2) = -1;$$

$$5) J[y] = \int_1^3 (y'^2 - y' \ln x + 2x) dx; \quad y(3) = -1; \quad y(1) = 2;$$

$$6) J[y] = \int_{0,5}^{1,5} (y' + y'^2 \sin 2x - \cos 2x) dx; \quad y(0,5) = 1; \quad y(1,5) = 2;$$

$$7) J[y] = \int_1^2 (y' + xy'^2 - x^2y') dx; \quad y(1) = 2; \quad y(2) = -1;$$

$$8) J[y] = \int_0^2 (y' + y'^2 + x^2y'^2) dx; \quad y(0) = 1; \quad y(2) = -2;$$

$$9) J[y] = \int_2^4 \left( y'^2 + \frac{2y'}{1-x^2} + e^{3x} \right) dx; \quad y(2) = -1; \quad y(4) = 2;$$

$$10) J[y] = \int_{-1}^1 (y'^2 + 2y'e^x \sin x - e^x \cos x) dx; \quad y(-1) = 2; \quad y(1) = 3.$$

2. Для следующих функционалов получить дифференциальное уравнение Остроградского — Эйлера; построить приближенное решение задачи методом Ритца; исследовать сходимость полученного приближенного решения:

- 1)  $J[z] = \iint_D (z_x^2 + z_y^2 + 2xyz) dx dy; D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2; \\ 0 \leq y \leq 1; \end{cases} z|_C = \frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{100};$
- 2)  $J[z] = \iint_D (z_x^2 + 3z_y^2 + 2yz) dx dy; D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2; \\ 0 \leq y \leq 1; \end{cases} z|_C = \frac{x^2}{100} + \frac{y}{50};$
- 3)  $J[z] = \iint_D (z_x^2 + 5z_y^2 + 2yz \sin x) dx dy; D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2; \\ 0 \leq y \leq 1; \end{cases} z|_C = \frac{x^2}{200} - \frac{y}{100};$
- 4)  $J[z] = \iint_D (3z_x^2 + z_y^2 + 2xz \cos y) dx dy; D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2; \\ -1 \leq y \leq 1; \end{cases} z|_C = \frac{x^2}{200} - \frac{y}{100};$
- 5)  $J[z] = \iint_D (5z_x^2 + z_y^2 + 2xyz) dx dy; D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2; \\ -1 \leq y \leq 1; \end{cases} z|_C = \frac{x + y^2}{200};$
- 6)  $J[z] = \iint_D (2z_x^2 - z_y^2 + 2xyz) dx dy; D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2; \\ 0 \leq y \leq 1; \end{cases} z|_C = \frac{x^2 + y^2}{100};$
- 7)  $J[z] = \iint_D (z_x^2 + 2z_y^2 + z^2 + 2xz \cos y) dx dy; D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2; \\ -1 \leq y \leq 1; \end{cases} z|_C = \frac{x^2}{100} - \frac{y}{60};$
- 8)  $J[z] = \iint_D (z_x^2 - 3z_y^2 + 2yz \cos x) dx dy; D: \begin{cases} -1 \leq x \leq 1; \\ 0 \leq y \leq 1; \end{cases} z|_C = \frac{x^2}{100} + \frac{y}{50};$
- 9)  $J[z] = \iint_D (2z_x^2 - 3z_y^2 + 2x^2 yz) dx dy; D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2; \\ 0 \leq y \leq 2; \end{cases} z|_C = \frac{x}{50} + \frac{y^2}{80};$
- 10)  $J[z] = \iint_D (z_x^2 + 4z_y^2 + z^2 + 2xyz) dx dy; D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2; \\ -1 \leq y \leq 1; \end{cases} z|_C = \frac{x + y^2}{100}.$

3. Уравнение, описывающее изменение температуры  $T$  в вязкой жидкости, текущей между двумя параллельными пластинами ( $y = 0, y = 2H$ ), имеет вид

$$d^2T/dy^2 = -[4U^2\mu/(H^4k)](H - y)^2,$$

где  $\mu, k$  и  $U$  — коэффициент вязкости, коэффициент теплопроводности и максимальная скорость жидкости соответственно. Пусть  $\mu = 0,1, k = 0,08, H = 3,0$  и  $U = 3,0$ . Используя метод Бубнова — Галёркина, найти распределение температуры, если на одной пластине поддерживается температура  $T = 0$ , а через другую теплоотдача отсутствует (т. е.  $dT/dy = 0$ ).

4. Решить задачу 3, если на одной пластине поддерживается температура  $T = 0$ , а на другой  $T = 5$ .

5. Рассмотреть одномерную установившуюся теплопередачу в стержне длиной 10 см и диаметром 1 см. На одном конце стержня поддерживается температура  $500^\circ\text{C}$ , тогда как тепловая энергия поступает через другой конец со скоростью  $200 \text{ Вт/см}^2$ . Пусть  $k = 75 \text{ Вт/см}^\circ\text{C}$  и тепло генерируется в стержне со скоростью  $150 T \text{ Вт/см}^2$  на единицу длины, где  $T$  — температура. Методом Бубнова — Галёркина вычислить распределение температуры. Показать сходимость приближенного решения к точному решению при возрастании числа элементов, используемых в аппроксимации.

6. Уравнение  $EId^4w/dx^4 + kw = q$  описывает отклонение балки, покоящейся на упругом основании жесткостью  $k$ . Здесь  $EI$  — постоянная жесткость балки на изгиб, а  $q$  — поперечная нагрузка на единицу ее длины. Пусть балка имеет единичную длину и закреплена в обоих концах так, что  $w|_{x=0,1} = dw/dx|_{x=0,1} = 0$ . Используя метод Ритца, найти отклонение балки, если  $q/(EI) = k/(EI) = 1$ . Сравнить результаты с точным решением.

7. Однородная тонкая упругая пластина  $\Omega$  с постоянной жесткостью  $D$  на изгиб свободно оперта вдоль контура  $\Gamma$  и находится под действием равномерной единичной поперечной нагрузки на единицу площади. Малое поперечное отклонение такой пластины описывается дифференциальным уравнением:  $\partial^4w/\partial x^4 + 2\partial^4w/\partial x^2\partial y^2 + \partial^4w/\partial y^4 = 1/D$  в  $\Omega$  и краевыми условиями  $w|_{\Gamma} = \partial^2w/\partial^2n|_{\Gamma} = 0$  на  $\Gamma$ . Найти отклонение для прямоугольной пластины  $|x| \leq 3, |y| \leq 2$ , используя метод Ритца.

8. Решить задачу 7 методом Бубнова — Галёркина.

9. В задачах упругого кручения призматических стержней встречается уравнение  $\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 = -2G\theta$ , где  $G$  — модуль упругого сдвига;  $\theta$  — угол скручивания для каждого сечения;  $\varphi$  — функция напряжений такая, что  $\varphi = 0$  на границах. Крутящий момент задается формулой  $T = 2\iint_{\Omega} \varphi dx dy$ , а касательное

напряжение по направлению  $n$  в сечении может быть получено по правилу  $\tau = \partial\varphi/\partial n$ . Требуется определить значение  $T$  и максимум касательного напряжения при заданном значении  $G\theta$  для прямоугольной области  $6 \times 4$ .

10. В некоторой двумерной задаче стационарной теплопроводности для квадрата со стороной длины 1 температура на сторонах  $x = \pm 1$  изменяется как  $1 - y^2$ , а на сторонах  $y = \pm 1$  — как  $1 - x^2$ . Используя метод Бубнова — Галёркина найти распределение температуры на квадрате.

11. В задаче 10 найти методом Ритца распределение температуры, используя аппроксимацию, удовлетворяющую краевым условиям только на сторонах  $x = \pm 1$ . Показать сходимость аппроксимации к краевому условию на сторонах  $y = \pm 1$ .

12. В задаче 6 выяснить, какие краевые условия являются естественными. Решить эту задачу методом Ритца для случая, когда балка свободно оперта на концах, используя аппроксимацию, не удовлетворяющую автоматически этим естественным краевым условиям. Краевые условия, соответствующие свободно опертой балке, имеют вид  $w = \partial^2w/\partial^2x = 0$  на обоих концах.

13. Решить задачу стационарной теплопроводности в материале, занимающем квадрат  $-1 \leq x, y \leq 1$ , если на сторонах  $y = \pm 1$  поддерживается температура  $1000^\circ\text{C}$ , тогда как на сторонах  $x = \pm 1$  задано условие  $\partial u/\partial n = -1 - u$ .

14. Трос с натяжением  $T$  закрепляется концами  $x = 0$  и  $x = 1$  и покоится на упругом основании жесткостью  $k$ . Когда трос подвергается поперечной нагрузке  $q$  на единицу длины, его отклонение  $w$  удовлетворяет уравнению  $d^2w/dx^2 - kw/T = -q/T$ . Решить это уравнение методом Ритца для случая  $k/T = 1, q/T = 1$ . Сравнить решение с точным ответом для этой задачи.

15. Решить задачу 14 методом Бубнова — Галёркина. Сравнить решение с точным ответом для этой задачи.

**16.** Решить уравнение  $d^2w/dx^2 + w = x$  с краевыми условиями  $w = 0$  при  $x = 0$  и  $dw/dx + w = 1$  при  $x = 1$  методом Рунге. Сравнить решение с точным ответом для этой задачи.

**17.** Показать, что решение краевой задачи  $d^2y/dx^2 + y = x$ ,  $y(0) = y(1) = 0$  сводится к отысканию минимума функционала  $J[y] = \int_0^1 [(y')^2 - y^2 + 2xy]dx$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ . Найти приближенное решение задачи о минимуме функционала  $J[y]$  и сравнить с точным решением.

**18.** Методом Рунге и конечно-разностным методом Эйлера найти приближенные решения следующих задач о минимуме функционалов. Сравнить эти решения с точным решением:

$$1) J[y] = \int_0^1 [(y')^2 + 2y]dx, \quad y(0) = y(1) = 0;$$

$$2) J[y] = \int_0^2 [(y')^2 + y^2 + 2xy]dx, \quad y(0) = y(2) = 0.$$

*Указание.* Точное решение для случая 1:  $y = (x^2 - x)/2$ , а для случая 2:  $y = 2\text{sh}(x)/\text{sh}(2) - x$ .

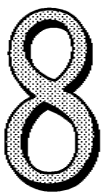
**19.** Найти методом Рунге приближенное решение задачи об экстремуме функционала  $F[u(x, y)] = \iint_D [(\nabla u)^2 - 2u]dxdy$ , где  $D$  — квадрат:  $-a \leq x \leq a$ ,  $-a \leq y \leq a$  и на границе квадрата  $u = 0$ .

**20.** Найти методом Рунге приближенное решение задачи об экстремуме функционала

$$F[u(x, y)] = \iint_D \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} - y \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + x \right)^2 \right] dxdy,$$

где  $D$  — область, ограниченная эллипсом:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .





# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

## ГЛАВА

Многие задачи науки и техники связаны с решением дифференциальных уравнений. Так, например, в теории упругости с такими задачами приходится встречаться при расчете стержней, пластин, оболочек и других элементов, работающих в машинах и механизмах, летательных аппаратах и кораблях, промышленных и гражданских сооружениях. Точно проинтегрировать дифференциальные уравнения не всегда представляется возможным, и приходится обращаться к приближенным решениям, полученным на основе различных методов численного анализа.

Мы не ставим своей задачей систематически изложить численные методы. В этой главе на примерах мы изучим возможности приближенного численного анализа задач математической физики. Рассмотрим, как можно строить расчетные схемы для решения задачи Коши и краевой задачи, а также будем использовать возможности численного решения, реализованные в Maple.

### 8.1. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ЗАДАЧА КОШИ

Мы начнем рассмотрение с реализации классических численных методов решения задачи Коши. К таким методам можно отнести метод Эйлера и метод Рунге — Кутты.

#### МЕТОД ЭЙЛЕРА

Рассмотрим решение задачи Коши для уравнения первого порядка методом Эйлера. Пусть требуется найти на промежутке  $[x_0, x_0 + a]$  решение задачи Коши:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (8.1)$$

Промежуток  $[x_0, x_0 + a]$  разбивают на некоторое число частичных промежутков точками  $x_0, x_2, \dots, x_n$ . При этом  $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n = h$  обычно считается постоянной величиной и называется шагом сетки, а точки  $x_i$  называются узлами сетки. При численном решении задачи ищут приближенные значения  $y_i$  для значений точного решения  $y(x_i)$  в выбранных узлах на промежутке  $[x_0, x_0 + a]$ .

В методе Эйлера предполагается, что правая часть  $f(x, y)$  дифференциального уравнения (8.1) есть величина постоянная на каждом из промежутков  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , равная  $f(x_i, y_i)$ .

Интегрируя при этом предположении дифференциальное уравнение (8.1) по промежутку  $[x_i, x_{i+1}]$ , мы приходим к расчетным формулам метода Эйлера:

$$x_{i+1} = x_i + h; \quad y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i). \quad (8.2)$$

Геометрически этот метод означает следующее: на промежутке  $[x_i, x_{i+1}]$  считается постоянной производная  $y'(x)$  искомого решения, т. е. интегральная кривая заменяется отрезком прямой. Например, на отрезке  $[x_0, x_1]$  угловой коэффициент прямой равен  $f(x_0, y_0)$ , т. е. решение заменяется отрезком касательной в точке  $(x_0, y_0)$  к интегральной кривой.

Простейшая реализация этой схемы может быть представлена, например, с помощью следующей процедуры:

```
>Euler:=proc(ode,ic,domain,N)
local h,i,t,y,F,L,X;
t:=lhs(domain);
y:=op(0,lhs(ic));
h:=(op(2,rhs(domain))-op(1,rhs(domain)))/N;
solve(ode,diff(y(t),t));
F:=unapply(%,(t,y));
X:=evalf([op(lhs(ic)),rhs(ic)]);
L:=X;
for i from 1 to N do
X:=X+[h,h*F(op(X))];
L:=L,X;
end do;
return matrix(N+2,2,[[t,y],L])
end proc;
```

Входными параметрами процедуры являются: переменная *ode*, содержащая дифференциальное уравнение; переменная *ic*, содержащая начальное условие в виде равенства  $y(x_0) = y_0$ ; переменная *domain* — область изменения независимой переменной в виде равенства  $x=x[0]..x[\max]$ ; переменная *N* — количество шагов. Процедура возвращает матрицу значений  $(x, y)$ . Рассмотрим применение этой процедуры на примерах.

**Задача 1.** Решить с помощью процедуры Euler следующую задачу Коши:

$$\frac{dy}{dx} = x + \cos\left(\frac{y}{\sqrt{7}}\right), \quad y(0,5) = 0,6$$

на отрезке  $[0.5, 1.5]$ .

*Решение.* Определяем уравнение, начальное условие и интервал, в котором ищется решение:

```
>ode1:=diff(y(x),x)=x+cos(y(x)/sqrt(7.));
ic1:= y(0.5)=0.6; domain:=x=0.5..1.5;
```

$$ode1 := \frac{d}{dx} y(x) = x + \cos(0.3779644730y(x))$$

$$ic1 := y(0,5) = 0,6$$

$$domain := x = 0.5..1.5$$

Решаем задачу с помощью команды:

```
>Euler(ode1,ic1,domain,10);
```

$x$	$y$
0.5	0.6
0.6000000000	0.7474395730
0.7000000000	0.9034755714
0.8000000000	1.067701523
0.9000000000	1.239668671
1.0000000000	1.418891042
1.1000000000	1.604852043
1.2000000000	1.797012454
1.3000000000	1.994819573
1.4000000000	2.197717210
1.5000000000	2.405156140

**Задача 2.** Воспользовавшись методом Эйлера с количеством шагов  $N = 2, 4, 8$ , найти приближенное значение  $y(2)$ , являющееся решением задачи Коши:

$$\frac{dy}{dt} \sin t + y(t) = 3, \quad y(1) = 2.$$

*Решение.* Определим задачу:

```
>ode2:=diff(y(t),t)*sin(t)+y(t)=3;
ic2:=y(1)=2;
```

$$ode2 := \left( \frac{d}{dt} y(t) \right) \sin(t) + y(t) = 3$$

$$ic2 := y(1) = 2$$

Зададим координаты начальной точки и количество шагов в виде списка

```
>a2:=1;b2:=2;N2:=[2,4,8];
```

$$a2 := 1$$

$$b2 := 2$$

$$N2 := [2, 4, 8]$$

Определим соответствующие величины шагов:

```
>H2:=map(n->(b2-a2)/n,N2);
```

$$H2 := \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \right]$$

Выполним теперь расчет для  $N = 2$ :

```
>sol2:=Euler(ode2,ic2,t=a2..b2,N2[1]):  
Y2[1]:=sol2[N2[1]+2,2];
```

$$Y2_1 := 2.797608323$$

для  $N = 4$ :

```
>sol2:=Euler(ode2,ic2,t=a2..b2,N2[2]):  
Y2[2]:=sol2[N2[2]+2,2];
```

$$Y2_2 := 2.710599580$$

для  $N = 8$ :

```
>sol2:=Euler(ode2,ic2,t=a2..b2,N2[3]):  
Y2[3]:=sol2[N2[3]+2,2];
```

$$Y2_3 := 2.677425038$$

Результат удобно представить в виде таблицы. Для этого подключим пакет `linalg`:

```
>with(linalg):
```

и подготовим следующую таблицу:

```
>v0:=vector(['h','N','Y(2)']):  
v1:=vector([H2[1],N2[1],Y2[1]]):  
v2:=vector([H2[2],N2[2],Y2[2]]):  
v3:=vector([H2[3],N2[3],Y2[3]]):  
stackmatrix(v0,v1,v2,v3);
```

$$\begin{bmatrix} h & N & Y(2) \\ \frac{1}{2} & 2 & 2.797608323 \\ \frac{1}{4} & 4 & 2.710599580 \\ \frac{1}{8} & 8 & 2.677425038 \end{bmatrix}$$

Метод Эйлера (8.2) очень прост, но основной его недостаток — быстрое нарастание погрешности расчета. Заменяя отрезок истинной интегральной кривой отрезком прямой, касательной к ней, мы на протяжении интервала  $h$  несколько отдаляемся от кривой. Вычисляя в новой точке значение производной,

мы получаем некоторую погрешность, обусловленную различием расчетной и истинной ординат интегральной кривой. К этой погрешности добавляется новая погрешность от замены кривой прямолинейным отрезком и т. д. В результате точность расчета оказывается невысокой. Уменьшение величины интервалов увеличивает точность расчетов, но незначительно; можно приближенно считать, что погрешность пропорциональна величине интервала  $h$ . Этот метод является методом первого порядка точности.

Метод Эйлера можно усовершенствовать различными способами. Одна из схем усовершенствованного метода Эйлера для решения задачи (8.1) имеет вид

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + h, \\y_{n+1}^* &= y_n + hf(x_n, y_n), \\y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)],\end{aligned}\tag{8.3}$$

где  $h$  — величина шага. Будем называть метод (8.3) *усовершенствованным методом Эйлера*, иногда его называют трапецеидальным методом.

Можно предложить и другую схему усовершенствования:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + h, \\y_{n+\frac{1}{2}} &= y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n), \\y_{n+1} &= y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}\right).\end{aligned}\tag{8.4}$$

Будем называть метод (8.4) *модифицированным методом Эйлера*.

Простейшая реализация схемы модифицированного метода Эйлера может быть осуществлена, например, с помощью следующей процедуры:

```
>ImprEuler:=proc(ode,ic, domain,N)
local h,i,t,y,F,L,X,X1,X2;
t:=lhs(domain);
y:=op(0,lhs(ic));
h:=(op(2,rhs(domain))-op(1,rhs(domain)))/N;
solve(ode,diff(y(t),t));
F:=unapply(%,(t,y));
X:=evalf([op(lhs(ic)),rhs(ic)]);
L:=X;
for i from 1 to N do
X1:=X+[h,h*F(op(X))];
X2:=X+[h,h*F(op(X1))];
X:=(X1+X2)/2;
L:=L,X;
end do;
return matrix(N+2,2,[[t,y],L])
end proc;
```

Здесь входные параметры те же, что и в процедуре Euler.

Для сравнения рассмотрим решения задач 1 и 2 модифицированным методом Эйлера.

Решение задачи 1:

```
>ImprEuler(ode1,ic1,domain,10);
```

$x$	$y$
0.5	0.6
0.6000000000	0.7517377857
0.7000000000	0.9118190782
0.8000000000	1.079801236
0.9000000000	1.255203548
1.0000000000	1.437513741
1.1000000000	1.626195858
1.2000000000	1.820699250
1.3000000000	2.020468379
1.4000000000	2.224953054
1.5000000000	2.433618715

Решение задачи 2:

```
>sol2:=ImprEuler(ode2,ic2,t=a2..b2,N2[1]):
```

```
Y2[1]:=sol2[N2[1]+2,2];
```

$$Y_{2_1} := 2.631918672$$

```
>sol2:=ImprEuler(ode2,ic2,t=a2..b2,N2[2]):
```

```
Y2[2]:=sol2[N2[2]+2,2];
```

$$Y_{2_2} = 2.646365728$$

```
>sol2:=ImprEuler(ode2,ic2,t=a2..b2,N2[3]):
```

```
Y2[3]:=sol2[N2[3]+2,2];
```

$$Y_{2_3} = 2.648639612$$

```
>v0:=vector(['h','N','Y(2)']):
```

```
v1:=vector([H2[1],N2[1],Y2[1]]):
```

```
v2:=vector([H2[2],N2[2],Y2[2]]):
```

```
v3:=vector([H2[3],N2[3],Y2[3]]):
```

```
stackmatrix(v0,v1,v2,v3);
```

$h$	$N$	$Y(2)$
$\frac{1}{2}$	2	2.631918672
$\frac{1}{4}$	4	2.646365728
$\frac{1}{8}$	8	2.648639612

Мы убедились на рассмотренных задачах, что не представляет труда запрограммировать тот или иной численный метод для решения обыкновенного дифференциального уравнения. На самом деле необходимость в программировании численных методов решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений в Maple отпадает. Можно использовать команду `dsolve` для получения приближенного решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения и для системы таких уравнений.

Функция `dsolve/numeric` находит численное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений или одного уравнения. Вызов этой функции осуществляется в следующих вариантах:

```
dsolve(odesys, numeric, vars, options);
dsolve(numeric, procopts, options);
```

Параметры:

- `odesys` — набор или список; обыкновенное дифференциальное уравнение (или система уравнений) и начальные/граничные условия;
- `numeric` — ключевое слово, указывающее функции `dsolve` на необходимость искать численное решение;
- `vars` — (необязательный) зависимая переменная или набор или список зависимых переменных для `odesys`;
- `procopts` — (требуется, если `odesys` отсутствует) опции, которые обуславливают процедуру определенной системы;
- `options` — (необязательный) уравнения вида `keyword = value`.

С выходом каждой новой версии Maple возможности этой системы возрастают. Подробную информацию можно получить на справочных страницах Maple.

Рассмотрим на примерах применение функции `dsolve/numeric`.

Для иллюстрации снова рассмотрим задачи 1 и 2. Если мы хотим получить явную таблицу приближенного решения, то подготовим список значений независимой переменной, в которых мы хотим получить решение:

```
>ode1;ic1;
```

$$\frac{d}{dx}y(x) = x + \cos(0.3779644730y(x))$$

$$y(0.5) = 0.6$$

```
>x0:=0.5: h1:=0.1; N1:=10;
```

```
>x_list:=vector(N1+1,i -> x0+(i-1)*h1);
```

```
x_list := [0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0 1.1 1.2 1.3 1.4 1.5]
```

Теперь таблицу приближенных значений искомого решения найдем методом Эйлера с помощью функции `dsolve/numeric`:

```
>dsolve({ode1,ic1},y(x),type=numeric,
method=classical,stepsize=h1,output=x_list);
```

[x, y(x)]	
0.5	0.6
0.6	0.747439572962071
0.7	0.903475571397945
0.8	1.06770152276315
0.9	1.23966867119627
1.0	1.41889104244384
1.1	1.60485204361813
1.2	1.79701245411978
1.3	1.99481957329574
1.4	2.19771721012666
1.5	2.40515613980256

Если результат необходимо отобразить на графике (рис. 8.1), можно использовать команды `dsolve` и `odeplot`. Для того чтобы воспользоваться командой `odeplot`, надо подключить пакет `plots`:

```
>with(plots):
sol:=dsolve({ode1,ic1},y(x),type=numeric,
method=classical,stepsize=h1):
picE:=odeplot(sol,[x,y(x)],0.5..1.5,color=black,
legend=`метод Эйлера`,style=point,font=[Courier,bold,13],
labelfont=[Courier,bold,13],numpoints=13,symbolsize=13,
gridlines=true,legendstyle=[font=[Courier,bold,13]]):
display({picE});
```

Задача 2 также легко решается с помощью команды `dsolve`:

```
>ode2; ic2;
```

$$\left(\frac{d}{dt}y(t)\right)\sin(t) + y(t) = 3$$

$$y(1) = 2$$

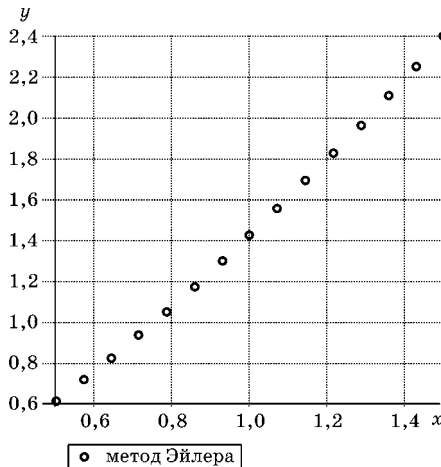


Рис. 8.1  
Классический метод Эйлера



```
>sol2:=dsolve({ode2,ic2},y(t),type=numeric,
method=classical,stepsize=H2[1]):
Y2[1]:=eval(y(t),sol2(2));
```

$Y_2_1 := 2.79760832314891060$

```
>sol2:=dsolve({ode2,ic2},y(t),type=numeric,
method=classical,stepsize=H2[2]):
Y2[2]:=eval(y(t),sol2(2));
```

$Y_2_2 := 2.71059958025902015$

```
>sol2:=dsolve({ode2,ic2},y(t),type=numeric,
method=classical,stepsize=H2[3]):
Y2[3]:=eval(y(t),sol2(2));
```

$Y_2_3 := 2.67742503870978908$

```
>v0:=vector(["h",'N','Y(2)']):
v1:=vector([H2[1],N2[1],Y2[1]]):
v2:=vector([H2[2],N2[2],Y2[2]]):
v3:=vector([H2[3],N2[3],Y2[3]]):
stackmatrix(v0,v1,v2,v3);
```

$h$	$N$	$Y(2)$
$\frac{1}{2}$	2	2.797608323
$\frac{1}{4}$	4	2.710599580
$\frac{1}{8}$	8	2.677425039

Рассмотрим решение этих же задач модифицированным методом Эйлера с помощью команды dsolve.

Задача 1:

```
>dsolve({ode1,ic1},y(x),type=numeric,
method=classical[heunform],stepsize=h1,
output=x_list);
```

$[x \ y(x)]$	
0.5	0.6
0.6	0.751737785698972649
0.7	0.911819078174192610
0.8	1.07980123658405014
0.9	1.25520354816513224
1.0	1.43751374120181685
1.1	1.62619585832199598
1.2	1.82069925079892392
1.3	2.02046837952947689
1.4	2.22495305421199241
1.5	2.43361871556365994

```

>sol:=dsolve({ode1,ic1},y(x),type=numeric,
method=classical[heunform],stepsize=h1):
pic_mod:=odeplot(sol,[x,y(x)],0.5..1.5,color=black,
legend=`модифицированный метод Эйлера`,
font=[Courier,bold,12],labelfont=[Courier,bold,13],
numpoints=13,symbolsize=13,
gridlines=true,legendstyle=[font=[Courier,bold,13]]):
display({pic_mod,picE});

```

(рис. 8.2)

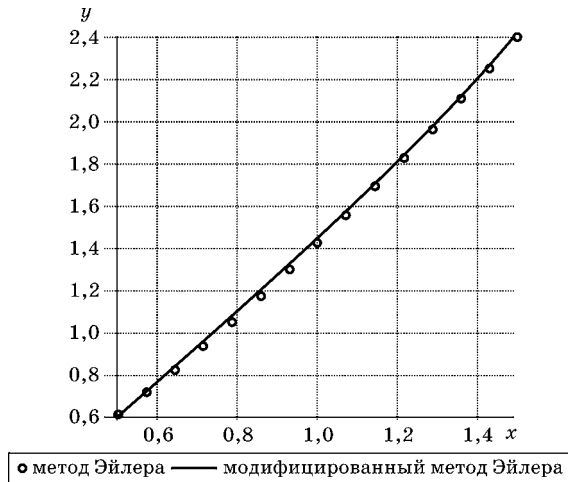


Рис. 8.2  
Сравнение методов Эйлера

Задача 2:

```

>sol2:=dsolve({ode2,ic2}, (t),type=numeric,
method=classical[heunform],stepsize=H2[1]):
Y2[1]:=eval(y(t),sol2(2));

```

$$Y_{2_1} := 2.63191867242761024$$

```

>sol2:=dsolve({ode2,ic2},y(t),type=numeric,
method=classical[heunform],stepsize=H2[2]):
Y2[2]:=eval(y(t),sol2(2));

```

$$Y_{2_2} := 2.64636572746602816$$

```

>sol2:=dsolve({ode2,ic2},y(t),type=numeric,
method=classical[heunform],stepsize=H2[3]):
Y2[3]:=eval(y(t),sol2(2));

```

$$Y_{2_3} := 2.64863961122298264$$

```

>v0:=vector(['h','N','Y(2)']):
v1:=vector([H2[1],N2[1],Y2[1]]):
v2:=vector([H2[2],N2[2],Y2[2]]):
v3:=vector([H2[3],N2[3],Y2[3]]):
stackmatrix(v0,v1,v2,v3);

```

$$\begin{bmatrix} h & N & Y(2) \\ \frac{1}{2} & 2 & 2.631918672 \\ \frac{1}{4} & 4 & 2.646365727 \\ \frac{1}{8} & 8 & 2.648639611 \end{bmatrix}$$

### МЕТОД РУНГЕ — КУТТЫ

Рассмотрим еще одну популярную группу методов решения задачи Коши (8.1) для обыкновенного дифференциального уравнения — методы Рунге — Кутты.

Представим искомое решение  $y = y(x)$  задачи (8.1) в окрестности каждой точки  $x = x_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  рядом Тейлора и вычислим  $y(x_{n+1})$ . Тогда, если принять обозначение  $x_{n+1} - x_n = h$ , получим следующее равенство:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_n} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=x_n} + \frac{h^3}{3!} \left. \frac{d^3y}{dx^3} \right|_{x=x_n} + \frac{h^4}{4!} \left. \frac{d^4y}{dx^4} \right|_{x=x_n} + \dots$$

В зависимости от числа оставляемых членов в последней формуле, получаем вычислительную схему с той или иной степенью точности. Заметим, что если удерживать в разложении члены до первого порядка включительно, то будем иметь вычислительную схему метода Эйлера. Таким образом, метод Эйлера становится частным случаем метода Рунге — Кутты.

Одним из широко распространенных методов является метод Рунге — Кутты второго порядка, вычисления по которому реализуются по формулам:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n); \\ k_2 &= f(x_n + h, y_n + hk_1); \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2). \end{aligned} \tag{8.5}$$

Геометрический смысл этих формул состоит в том, что через точку  $(x_n, y_n)$  проводится не касательная к интегральной кривой, а прямая с угловым коэффициентом, равным среднему арифметическому угловых коэффициентов касательных, которые строятся в методе Эйлера для двух последовательных шагов. В качестве решения берется ордината точки пересечения этой прямой с вертикалью  $x = x_{n+1}$ .

Приведем еще одну популярную вычислительную схему метода Рунге — Кутты четвертого порядка

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n); \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right); \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right); \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3); \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned}$$

Эти схемы легко программируются. Например, программа, реализующая схему (8.5), может выглядеть так:

```
>RungeKutta2:=proc(ode,ic,domain,N)
local f,h,i,t,y F,L,X,X1,X2;
t:=lhs(domain);
y:=op(0,lhs(ic));
h:=(op(2,rhs(domain))-op(1,rhs(domain)))/N;
solve(ode,diff(y(t),t));
F:=unapply(%,(t,y));
X:=evalf([op(lhs(ic)),rhs(ic)]);
L:=X;
for i from 1 to N do
f:=F(op(X));
X1:=X+[h,h*f];
X2:=X+[h,h*F(op(X1))];
X:=(X1+X2)/2;
L:=L,X;
end do;
return matrix(N+2,2,[[t,y],L])
end proc;
```

В качестве иллюстрации использования этой программы снова рассмотрим задачи 1 и 2.

Решение задачи 1:

```
>ode1:=diff(y(x),x)=x+cos(y(x)/sqrt(7.));
ic1:=y(0.5)=0.6; domain:=x=0.5..1.5;
```

$$\begin{aligned} \text{ode1} &:= \frac{d}{dx} y(x) = x + \cos(0.3779644730y(x)) \\ \text{ic1} &:= y(0.5) = 0.6 \\ \text{domain} &:= x = 0.5..1.5 \end{aligned}$$

```
>RungeKutta2(ode1,ic1,x=0.5..1.5,10);
```

$x$	$y$
0.5	0.6
0.6000000000	0.7517377857
0.7000000000	0.9118190782
0.8000000000	1.079801236
0.9000000000	1.255203548
1.0000000000	1.437513741
1.1000000000	1.626195858
1.2000000000	1.820699250
1.3000000000	2.020468379
1.4000000000	2.224953054
1.5000000000	2.433618715

Решение задачи 2:

```
>ode2 := diff( y(t), t ) * sin(t) + y(t) = 3;
ic2 := y(1)=2;
```

$$ode2 := \left( \frac{d}{dt} y(t) \right) \sin(t) + y(t) = 3$$

$$ic2 := y(1) = 2$$

```
>a2:=1: b2:=2: N2:=[2,4,8];
>H2 := map( n->(b2-a2)/n, N2 );
```

$$H2 := \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \right]$$

```
>sol2 := RungeKutta2( ode2, ic2, t=a2..b2, N2[1] );
Y2[1] := sol2[N2[1]+2,2];
```

$$Y_{2_1} := 2.631918672$$

```
>sol2 := RungeKutta2( ode2, ic2, t=a2..b2, N2[2] );
Y2[2] := sol2[N2[2]+2,2];
```

$$Y_{2_2} := 2.646365728$$

```
>sol2 := RungeKutta2( ode2, ic2, t=a2..b2, N2[3] );
Y2[3] := sol2[N2[3]+2,2];
```

$$Y_{2_3} := 2.648639612$$

```
>v0:=vector(['h','N','Y(2)']):
v1:=vector([H2[1],N2[1],Y2[1]]):
v2:=vector([H2[2],N2[2],Y2[2]]):
v3:=vector([H2[3],N2[3],Y2[3]]):
stackmatrix(v0,v1,v2,v3);
```

$h$	$N$	$Y(2)$
$\frac{1}{2}$	2	2.631918672
$\frac{1}{4}$	4	2.646365728
$\frac{1}{8}$	8	2.648639612

Решение этих задач можно осуществить и с помощью команды `dsolve`, указав опцию `type=numeric` и метод решения `method=classical[rk2]`.

## 8.2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Перейдем теперь к рассмотрению численного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Одним из широко применяемых методов численного решения краевых задач является метод сведения краевой задачи к задаче Коши с последующим применением при решении последней известных численных методов, например методов Рунге — Кутты.

### МЕТОД ПРИСТРЕЛКИ

Рассмотрим один из вариантов метода сведения краевой задачи к задаче Коши, известный, как *метод пристрелки*.

В методе пристрелки выбирается недостающее (незаданное) начальное условие в начальной точке интервала, а потом решается задача Коши — численно интегрируется дифференциальное уравнение до конечной точки интервала. Затем, сравнивая *вычисленное* значение зависимой переменной в конечной точке с *заданным*, проверяют правильность выбора недостающего начального условия. Если эти значения не совпадают, то выбирают другое значение недостающего начального условия и процесс повторяется до тех пор, пока разность между вычисленным и заданным условиями в конечной точке не станет достаточно малой. При таком подходе естественно возникает вопрос: существует ли систематический способ нахождения каждого последующего значения недостающего начального условия?

В качестве такого способа можно использовать, например, метод Ньютона, метод секущих или еще какой-нибудь метод, основанный на методе решения нелинейных алгебраических уравнений. При таком подходе сохраняется нелинейная форма дифференциального уравнения, а недостающее значение производной находится систематически одним из перечисленных методов.

Метод пристрелки является общим методом и может использоваться для решения нелинейных задач. Мы проиллюстрируем применение этого метода для решения двухточечной краевой задачи для линейного дифференциального уравнения следующего вида:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x), \quad y(a) = r, \quad y(b) = s. \quad (8.6)$$

Соответствующая задача Коши, которая лежит в основе метода пристрелки, имеет вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x), \quad y(a) = r, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = \alpha, \quad (8.7)$$

где  $\alpha$  — неизвестный параметр.

Задаемся конкретным значением параметра  $\alpha$  и решаем задачу (8.7); находим значение функции на правом конце интервала, которое, естественно, зависит от параметра  $\alpha$ :  $y(b, \alpha)$ . Наша основная цель состоит в подборе такого значения  $\alpha$ , чтобы выполнялось условие  $y(b, \alpha) = s$ . Для достижения этой цели разработаем процедуру, решающую задачу Коши и определяющую значение зависимой переменной на правом конце интервала. Это может быть, например, такая процедура:

```
>Yb:=proc(ivp,fn,b)
local sol;
sol:=dsolve(ivp,fn,type=numeric);
eval(fn,sol(b))
end proc;
```

Входными параметрами процедуры являются задача Коши, неизвестная функция и правая граничная точка интервала, на котором ищется решение краевой задачи.

Для определения параметра  $\alpha$  из уравнения  $y(b, \alpha) - s = 0$  будем использовать так называемый *метод секущих* или *метод линейной интерполяции*. Рассмотрим все вычисления на конкретном примере.

**Задача 3.** Решить следующую двухточечную краевую задачу

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 7y = 2e^{-x} - 5, \quad y(0) = 2, \quad y(1) = -5.$$

*Решение.* Будем решать эту задачу численно методом пристрелки. Определим задачу в Maple

```
>ode1:=diff(y(x),x$2)+3*diff(y(x),x)+7*y(x)=2*exp(-x)-5;
bc1:=y(0)=2, y(1)=-5;
```

$$\begin{aligned} \text{ode1} &:= \frac{d^2}{dx^2} y(x) + 3 \left( \frac{d}{dx} y(x) \right) + 7y(x) = 2e^{-x} - 5 \\ \text{bc1} &:= y(0) = 2, \quad y(1) = -5 \end{aligned}$$

Задаем граничные точки и формулируем начальные условия соответствующей задачи Коши:

```
>a := 0; b := 1;
a := 0
b := 1
```

```
>ic1 := bc1[1], D(y)(a)=alpha;
```

$$ic1 := y(0) = 2, D(y)(0) = \alpha$$

Здесь параметр  $\alpha$  пока неизвестен. Этот параметр должен быть выбран из условия

```
>bound := lhs(bc1[2])-rhs(bc1[2]):
```

```
bound = 0;
```

$$y(1) + 5 = 0$$

Для определения параметра  $\alpha$  используем метод секущих, реализация которого может быть осуществлена, например, так:

```
>a0:=0:
```

```
y0:=
```

```
eval(bound,y(b)=Yb(eval({ode1,ic1},alpha=a0),y(x),b));
```

```
a1:=1:
```

```
y1:=
```

```
eval(bound,y(b)=Yb(eval({ode1,ic1},alpha=a1),y(x),b));
```

```
while fnormal(y1-y0)<>0 do
```

```
z:=solve(y1=(y1-y0)/(a1-a0)*(a1-x),x);
```

```
a0, a1 := a1, z;
```

```
y0, y1:=
```

```
y1, eval(bound,y(b)=Yb(eval({ode1,ic1},alpha=z),y(x),b));
```

```
end do:
```

```
alpha_opt1 := z;
```

$$y0 := 4.46279110600984$$

$$y1 := 4.54678487405485$$

$$alpha\_opt1 := -53.13240793$$

Решение задачи методом пристрелки есть решение задачи Коши с уточненным параметром  $\alpha$ :

```
>shoot_sol1:=
```

```
evalf(dsolve(eval({ode1,ic1},alpha=alpha_opt1),y(x)));
```

$$\begin{aligned} shoot\_sol1 := y(x) = & -22.60248746e^{-1.500000000x} \sin(2.179449472x) \\ & + 2.314285714e^{-1.500000000x} \cos(2.179449472x) \\ & - 0.02857148257(-14. + 25.e^{-x})e^{-1.x} \end{aligned}$$

В этом простом примере Maple оказался в состоянии найти точное решение задачи. В общем случае задача Коши решается численно.

Для сравнения найдем точное решение исходной краевой задачи, которое тоже легко получается в Maple:

```
>exact_sol1:=
```

```
evalf(combine(dsolve({ode1,bc1},y(x))));
```



$$\begin{aligned}
\text{exact\_sol1} := y(x) = & -2.820858801e^{-1.500000000x} \sin(-2.179449472 \\
& + 2.179449472x) \\
& - 0.4875558421 \sin(2.179449472x) e^{-1.500000000x + 0.5000000000} \\
& - 0.7142857146 \\
& - 5.5223812594 \sin(2.179449472x) e^{-1.500000000x + 1.500000000} \\
& + 0.4000000001 e^{-1 \cdot x}
\end{aligned}$$

Для наглядности отобразим эти решения на одном графике (рис. 8.3):

```

>pex:=plot(rhs(exact_sol1),x=0..1,color=BLACK,
legend='точное решение',
legendstyle=[font=[Helvetica,boldoblique,13]]);
psh:=plot(rhs(shoot_sol1),x=0..1,color=BLACK,
style=point,symbolsize=14,legend='метод пристрелки',
numpoints=15,
legendstyle=[font=[Helvetica,boldoblique,13]]);
plots[display]({pex,psh},gridlines=true,
font=[Helvetica,boldoblique,13],
labelfont=[Helvetica,boldoblique,13]);

```

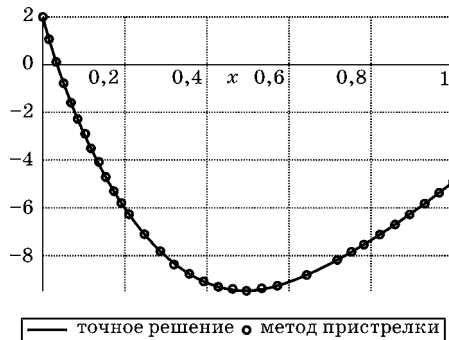


Рис. 8.3  
Сравнение методов

Из приведенных графиков видно хорошее совпадение решений. Отметим, что значение решения, полученное на правой границе методом пристрелки, есть

```

> evalf(eval(rhs(shoot_sol1),x=1));
-5.00000482

```

Это также свидетельствует о хорошем согласии между решением, полученным методом пристрелки, и точным решением.

Рассмотрим еще один пример.

**Задача 4.** Решить двухточечную краевую задачу

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + 4y = -x^3, \quad y(1) = 7, \quad y(4) = -1.$$

*Решение.* Определяем задачу в Maple:

```
>ode2:=x^2*diff(y(x),x$2)+2*x*diff(y(x),x)+4*y(x)=-x^3;  
bc2 := y(1)=7, y(4)=-1;
```

$$\begin{aligned}ode2 &:= x^2 \left( \frac{d^2}{dx^2} y(x) \right) + 2x \left( \frac{d}{dx} y(x) \right) + 4y(x) = -x^3 \\bc2 &:= y(1) = 7, y(4) = -1\end{aligned}$$

Формируем начальные условия для задачи Коши:

```
>a := 1: b := 4:  
>ic2 := bc2[1], D(y)(a)=alpha;
```

$$ic2 := y(1) = 7, D(y)(1) = \alpha$$

Параметр  $\alpha$  определяем из условия:

```
>bound := lhs(bc2[2])-rhs(bc2[2]):  
>bound = 0;
```

$$y(4) + 1 = 0$$

методом секущих:

```
>a0 := 0:  
y0:=  
eval(bound,y(b)=Yb(eval({ode2,ic2},alpha=a0),y(x),b)):  
a1 := 1:  
y1:=  
eval(bound,y(b)=Yb(eval({ode2,ic2},alpha=a1),y(x),b)):  
while fnormal(y1-y0)<>0 do  
z := solve( y1 = (y1-y0)/(a1-a0)*(a1-x), x );  
a0, a1 := a1, z;  
y0,y1:=y1,  
eval(bound,y(b)=Yb(eval({ode2,ic2},alpha=z),y(x),b));  
end do:  
alpha_opt2 := z;
```

$$alpha\_opt2 := 50.42074643$$

Решаем теперь окончательно задачу Коши и, таким образом, получаем приближенное решение исходной краевой задачи:

```
>shoot_sol2:=  
evalf(dsolve(eval({ode2,ic2},alpha=alpha_opt2),y(x)));
```

$$\begin{aligned}shoot\_sol2 := y(x) &= \frac{27.95751574 \sin(1.936491673 \ln(x))}{\sqrt{x}} \\ &+ \frac{7.062500000 \cos(1.936491673 \ln(x))}{\sqrt{x}} - 0.0625000000x^3\end{aligned}$$

Здесь тоже решение задачи Коши удастся получить точно. Для сравнения найдем точное решение исходной краевой задачи и отобразим полученные решения на одном графике (рис. 8.4):

```
>exact_sol2:=evalf(combine(dsolve({ode2,bc2},y(x))));
```

$$exact\_sol2 := y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(0.1416274967(-0.4412984869x^{7/2} - 113.\sin(3.872983346\ln(0.5000000000\sqrt{x})) + 96.\sin(3.872983346\ln(\sqrt{x}))))$$

```
>pex2:=plot(rhs(exact_sol2),x=1..4,color=BLACK,
legend=`точное решение`,
legendstyle=[font=[Helvetica,boldoblique,13]]);
psh2:=plot(rhs(shoot_sol2),x=1..4,color=BLACK,
style=point,symbolsize=14,
legend=`метод пристрелки`,numpoints=5,
legendstyle=[font=[Helvetica,boldoblique,13]]);
plots[display]({pex2,psh2},gridlines=true,
font=[Helvetica,boldoblique,13],
labelfont=[Helvetica,boldoblique,13]);
```



Рис. 8.4  
Сравнение методов

Из приведенных графиков видно хорошее совпадение решений. Значение решения, полученное на правой границе методом пристрелки, есть

```
>evalf(eval(rhs(shoot_sol2),x=4));
```

-0.999999133

что также свидетельствует о хорошем согласии между решением, полученным методом пристрелки, и точным решением.

Рассмотрим пример решения нелинейной задачи.

**Задача 5.** Решить следующую двухточечную краевую задачу для нелинейного уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x \frac{dy}{dx} - y^2, \quad y(0) = 2, \quad y(1) = -5.$$

*Решение:*

```
>ode3:=diff(y(x),x$2)=x*diff(y(x),x)-y(x)^2;  
bc3:=y(0)=2,y(1)=-5;
```

$$ode3 := \frac{d^2}{dx^2} y(x) = x \left( \frac{d}{dx} y(x) \right) - y(x)^2$$
$$bc3 := y(0) = 2, y(1) = -5$$

```
>a := 0: b := 1:  
>ic3 := bc3[1], D(y)(a)=alpha;
```

$$ic3 := y(0) = 2, D(y)(0) = \alpha$$

```
>bc := lhs(bc3[2])-rhs(bc3[2]);  
bc = 0;
```

$$bc := y(1) + 5$$
$$y(1) + 5 = 0$$

```
>a0 := 0:  
y0:=eval(bc,y(b)=Yb(eval({ode3,ic3},alpha=a0),y(x),b));  
a1 := 1:  
y1:=eval(bc,y(b)=Yb(eval({ode3,ic3},alpha=a1),y(x),b));  
while fnormal(y1-y0)<>0 do  
z := solve( y1 = (y1-y0)/(a1-a0)*(a1-x), x );  
a0, a1 := a1, z;  
y0,y1:=y1,  
eval(bc,y(b)=Yb(eval({ode3,ic3},alpha=z),y(x),b));  
end do:  
alpha_opt3 := z;
```

$$alpha\_opt3 := -4.861659959$$

Здесь решение соответствующей задачи Коши получим численно:

```
>shoot_sol3:=  
dsolve(eval({ode3,ic3},alpha=alpha_opt3),y(x),  
numeric,output=listprocedure);
```

$$shoot\_sol3 := \left[ x = \mathbf{proc}(x) \dots \mathbf{end proc}, y(x) = \mathbf{proc}(x) \dots \mathbf{end proc}, \right. \\ \left. \frac{d}{dx} y(x) = \mathbf{proc}(x) \dots \mathbf{end proc} \right]$$

```
>y_shoot := eval(y(x),shoot_sol3);
```

$$y\_shoot := \mathbf{proc}(x) \dots \mathbf{end proc}$$

Численно найдем и решение исходной краевой задачи:

```
>exact_sol3:=dsolve({ode3,bc3},y(x),numeric,
output=listprocedure);
```

$$exact\_sol3 := \left[ \begin{array}{l} x = \mathbf{proc}(x) \dots \mathbf{end\ proc}, y(x) = \mathbf{proc}(x) \dots \mathbf{end\ proc}, \\ \frac{d}{dx}y(x) = \mathbf{proc}(x) \dots \mathbf{end\ proc} \end{array} \right]$$

```
>y_exact:=eval(y(x),exact_sol3);
```

```
y_exact := proc(x) ... end proc
```

Сравним полученные решения (рис. 8.5):

```
>peh3:=plot(y_exact(x),x=0..1,color=BLACK,
legend=`краевая задача`,
legendstyle=[font=[Helvetica,boldoblique,13]]):
psh3:=plot(y_shoot(x),x=0..1,color=BLACK,
style=point,symbolsize=14,
legend=`метод пристрелки`,numpoints=1,
legendstyle=[font=[Helvetica,boldoblique,13]]):
plots[display]({peh3,psh3},gridlines=true,
font=[Helvetica,boldoblique,13],
labelfont=[Helvetica,boldoblique,13],labels=[`,``,`]);
```

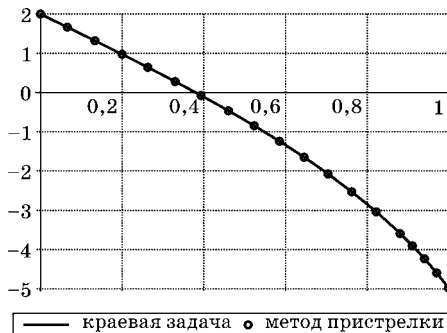


Рис. 8.5  
Сравнение решений

И в этом случае мы имеем хорошее совпадение решений. Значение решения, полученное на правой границе методом пристрелки, есть

```
>evalf(y_shoot(1));
```

```
-5.00000000051678
```

## МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Альтернативой рассмотренному выше подходу является метод конечных разностей или метод сеток. Идея метода заключается в замене исходных дифференциальных уравнений системой алгебраических уравнений. Все производные, входящие в дифференциальные уравнения, по правилам численного анализа заменяются приближенными алгебраическими выражениями. В результате такой замены дифференциальное уравнение, справедливое для любой внутренней точки изучаемого объекта, переходит в алгебраическое уравнение общего вида, также справедливое для всех внутренних точек этого объекта. Совокупность алгебраических уравнений, записанных для конечного числа заранее выбранных точек, составит систему, из решения которой (а эта задача уже проще исходной!) найдем численные значения искомой функции в намеченных точках.

### ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Рассмотрим функцию  $f(x)$ , непрерывную вместе со своими производными до порядка  $n$  включительно. График функции показан на рисунке 8.6. Здесь же приведены обозначения узлов ( $\dots, i-1, i, i+1, \dots$ ) и значений функции в узлах ( $\dots, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, \dots$ ).

Отрезок оси  $x$ , на котором определена функция, разделим на равные интервалы или, как говорят, нанесем сетку с шагом  $h$ . Покажем, что первую, вторую и последующие производные в любой точке  $A$  можно выразить приближенно через ординаты в узлах сетки, т. е. через  $f_{i-1}, f_i, f_{i+1}$  и т. д.

Для первой производной приближенную формулу легко можно получить из следующих простых построений (рис. 8.7).

Известно, что производная  $df/dx$  в точке  $A$  (соответствующей точке  $i$  на оси  $x$ ) равна тангенсу угла наклона касательной к кривой в точке  $A$ , т. е.  $\operatorname{tg}\alpha$ . Но  $\operatorname{tg}\alpha$  можно приближенно заменить тангенсом угла наклона хорды  $CD$ , т. е.  $\operatorname{tg}\beta$ :

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_i = \operatorname{tg}\alpha \cong \operatorname{tg}\beta = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}. \quad (8.8)$$

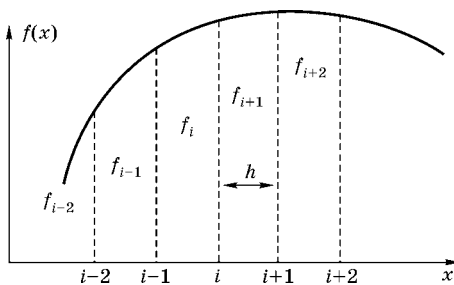


Рис. 8.6  
Сетка на прямой

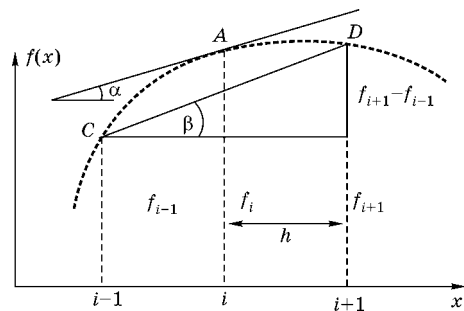


Рис. 8.7  
Геометрическая интерпретация

Формулу (8.8) называют также конечно-разностным отношением для первой производной.

Итак, для приближенного вычисления первой производной в точке  $i$  (см. рис. 8.7) необходимо разность между ординатами справа и слева от точки  $i$  разделить на удвоенный шаг сетки\*.

Например, первая производная в точке  $i - 1$  согласно выражению (8.8) и рисунку 8.7 будет

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{i-1} = f'_{i-1} = \frac{f_i - f_{i-2}}{2h},$$

где  $f_i$  и  $f_{i-2}$  — ординаты, расположенные справа и слева от рассматриваемой точки  $i - 1$ . Аналогично, первая производная в точке  $i + 1$  (проверьте!)

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{i+1} = f'_{i+1} = \frac{f_{i+2} - f_i}{2h}.$$

Формулу (8.8) можно получить с помощью ряда Тейлора, в котором значения функции в точках  $i - 1$  и  $i + 1$  выражаются через значения функции и ее производных в соседней  $i$ -й точке:

$$f_{i+1} = f_i + f'_i h + f''_i \frac{h^2}{2!} + f'''_i \frac{h^3}{3!} + f^{(4)}_i \frac{h^4}{4!} + \dots, \quad (8.9)$$

$$f_{i-1} = f_i - f'_i h + f''_i \frac{h^2}{2!} - f'''_i \frac{h^3}{3!} + f^{(4)}_i \frac{h^4}{4!} + \dots, \quad (8.10)$$

где  $h$  — интервал между ординатами, т. е. шаг сетки.

Анализ показывает, что уже достаточно высокую точность для инженерной практики получаем, ограничившись в выражениях (8.9) и (8.10) только тремя членами.

Итак, ограничиваясь только тремя членами и вычитая из выражения (8.9) выражение (8.10), получим

$$f_{i+1} - f_{i-1} = f'_i h + f''_i h^2,$$

откуда

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h},$$

что совпадает с выражением (8.8).

Вторую производную в точке  $i$  получим, если сложим выражения (8.9) и (8.10):

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + 2f''_i \frac{h^2}{2},$$

---

\* Здесь мы не рассматриваем оценок погрешности получаемых формул, отсылая читателя к соответствующим разделам курса по численным методам.

откуда

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}. \quad (8.11)$$

Формула (8.11) является приближенной конечно-разностной для второй производной, при вычислении которой вовлекаются уже три ординаты (вместо двух для первой производной): ордината слева, удвоенная средняя ордината и ордината справа. Например (см. рис. 8.6), производная в точке  $i - 1$  согласно выражению (8.11)

$$f_{i-1}'' = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2}.$$

Предлагаем читателю проверить, что вторая производная в точке  $i + 1$  запишется следующим образом:

$$f_{i+1}'' = \frac{f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{h^2}.$$

Третью производную в точке  $i$  получим, если возьмем первую производную (8.8) от второй (8.11):

$$f_i''' = (f_i'')' = \frac{f_{i+1}' - 2f_i' + f_{i-1}'}{h^2}, \quad (8.12)$$

где согласно выражению (8.8):

$$f_{i-1}' = \frac{f_i - f_{i-2}}{2h}; \quad (8.13)$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}; \quad (8.14)$$

$$f_{i+1}' = \frac{f_{i+2} - f_i}{2h}. \quad (8.15)$$

Подставляя выражения (8.13)–(8.15) в (8.12), получим

$$f_i''' = \frac{1}{h^2} \left( \frac{f_i - f_{i-2}}{2h} - 2 \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + \frac{f_{i+2} - f_i}{2h} \right) = \frac{1}{2h^3} (f_i - f_{i-2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} + f_{i+2} - f_i).$$

Окончательно будем иметь

$$f_i''' = \frac{1}{2h^3} (f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}). \quad (8.16)$$



Вычислим четвертую производную в точке  $i$ , взяв вторую производную от второй производной (8.11):

$$f_i^{(4)} = (f_i'')'' = \frac{f_{i+1}'' - 2f_i'' + f_{i-1}''}{h^2}, \quad (8.17)$$

где согласно выражению (8.11):

$$f_{i-1}'' = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2}; \quad (8.18)$$

$$f_i'' = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}; \quad (8.19)$$

$$f_{i+1}'' = \frac{f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{h^2}. \quad (8.20)$$

Подставив выражения (8.18)–(8.20) в (8.17), после элементарных преобразований получим приближенную формулу для четвертой производной в точке  $i$ :

$$f_i^{(4)} = \frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2}}{h^4}. \quad (8.21)$$

Аналогично можно получить формулы для производной  $n$ -го порядка.

#### ПРИМЕР

Для применения метода конечных разностей промежутков  $[a, b]$ , где требуется найти решение, узлами  $x_0 = a$ ,  $x_1 = a + h$ , ...,  $x_n = b$ , где  $h = (b - a)/n$ , разбивается на частичные промежутки. Дифференциальное уравнение, записанное для каждой точки  $x_i$ , заменяется конечно-разностным уравнением, и производные, входящие в краевые условия, — конечными разностями. В результате приходим к алгебраической задаче.

Рассмотрим для определенности краевую задачу (8.6). Заменяем производные неизвестной функции во внутренних точках с помощью центральных разностных производных по формулам:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_k} \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}, \quad \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=x_k} \approx \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Отметим, что граничные условия дают  $y_0 = r$ ,  $y_n = s$ , так что мы имеем  $(n - 1)$  уравнение относительно неизвестных  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ .

Для иллюстрации метода снова решим задачу 3:

```
>ode1:=diff(y(x),x$2)+3*diff(y(x),x)+
7*y(x)=2*exp(-x)-5;
bc1:=y(0)=2, y(1)=-5;
```

$$\text{ode1} := \frac{d^2}{dx^2} y(x) + 3 \left( \frac{d}{dx} y(x) \right) + 7y(x) = 2e^{-x} - 5$$

$$\text{bc1} := y(0) = 2, y(1) = -5$$

Определяем граничные точки:

>a := 0: b := 1:

Задаем количество точек и шаг:

>N := 10: h := (b-a)/N;

$$h := \frac{1}{10}$$

Определяем узлы:

>X:=k -> a+k\*h;

$$X := k \rightarrow a + kh$$

и конечно-разностные операторы:

>Yp:=k -> (y[k+1]-y[k-1])/2/h;

$$Yp := k \rightarrow \frac{1}{2} \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{h}$$

>Ypp:=k -> (y[k+1]-2\*y[k]+y[k-1])/h^2;

$$Ypp := k \rightarrow \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}$$

Граничные условия обеспечивают нам два условия:

>eq[0] := y[0] = rhs(bc1[1]);

$$eq_0 := y_0 = 2$$

>eq[N] := y[N] = rhs(bc1[2]);

$$eq_{10} := y_{10} = -5$$

Формируем теперь уравнения для внутренних точек:

>for k from 1 to N-1 do

eq[k]:=eval(ode1,

{x=X(k),y(x)=y[k],

diff(y(x),x)=Yp(k),

diff(y(x),x\$2)=Ypp(k));

end do;

$$eq_1 := 115y_2 - 193y_1 + 85y_0 = 2e^{-\frac{1}{10}} - 5$$

$$eq_2 := 115y_3 - 193y_2 + 85y_1 = 2e^{-\frac{2}{10}} - 5$$

$$eq_3 := 115y_4 - 193y_3 + 85y_2 = 2e^{-\frac{3}{10}} - 5$$

$$\begin{aligned}
 eq_4 &:= 115y_5 - 193y_4 + 85y_3 = 2e^{\frac{-2}{5}} - 5 \\
 eq_5 &:= 115y_6 - 193y_5 + 85y_4 = 2e^{\frac{-1}{2}} - 5 \\
 eq_6 &:= 115y_7 - 193y_6 + 85y_5 = 2e^{\frac{-3}{5}} - 5 \\
 eq_7 &:= 115y_8 - 193y_7 + 85y_6 = 2e^{\frac{-7}{10}} - 5 \\
 eq_8 &:= 115y_9 - 193y_8 + 85y_7 = 2e^{\frac{-4}{5}} - 5 \\
 eq_9 &:= 115y_{10} - 193y_9 + 85y_8 = 2e^{\frac{-9}{10}} - 5
 \end{aligned}$$

Даже тогда, когда система линейна, лучше использовать команду `fsolve` для нахождения приближенного решения:

```
>fd_sol1:=fsolve({seq(eq[k],k=0..N)},{seq(y[k],k=0..N)});
```

```
fd_sol1 := {y_0 = 2., y_1 = -2.726601624, y_2 = -6.081951641, y_3 =
-8.221026670, y_4 = -9.332266375, y_5 = -9.617386815, y_6 =
-9.275651827, y_7 = -8.492393908, y_8 = -7.431377814, y_9 =
-6.230467634, y_10 = -5}
```

Теперь переформатируем наше решение для последующего графического отображения:

```
>fd_table1:=eval([seq([X(k),y[k]],k=0..N)],fd_sol1):
```

и для табличного представления:

```
>linalg[stackmatrix](fd_table1);
```

0	2
$\frac{1}{10}$	-2.726601624
$\frac{1}{5}$	-6.081951641
$\frac{3}{10}$	-8.221026670
$\frac{2}{5}$	-9.332266275
$\frac{1}{2}$	-9.617386815
$\frac{3}{5}$	-9.275651827
$\frac{7}{10}$	-8.492393908
$\frac{4}{5}$	-7.431377814
$\frac{9}{10}$	-6.230467634
1	-5

В силу простоты рассматриваемой задачи, можно найти точное решение:

```
>exact_sol1:=combine(dsolve({ode1,bc1},y(x)));
```

$$\begin{aligned} exact\_sol1 := & y(x) - \frac{1}{70} \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{19}\right)} \left( -162e^{-\frac{3}{2}x} \sin\left(-\frac{1}{2}\sqrt{19}\right) \right. \\ & + \frac{1}{2}\sqrt{19}x \left. \right) - 28\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{19}x\right) e^{-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}} \\ & - 50\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{19}\right) - 300\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{19}x\right) e^{-\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}} \\ & + 28e^{-x} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{19}\right) \end{aligned}$$

Для сравнения решений отобразим их на одном графике (рис. 8.8):

```
>pex:=plot(rhs(exact_sol1),x=a..b,color=BLACK,
legend='точное решение',
legendstyle=[font=[Helvetica,boldoblique,13]]):
psh:=plot(fd_table1,x=a..b,color=BLACK,
style=point,symbolsize=14,
legend='конечно-разностное решение',
numpoints=5,legendstyle=[font=[Helvetica,boldoblique,13]]):
plots[display]({pex,psh},gridlines=true,
font=[Helvetica,boldoblique,13],
labelfont=[Helvetica,boldoblique,13]);
```

Графики показывают хорошее согласие найденных решений.

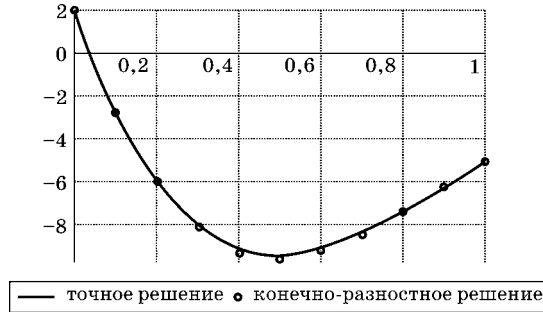


Рис. 8.8  
Сравнение решений

### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СЕТОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Сформулируем общие принципы решения задач математической физики методом сеток на примере расчета упругих систем.

Расчет методом сеток ведется по единому алгоритму, независимо от того, изучается ли прочность, устойчивость или колебания, а также независимо от

того, является ли система статически определимой или неопределимой, с постоянной или переменной жесткостью, с произвольными граничными условиями и произвольной внешней нагрузкой.

Рекомендуется расчет производить в следующем порядке.

1. Записать дифференциальное уравнение рассматриваемой задачи (например, уравнение равновесия балки, уравнение свободных колебаний балки и т. п.).

2. На изучаемом объекте (оси стержня) нанести сетку выбранной густоты. Пронумеровать узлы.

3. Осуществить переход от исходного дифференциального уравнения задачи к алгебраическому уравнению общего вида путем замены производных их приближенными выражениями для выбранной сетки.

4. Записать алгебраическое уравнение общего вида для каждого внутреннего узла сетки и сформировать из полученных уравнений систему.

5. Записать граничные условия задачи в конечно-разностной форме.

6. Решить систему алгебраических уравнений с учетом граничных условий и тем самым определить значения искомой функции в узлах сетки. В исследованиях устойчивости и колебаний найти соответствующие параметры задачи.

7. Вычислить внутренние усилия и напряжения в узлах сетки по значениям искомой функции в этих узлах.

Краткие сведения из теории метода сеток, рассмотренные выше, проиллюстрируем подробными решениями задач, как достаточно простых (иллюстративных), так и тех, которые потребовали применения ЭВМ.

В качестве первого примера рассмотрим изгиб простой балки постоянной жесткости, лежащей на двух опорах.

**Задача 6.** Для балки (рис. 8.9) построить эпюру прогибов, эпюру изгибающих моментов и вычислить нормальные максимальные напряжения, используя метод сеток.

*Решение:*

1) записываем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки — уравнение изгиба балки:

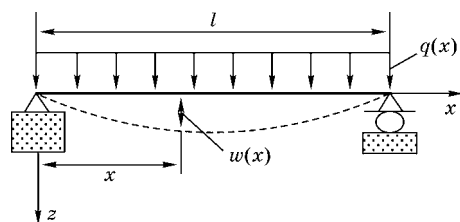


Рис. 8.9  
Простая балка

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI}, \quad (8.22)$$

где  $w(x)$  — функция, выражающая закон изменения вертикальных перемещений (прогибов) по длине балки;  $q(x)$  — функция, выражающая закон изменения внешней распределенной нагрузки;  $EI$  — жесткость балки при изгибе, причем  $E$  — модуль Юнга материала, из которого изготовлена балка, а  $I$  — момент инерции поперечного сечения балки. Нагрузка считается положительной, если она совпадает по направлению с положительным направлением оси  $z$ ;

2) наносим на ось балки сетку и нумеруем узлы. Примем в начале  $h = \frac{l}{2}$  (рис. 8.10).

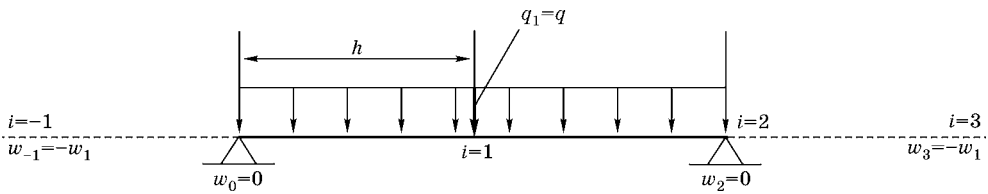


Рис. 8.10  
Расчетная сетка

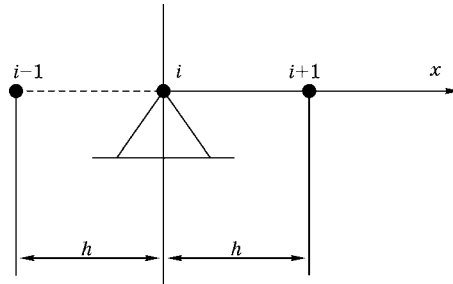


Рис. 8.11  
Шарнирная опора

3) заменяем дифференциальное уравнение (8.22) алгебраическим. Вместо четвертой производной записываем ее приближенное значение по формуле (8.21), заменяя  $f$  на  $w$ . Получим в общем виде алгебраическое уравнение, справедливое для любой внутренней  $i$ -й точки балки:

$$\frac{w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}}{h^4} = \frac{q_i}{EI}. \quad (8.23)$$

Здесь индекс  $i$  в правой части уравнения (8.23) указывает, что в общем случае при произвольной нагрузке необходимо брать те значения внешней распределенной нагрузки  $q(x_i) = q_i$ , которые соответствуют узлу сетки  $x_i$  с номером  $i$ , для которого записывается уравнение. В нашем случае  $q(x_i) = q_i = q$  для всех  $i$ ;

4) записываем алгебраическое уравнение (8.23) для всех внутренних узлов, получающих перемещения. У нас таким узлом оказался узел с номером  $i = 1$  (рис. 8.10).

$$\frac{w_{-1} - 4w_0 + 6w_1 - 4w_2 + w_3}{h^4} = \frac{q_1}{EI}. \quad (8.24)$$

Законтурные узлы  $i = -1$  и  $i = 3$  являются условными и введены для удобства записи уравнения (8.23), а прогибы в этих узлах исключаем с помощью граничных условий;

5) записываем граничные условия. В общем случае (рис. 8.11) для шарнирной опоры  $i$ .

$$w_i = 0, \quad M_i = 0, \quad (8.25)$$

где  $M_i$  — значение изгибающего момента в точке  $x_i$  (на  $i$ -й опоре). Из теории изгиба балок для  $i$ -й опоры запишем\*

$$\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_i = -\frac{M_i}{EI}. \quad (8.26)$$

Заменим вторую производную по формуле (8.11) и, учитывая формулы (8.25), получим

$$w_{i-1} + w_{i+1} = 0,$$

откуда

$$w_{i-1} = -w_{i+1}, \quad (8.27)$$

т. е. прогиб в условном законтурном узле по отношению к шарнирному опиранию равен прогибу с обратным знаком ближайшего узла, расположенного внутри контура. В нашем случае

$$w_0 = w_2 = 0, \quad w_{-1} = -w_1, \quad w_3 = -w_1. \quad (8.28)$$

Уравнение (8.24) с учетом граничных условий (8.28) будет выглядеть следующим образом:

$$-w_1 + 6w_1 - w_1 = \frac{q_1 h^4}{EI},$$

откуда при  $h = \frac{l}{2}$  получим

$$w_1 = \frac{qh^4}{4EI} = \frac{ql^4}{64EI} = \frac{6ql^4}{384EI}.$$

Точное значение прогиба в середине пролета, как известно (читателю, не знакомому с сопротивлением материалов, рекомендуем получить это значение самостоятельно!):

$$w_{\max} = w|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{5ql^4}{384EI} \approx 0,0130 \frac{ql^4}{EI};$$

6) вычисляем изгибающие моменты в поперечных сечениях, совпадающих с узлами сетки. Выражение изгибающего момента в дифференциальной форме имеет вид

$$M(x) = -EI \frac{d^2w}{dx^2}.$$

---

\* Вывод уравнения (8.26) приводится в любом учебнике по сопротивлению материалов (см., например: Александров, А. В., Потапов, В. Д., Державин, Б. П. Сопротивление материалов: учеб. для вузов. — М.: Высш. шк., 1995).

Выражения изгибающего момента в алгебраической форме через перемещения получим, если вторую производную заменим ее приближенным выражением по формуле (8.11). Для произвольного  $i$ -го узла

$$M_i = -EI \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_i = -\frac{EI(w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}))}{h^2}. \quad (8.29)$$

Для узла  $i = 1$  будем иметь с учетом формулы для  $w_1$  и с учетом равенств  $h = \frac{l}{2}$ ,  $w_0 = w_2 = 0$ :

$$M_1 = -\frac{EI(w_2 - 2w_1 + w_0)}{h^2} = \frac{2EIw_1}{h^2} = \frac{qh^2}{2} = \frac{ql^2}{8},$$

что совпадает с точным значением изгибающего момента в центре балки;

7) вычисляем нормальные напряжения по формуле (рис. 8.12):

$$\sigma = \frac{M(x)z}{I}; \quad |\sigma|_{\max} = \frac{|M|_{\max} t}{2I},$$

где  $t$  — высота поперечного сечения балки.

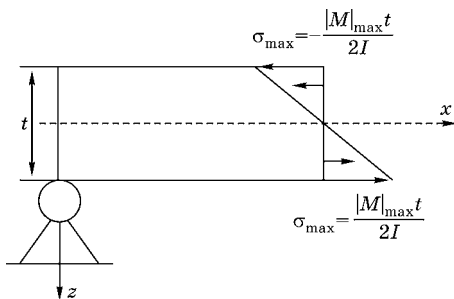


Рис. 8.12  
Нормальное напряжение

Очевидно, интерес представляют экстремальные (наибольшие по модулю) напряжения, которые возникают в крайних волокнах балки, наиболее удаленных от нейтральной оси (оси  $x$ ).

Для уточнения результатов необходимо уменьшить шаг сетки. Читателю рекомендуем поэкспериментировать с вычислениями при различных шагах сетки.

Продemonстрируем решение этой задачи в Maple. Пусть, например,  $h = \frac{l}{4}$ .

```
>restart;
with(linalg):
>ode:=diff(w(x),x$4)=q(x)/EI;
bc1:=w(0)=0,(D@@2)(w)(0)=0;
bc2:=w(l)=0,(D@@2)(w)(l)=0;
```

$$\begin{aligned} ode &:= \frac{d^4}{dx^4} w(x) = \frac{q(x)}{EI} \\ bc1 &:= w(0) = 0, D^{(2)}(w)(0) = 0 \\ bc2 &:= w(l) = 0, D^{(2)}w(l) = 0 \end{aligned}$$

Граничные условия заданы в точках:

```
>a := 0: b := l:
```



Получим конечно-разностные уравнения для этой краевой задачи при:

>N := 4;

Шаг сетки:

>h := (b-a)/N;

$$h := \frac{1}{4}l$$

Определяем абсциссы:

>X:=k -> a+k\*h;

$$X := k \rightarrow a + kh$$

Определяем конечно-разностные операторы:

>W1:=k -> (W[k+1]-W[k-1])/2/h;

>W2:=k -> (W[k+1]-2\*W[k]+W[k-1])/h^2;

>W3:=k -> (W[k+2]-2\*W[k+1]+2\*W[k-1]-W[k-2])/2/h^3;

>W4:=k -> (W[k+2]-4\*W[k+1]+6\*W[k]-4\*W[k-1]+W[k-2])/h^4;

$$W1 := k \rightarrow \frac{1}{2} \frac{W_{k+1} - W_{k-1}}{h}$$

$$W2 := k \rightarrow \frac{W_{k+1} - 2W_k + W_{k-1}}{h^2}$$

$$W3 := k \rightarrow \frac{1}{2} \frac{W_{k+2} - 2W_{k+1} + 2W_{k-1} - W_{k-2}}{h^3}$$

$$W4 := k \rightarrow \frac{W_{k+2} - 4W_{k+1} + 6W_k - 4W_{k-1} + W_{k-2}}{h^4}$$

Формируем граничные условия:

>eq[-1]:=W[0]=rhs(bc1[1]);

eq[0]:=eval(bc1[2], {x = X(0), (D@@2)(w)(0) = W2(0)});

eq[N]:=W[N]=rhs(bc2[1]);

eq[N+1]:=eval(bc2[2], {x = X(N), (D@@2)(w)(l) = W2(N)});

$$eq_{-1} := W_0 = 0$$

$$eq_0 := \frac{16(W_1 - 2W_0 + W_{-1})}{l^2} = 0$$

$$eq_4 := W_4 = 0$$

$$eq_5 := \frac{16(W_5 - 2W_4 + W_3)}{l^2} = 0$$

и уравнения для значений во внутренних узлах:

>for k from 1 to N-1 do

eq[k]:=eval(ode, {x=X(k), diff(w(x), x\$4)=W4(k)});

end do;

$$eq_1 := \frac{256(W_3 - 4W_2 + 6W_1 - 4W_0 + W_{-1})}{l^4} = \frac{q0}{EI}$$

$$eq_2 := \frac{256(W_4 - 4W_3 + 6W_2 - 4W_1 + W_0)}{l^4} = \frac{q0}{EI}$$

$$eq_3 := \frac{256(W_5 - 4W_4 + 6W_3 - 4W_2 + W_1)}{l^4} = \frac{q0}{EI}$$

Решение полученной системы:

>W\_sol:=solve({seq(eq[k],k=-1..N+1)},{seq(W[k],k=-1..N+1)});

$$W\_sol := \left\{ W_{-1} = -\frac{5}{12} \frac{q0l^4}{EI}, W_0 = 0, W_1 = \frac{5}{12} \frac{q0l^4}{EI}, W_2 = \frac{7}{512} \frac{q0l^4}{EI}, W_3 = \frac{5}{512} \frac{q0l^4}{EI}, W_4 = 0, W_5 = -\frac{5}{512} \frac{q0l^4}{EI} \right\}$$

Переформатирование результата для графического отображения:

>W\_table:=eval([seq([X(k),W[k]],k=0..N)], W\_sol);

$$W\_table := \left[ [0, 0], \left[ \frac{1}{4}l, \frac{5}{512} \frac{q0l^4}{EI} \right], \left[ \frac{1}{2}l, \frac{7}{512} \frac{q0l^4}{EI} \right], \left[ \frac{3}{4}l, \frac{5}{512} \frac{q0l^4}{EI} \right], [l, 0] \right]$$

и для табличного представления:

>stackmatrix(W\_table);

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{4}l & \frac{5}{512} \frac{q0l^4}{EI} \\ \frac{1}{2}l & \frac{7}{512} \frac{q0l^4}{EI} \\ \frac{3}{4}l & \frac{5}{512} \frac{q0l^4}{EI} \\ l & 0 \end{bmatrix}$$

Для последующей оценки качества численного решения построим точное решение задачи:

>exact\_sol\_W := dsolve({ode,bc1,bc2}, w(x));

$$exact\_sol\_W := w(x) = \frac{1}{24} \frac{q0x^4}{EI} - \frac{1}{12} \frac{q0lx^3}{EI} + \frac{1}{24} \frac{q0l^3x}{EI}$$

>w:=unapply(rhs(exact\_sol\_W),x);

M\_exact:=-EI\*D(D(w))(x);

Q\_exact:=-EI\*(D@@3)(w)(x);

$$w := x \rightarrow \frac{1}{24} \frac{q_0 x^4}{EI} - \frac{1}{12} \frac{q_0 l x^3}{EI} + \frac{1}{24} \frac{q_0 l^3 x}{EI}$$

$$M\_exact := -EI \left( \frac{1}{2} \frac{q_0 x^2}{EI} - \frac{1}{2} \frac{q_0 l x}{EI} \right)$$

$$Q\_exact := -EI \left( \frac{q_0 x}{EI} - \frac{1}{2} \frac{q_0 l}{EI} \right)$$

Для сравнения решений отобразим точное и конечно-разностное решение на одном графике (рис. 8.13). Для определенности рассмотрим стальную двутавровую балку № 20 длиной 1 м, нагруженную равномерным давлением 100 кН/м<sup>2</sup> (модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, момент инерции  $I = 1840$  см<sup>4</sup>):

```
>plot(eval([rhs(exact_sol_W),W_table],
[=1,a=0,b=1,q0=100000,EI=(2*10^11*1840)*10^(-8)]),
x=0..1,title='Сравнение решений',
style=[line,point],symbolsize=14,
color=BLACK,thickness=[1,3],
legend=['точное',`конечные разности`],
gridlines=true,font=[Helvetica,bold,14],
labelfont=[Helvetica,bold,14],
legendstyle=[font=[Helvetica,bold,14]]);
```

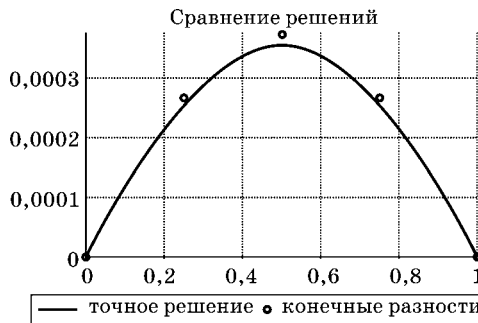


Рис. 8.13  
Сравнение прогибов

Видим хорошее согласие между точным и конечно-разностным решением. Изгибающие моменты:

```
>M_fd := k -> -EI*W2(k):
```

Переформатирование результата для графического отображения:

```
>M_table:=eval([seq([X(k),M_fd(k)],k=0..N)],W_sol);
```

$$M\_table := \left[ [0, 0], \left[ \frac{1}{4}l, \frac{3}{32}q_0 l^2 \right], \left[ \frac{1}{2}l, \frac{1}{8}q_0 l^2 \right], \left[ \frac{3}{4}l, \frac{3}{32}q_0 l^2 \right], [l, 0] \right]$$

и для табличного представления:

```
>stackmatrix(M_table);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{4}l & \frac{3}{32}q_0l^2 \\ \frac{1}{2}l & \frac{1}{8}q_0l^2 \\ \frac{3}{4}l & \frac{3}{32}q_0l^2 \\ l & 0 \end{bmatrix}$$

Отобразим точное и конечно-разностное решение для момента (рис. 8.14):

```
>plot(eval([M_exact(x),M_table],
[|=1,a=0,b=1,q0=100000,EI=(2*10^11*1840)*10^(-8)]),
x=0..1,title='Сравнение решений',
style=[line,point],symbolsize=14,
color=BLACK,thickness=[1,3],
legend=['точное', 'конечные разности'],
gridlines=true,font=[Helvetica,bold,14],
labelfont=[Helvetica,bold,14],
legendstyle=[font=[Helvetica,bold,14]]);
```

Наконец, рассмотрим перерезывающие силы (рис. 8.15):

```
>Q_fd:= k -> -EI*W3(k);
>Q_table:=eval([seq([X(k),Q_fd(k)],k=1..N-1)],W_sol);
```

$$Q\_table := \left[ \left[ \frac{1}{4}l, \frac{1}{4}q_0l \right], \left[ \frac{1}{2}l, 0 \right], \left[ \frac{3}{4}l, -\frac{1}{4}q_0l \right] \right]$$

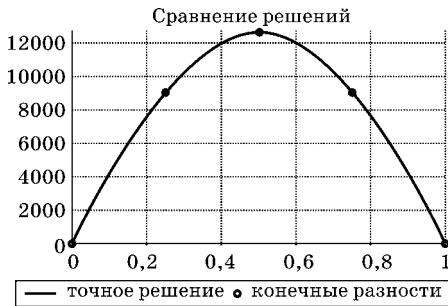


Рис. 8.14  
Сравнение изгибающих моментов

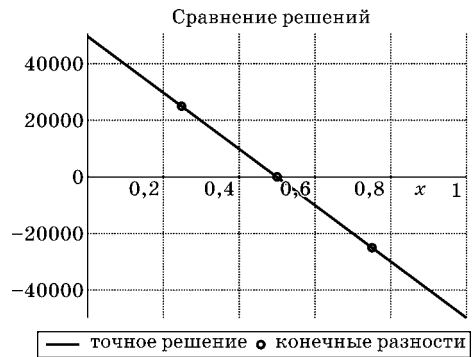


Рис. 8.15  
Сравнение перерезывающих сил

```
>stackmatrix(Q_table);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4}l & \frac{1}{4}q_0l \\ \frac{1}{2}l & 0 \\ \frac{3}{4}l & -\frac{1}{4}q_0l \end{bmatrix}$$

```
>plot(eval([Q_exact(x),Q_table],
[|l=a=0,b=1,q0=100000,EI=(2*10^11*1840)*10^(-8)]),
x=0..1,title='Сравнение решений',
style=[line,point],symbolsize=14,
color=BLACK,thickness=[1,3],
legend=['точное','конечные разности'],
gridlines=true,font=[Helvetica,bold,14],
labelfont=[Helvetica,bold,14],
legendstyle=[font=[Helvetica,bold,14]]);
```

**Задача 7.** Составить систему алгебраических уравнений метода сеток для определения прогибов балки (рис. 8.16 и 8.17) при шаге сетки  $h = l/8$ . Балка опирается на жесткие опоры 0, 2, 4, 8, податливую опору 6 и сплошное основание в пролетах 1, 2, 4. Коэффициенты податливости сплошного упругого основания (коэффициенты постели) равны  $c_1, c_2$  и  $c_5$ , а коэффициент податливости упругой опоры 6 равен  $c_4$ . Погонные коэффициенты постели будут равны:  $k_1 = c_1b, k_2 = c_2b, k_3 = c_3b = 0, k_4 = c_4b, k_5 = c_5b$ ;  $b$  — ширина подошвы балки.

*Решение.* Распределенная нагрузка может быть совершенно произвольной, но заданной в виде функции, по которой определяются значения нагрузки  $q_5, q_6, q_7, q_8$  в узлах. Сосредоточенную силу  $P$  заменяем распределенной  $q_1 = \frac{P}{h}$  (рис. 8.17).

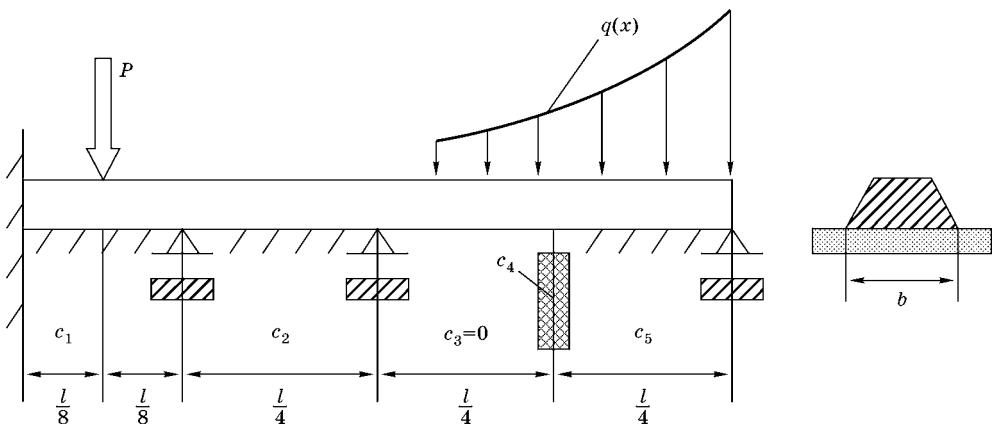


Рис. 8.16  
Расчетная схема к задаче 7

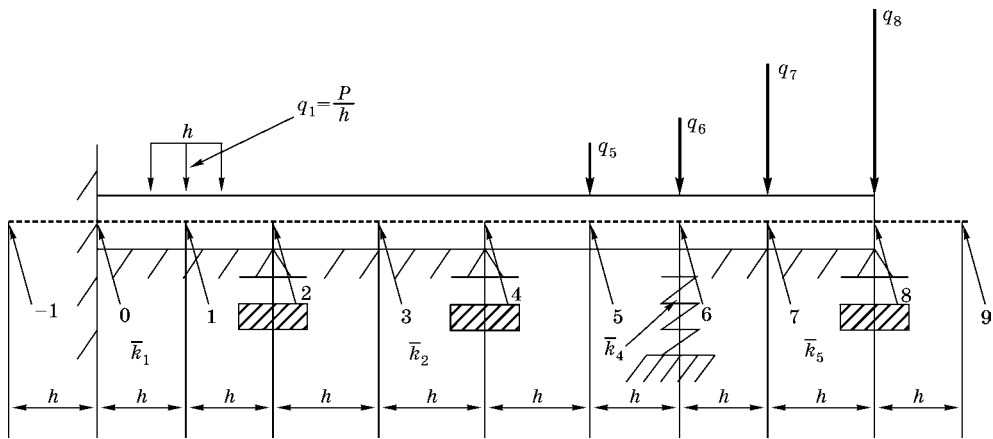


Рис. 8.17  
Расчетная схема. Метод сегментов

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, лежащей на упругом основании, имеет вид\*

$$\frac{d^4 \bar{w}(x)}{dx^4} + \bar{k} \bar{w}(x) = q(x), \quad (8.30)$$

где  $\bar{k} = \frac{k}{EI}$  и  $\bar{w}(x) = EI w(x)$ .

Заменяем дифференциальное уравнение (8.30) алгебраическим общего вида, используя приближенную формулу (8.21). Для произвольного узла  $i$  получим

$$\bar{w}_{i-2} - 4\bar{w}_{i-1} + (6 + \bar{k}_i h^4) \bar{w}_i - 4\bar{w}_{i+1} + \bar{w}_{i+2} = q_i h^4. \quad (8.31)$$

Заметим, что уравнения (8.23) и (8.31) различаются между собой только коэффициентом при  $w_i$ . Поэтому методика применения этих уравнений одна и та же.

Записывая уравнение (8.31) для узлов 1, 3, 5, 6, 7, получающих перемещения, получим искомую систему алгебраических уравнений:

узел  $i = 1$

$$\bar{w}_{-1} - 4\bar{w}_0 + (6 + \bar{k}_1 h^4) \bar{w}_1 - 4\bar{w}_2 + \bar{w}_3 = \frac{P}{h} h^4; \quad (8.32)$$

узел  $i = 3$

$$\bar{w}_1 - 4\bar{w}_2 + (6 + \bar{k}_2 h^4) \bar{w}_3 - 4\bar{w}_4 + \bar{w}_5 = 0; \quad (8.33)$$

узел  $i = 5$

$$\bar{w}_3 - 4\bar{w}_4 + (6 + 0 \cdot h^4) \bar{w}_5 - 4\bar{w}_6 + \bar{w}_7 = q_5 h^4; \quad (8.34)$$

\* Вывод уравнения (7.30) приводится в любом учебнике по сопротивлению материалов.

узел  $i = 6$

$$\bar{w}_4 - 4\bar{w}_5 + (6 + \bar{k}_4 h^4)\bar{w}_6 - 4\bar{w}_7 + \bar{w}_8 = q_6 h^4; \quad (8.35)$$

узел  $i = 7$

$$\bar{w}_5 - 4\bar{w}_6 + (6 + \bar{k}_5 h^4)\bar{w}_7 - 4\bar{w}_8 + \bar{w}_9 = q_7 h^4. \quad (8.36)$$

Рассмотрим граничные условия. Перемещение в законтурном узле  $i = -1$  выразим через перемещение внутреннего узла  $i = 1$  из условия, что в заделке угол поворота равен нулю. В общем случае (рис. 8.18) для узла  $i$  будем иметь

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_i = 0.$$

Заменяя производную по формуле (8.8), получим

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_i = \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} = 0,$$

откуда

$$w_{i-1} = w_{i+1},$$

т. е. перемещение законтурного узла  $i - 1$  по отношению к заделке равно перемещению ближайшего внутреннего узла  $i + 1$ . В рассматриваемом примере

$$\bar{w}_{-1} = \bar{w}_1. \quad (8.37)$$

Согласно выражению (8.27)

$$\bar{w}_9 = -\bar{w}_7. \quad (8.38)$$

Из условия жесткого опирания:

$$\bar{w}_0 = \bar{w}_2 = \bar{w}_4 = \bar{w}_8 = 0. \quad (8.39)$$

Решив систему (8.32)–(8.36) с учетом граничных условий (8.37)–(8.39), получим  $\bar{w}_1$ ,  $\bar{w}_3$ ,  $\bar{w}_5$ ,  $\bar{w}_6$ ,  $\bar{w}_7$ , а по ним и прогибы:

$$w_1 = \frac{\bar{w}_1}{EI}; \quad w_3 = \frac{\bar{w}_3}{EI}; \quad w_5 = \frac{\bar{w}_5}{EI}; \quad w_6 = \frac{\bar{w}_6}{EI}; \quad w_7 = \frac{\bar{w}_7}{EI}.$$

По уравнению (8.29) вычисляются изгибающие моменты в сечениях 0–7 и строится эпюра моментов аналогично, как в задаче 6.

**Задача для самостоятельного решения.** Составить и решить систему алгебраических уравнений для определения прогиба шарнирно опертой балки, изображенной на рисунке 8.19.

На рисунке 8.19 введены обозначения:  $\bar{k}_1$  — коэффициент постели упругого основания в пролетах;  $\bar{k}_2$  — коэффициент податливости упругой промежуточной опоры.

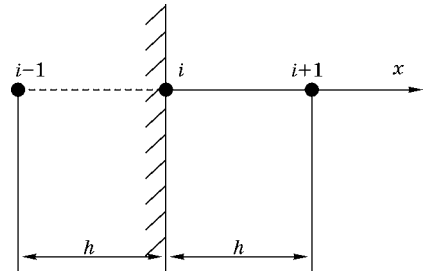


Рис. 8.18  
Жесткая заделка

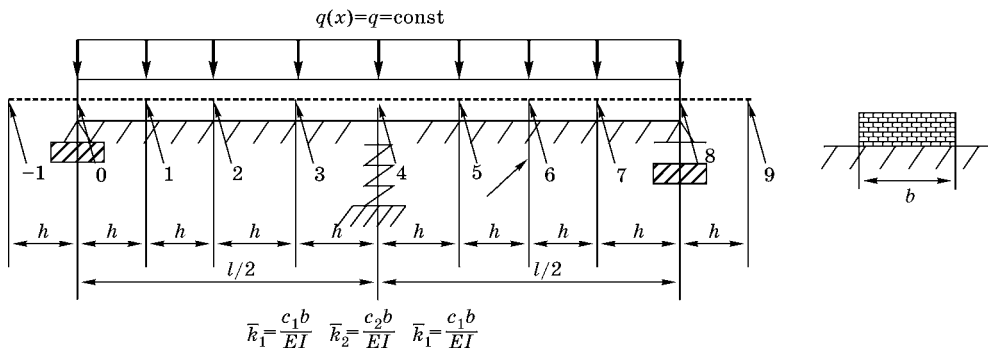


Рис. 8.19  
Расчетная схема метода сеток

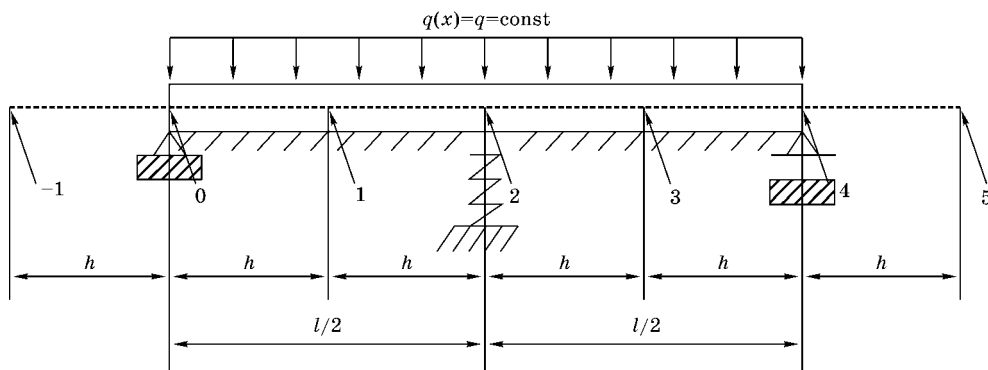


Рис. 8.20  
Сетка при шаге  $l/4$

Для решения задачи использовать систему Maple. Выполнить расчет при шаге сетки  $h = l/4, l/8, l/10, l/20$ . Определить максимальный изгибающий момент и нормальное максимальное напряжение.

Рассмотреть также случай жестко защемленной балки:  $w = 0, w' = 0$  при  $x = 0$  и  $x = l$ .

Ответ (для случая  $h = l/4$ , рис. 8.20). Учитывая симметрию и граничные условия:  $\bar{w}_0 = 0, \bar{w}_{-1} = -\bar{w}_1, \bar{w}_1 = \bar{w}_3, \bar{w}_0 = \bar{w}_4, \bar{w}_1 = \bar{w}_3, \bar{w}_5 = -\bar{w}_3$ , получим

$$\left. \begin{aligned} (6 + \bar{k}_1 h^4) \bar{w}_1 - 4 \bar{w}_2 &= q h^4; \\ -8 \bar{w}_1 + (6 + \bar{k}_2 h^4) \bar{w}_2 &= q h^4. \end{aligned} \right\}$$

Решение системы в общем виде:

$$\bar{w}_1 = EI w_1 = \frac{(10 + \bar{k}_2 h^4) q h^4}{[(6 + \bar{k}_1 h^4)(6 + \bar{k}_2 h^4) - 32]};$$

$$\bar{w}_2 = EI w_2 = \frac{(14 + \bar{k}_1 h^4) q h^4}{[(6 + \bar{k}_1 h^4)(6 + \bar{k}_2 h^4) - 32]}.$$



Изгибающие моменты в сечениях вычисляются по формуле (8.29) (см. задачу 1).

В частном случае при  $\bar{k}_1 = \bar{k}_2 = 0$  (балка на двух опорах без сплошного упругого основания и без податливой промежуточной опоры) получим максимальный прогиб

$$w_2 = 0,0137 \frac{ql^4}{EI},$$

т. е. то же значение, что и в задаче 1 при  $h = l/4$  (проверьте!).

**Задача 8.** Определить критическую силу для стойки (рис. 8.21) при шаге сетки  $h = \frac{l}{5}$ .

*Решение.* Дифференциальное уравнение равновесия имеет вид\*

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{P}{EI}w = 0. \quad (8.40)$$

Заменяем уравнение (8.40) алгебраическим уравнением общего вида, используя формулу (8.11). Для произвольной  $i$ -й точки на оси стержня получим

$$\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} + \frac{P}{EI}w_i = 0$$

или

$$w_{i-1} + \left( \frac{Ph^2}{EI} - 2 \right) w_i + w_{i+1} = 0. \quad (8.41)$$

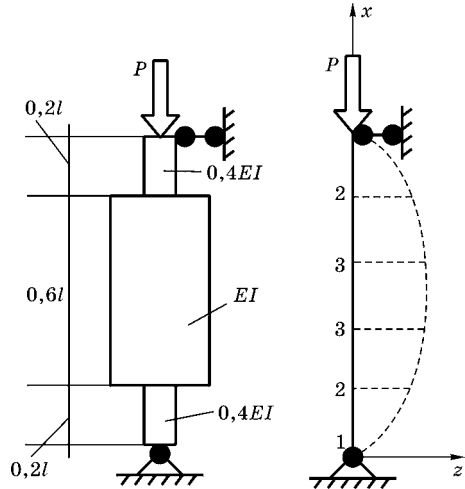


Рис. 8.21  
Устойчивость стойки

Пронумеруем узлы с учетом симметрии в геометрии и в краевых условиях. Уравнение (8.41) запишем только для узлов 2 и 3.

Узел 2:

$$w_1 + \left( \frac{Ph^2}{EI_2} - 2 \right) w_2 + w_3 = 0.$$

Для сечений, имеющих скачок, рекомендуется записывать среднюю жесткость примыкающих частей, т. е. для второго узла

$$\frac{1}{EI_2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{0,4EI} + \frac{1}{EI} \right) = 1,75 \frac{1}{EI}.$$

Окончательно, для второго узла получим

$$w_1 + \left( \frac{1,75Ph^2}{EI} - 2 \right) w_2 + w_3 = 0.$$

\* Вывод уравнения (8.40) приводится в любом учебнике по сопротивлению материалов.

Узел 3:

$$w_2 + \left( \frac{Ph^2}{EI} - 1 \right) w_3 = 0.$$

Обозначив  $\beta = \frac{Ph^2}{EI}$  и учитывая, что  $w_1 = 0$ , получим

$$\left. \begin{aligned} (1,75\beta - 2)w_2 + w_3 &= 0, \\ w_2 + (\beta - 1)w_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Потеря устойчивости происходит при перемещениях, отличных от нуля. Но нетривиальное решение однородной системы уравнений возможно в том случае, если определитель матрицы системы равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} (1,75\beta - 2) & 1 \\ 1 & (\beta - 1) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим алгебраическое уравнение второго порядка относительно параметра  $\beta$  — характеристическое уравнение:

$$1,75\beta^2 - 3,75\beta + 1 = 0,$$

откуда  $\beta_{\min} = 0,31$ . Таким образом, критическая сила при  $h = \frac{l}{5}$

$$P_{kp} = \frac{7,75EI}{l^2}.$$

С уменьшением шага сетки результат становится более точным. Рекомендуем выполнить расчет с шагом  $h = \frac{l}{10}$ ,  $h = \frac{l}{15}$ ,  $h = \frac{l}{20}$ .

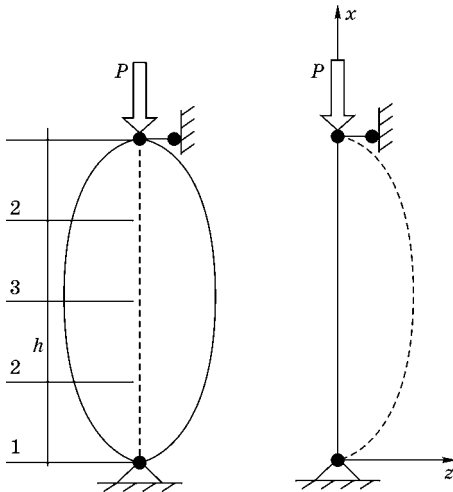


Рис. 8.22  
Стойка

*Примечание.* Методика применения метода сеток остается такой же и для задач об устойчивости стоек с непрерывно меняющейся жесткостью (рис. 8.22).

Пусть, например, момент инерции изменяется по закону

$$I(x) = I_0 \frac{4x(l-x)}{l^2}.$$

Тогда

$$I_2 = I|_{x=\frac{l}{4}} = \frac{3}{4}I_0; \quad I_3 = I|_{x=\frac{l}{2}} = I_0.$$

Пронумеруем узлы с учетом симметрии и запишем уравнение (8.41) только для узлов 2 и 3.

Узел 2:

$$w_1 + \left( \frac{Ph^2}{EI_0} - 2 \right) w_2 + w_3 = 0.$$

Узел 3:

$$w_2 + \left( \frac{Ph^2}{EI_0} - 1 \right) w_3 + w_2 = 0.$$

Обозначив  $\beta = \frac{Ph^2}{EI_0}$  и учитывая, что  $w_1 = 0$ , получим характеристическое уравнение:

$$\frac{4}{3}\beta^2 - \frac{14}{3}\beta + 2 = 0,$$

откуда  $\beta_{\min} = \frac{1}{2}$ . Таким образом, при  $h = \frac{l}{4}$

$$P_{kp} = \frac{8EI_0}{l^2}.$$

**Задача 9.** Для балки с равномерно распределенной массой по длине (рис. 8.23) определить низшую собственную частоту свободных поперечных колебаний, приняв шаг сетки  $h = \frac{l}{3}$ .

*Решение.* Дифференциальное уравнение свободных поперечных колебаний балки с равномерно распределенной массой имеет вид

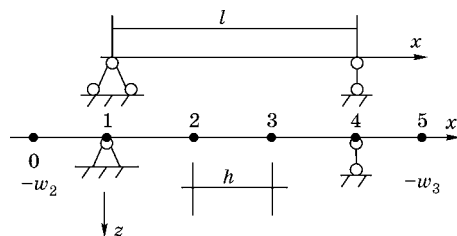


Рис. 8.23  
К задаче 9

$$\frac{d^4w}{dx^4} - \frac{F\rho\omega^2}{EI}w = 0, \quad (8.42)$$

где  $F$  — площадь поперечного сечения балки;  $\rho$  — плотность материала балки;  $\omega$  — искомая круговая частота свободных колебаний балки;  $EI$  — жесткость балки при изгибе.

Заменяем дифференциальное уравнение (8.42) алгебраическим общего вида, используя формулу (8.11). Для произвольной  $i$ -й точки на оси стержня получим

$$w_{i-2} - 4w_{i-1} + (6 - \beta)w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2} = 0, \quad (8.43)$$

где введено обозначение  $\beta = \frac{F\rho\omega^2}{EI}h^4$ .

Записываем уравнение (8.43) для узлов 2 и 3.

Узел 2:

$$w_0 - 4w_1 + (6 - \beta)w_2 - 4w_3 + w_4 = 0.$$

Узел 3:

$$w_1 - 4w_2 + (6 - \beta)w_3 - 4w_4 + w_5 = 0.$$

С учетом граничных условий:  $w_1 = w_4 = 0$ ,  $w_0 = -w_2$ ,  $w_5 = -w_3$ . Таким образом, будем иметь систему

$$\left. \begin{aligned} (5 - \beta)w_2 - 4w_3 &= 0; \\ -4w_2 + (5 - \beta)w_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.44)$$

Нас, очевидно, интересует нетривиальное решение системы (8.44), которое возможно лишь в случае равенства нулю ее определителя. Раскрывая определитель системы (8.44), получим характеристическое уравнение для определения собственных частот:

$$\beta^2 - 10\beta + 9 = 0,$$

откуда найдем  $\beta_{\min} = 1$ . Таким образом, низшая собственная частота балки будет при  $h = \frac{l}{3}$

$$\omega = \frac{9}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}}.$$

Для сравнения — точное значение низшей собственной частоты  $\omega = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}}$ . Очевидно, погрешность расчета составляет 8,7%. Если выполнить расчет с меньшим шагом, например  $h = \frac{l}{5}$ , погрешность составит менее 3,3%, а при шаге  $h = \frac{l}{20}$  — 0,2%.

Первая низшая частота (частота первого тона) называется основной и играет важную роль в инженерной практике, поскольку она соответствует наибольшим амплитудам, а следовательно, и наибольшим напряжениям.

### 8.3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. МЕТОД СЕТОК

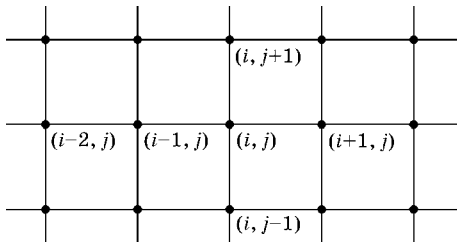


Рис. 8.24  
Двумерная сетка

#### ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Частные производные от функции двух переменных  $f(x, y)$  определяются по той же методике, что и от функции одной переменной.

Нанесем на изучаемую область (например, на пластинку), вдоль осей  $x$  и  $y$  сетку с одинаковым шагом  $h$  (рис. 8.24). Частная производная от функции  $f(x, y)$  по переменной  $x$  определится в точке  $(i, j)$  по формуле (8.8):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h}.$$

Вторую производную по переменной  $x$  в точке  $(i, j)$  получим, используя формулу (8.11):

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h^2}.$$

Третья производная по  $x$  согласно выражению (8.16):

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{i,j} = \frac{1}{2h^3}(f_{i+2,j} - 2f_{i+1,j} + 2f_{i-1,j} - f_{i-2,j}).$$

Четвертую производную по  $x$  в точке  $(i, j)$  вычислим по формуле (8.21):

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_{i,j} = \frac{f_{i-2,j} - 4f_{i-1,j} + 6f_{i,j} - 4f_{i+1,j} + f_{i+2,j}}{h^4}.$$

Совершенно аналогично получим частные производные от функции  $f(x, y)$  по переменной  $y$  в точке  $(i, j)$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i,j} &= \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2h}; \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{i,j} &= \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{h^2}; \\ \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_{i,j} &= \frac{1}{2h^3}(f_{i,j+2} - 2f_{i,j+1} + 2f_{i,j-1} - f_{i,j-2}); \\ \left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)_{i,j} &= \frac{f_{i,j-2} - 4f_{i,j-1} + 6f_{i,j} - 4f_{i,j+1} + f_{i,j+2}}{h^4}. \end{aligned}$$

Выведем формулу для вычисления смешанных производных функции  $f(x, y)$ . Представим смешанную производную в точке  $(i, j)$  в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i,j}$$

и используем конечно-разностное выражение для  $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i,j}$ , получим

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2h}\right) = \frac{1}{2h} \left[ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j+1} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j-1} \right].$$

Заменяем  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j+1}$ ,  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j-1}$  конечно-разностными выражениями, получим

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} = \frac{1}{2h} \left[ \left( \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1}}{2h} \right) - \left( \frac{f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j-1}}{2h} \right) \right] = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1}}{4h^2}.$$

Далее

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j-1} + 2f_{i-1,j} - f_{i-1,j+1}}{2h^3};$$

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_{i,j} = \frac{f_{i-1,j+1} - 2f_{i,j+1} + f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j-1} + 2f_{i,j-1} - f_{i+1,j-1}}{2h^3}.$$

И наконец,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{i,j} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{h^2}\right) = \\ &= \frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i,j+1} + f_{i-1,j+1}}{h^4} - \frac{2(f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j})}{h^4} + \frac{f_{i+1,j-1} - 2f_{i,j-1} + f_{i-1,j-1}}{h^4} = \\ &= \frac{4f_{i,j} + f_{i+1,j+1} + f_{i-1,j+1} + f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1} - 2(f_{i,j+1} + f_{i,j-1} + f_{i+1,j} + f_{i-1,j})}{h^4}. \end{aligned}$$

Заметим, что приведенные формулы для приближенного вычисления производных справедливы только для прямоугольной сетки с равным шагом  $h$  (квадратной сетки). Легко получить аналогичные формулы при разных шагах сетки, например  $h_1$  по оси  $x$  и  $h_2$  по оси  $y$ . Предоставим это читателю в качестве упражнения.

### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СЕТОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Рассмотрим на примере следующей задачи: найти стационарное распределение температуры в прямоугольной однородной пластинке  $\{0 \leq x \leq L_1, 0 \leq y \leq L_2\}$ , если ее стороны  $\{x = L_1, y = L_2\}$  покрыты тепловой изоляцией, две другие стороны  $\{x = 0, y = 0\}$  поддерживаются при нулевой температуре, а в пластинке выделяется тепло с постоянной плотностью  $q$ .

Математическая формулировка задачи: найти функцию  $w(x, y)$ , удовлетворяющую уравнению Пуассона в прямоугольнике:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{q(x, y)}{k}, \quad 0 < x < L_1, \quad 0 < y < L_2$$

и граничным условиям на контуре прямоугольника:

$$w(0, y) = 0; \quad w(x, 0) = 0; \quad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=L_1} = 0; \quad \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=L_2} = 0.$$

Используем для решения задачи систему Maple:

```
>restart;  
>with(plots):  
>with(linalg):  
>interface(displayprecision = 5):
```

Определяем разностные операторы. Первая производная по  $x$ :

```
>fx1:=proc(f,m,n,h) (f[m+1,n]-f[m-1,n])/2/h; end proc:  
fx1(f,m,n,h);
```

$$\frac{1}{2} \frac{f_{m+1,n} - f_{m-1,n}}{h}$$

Вторая производная по  $x$ :

```
>fx2:=proc(f,m,n,h) (f[m+1,n]-2*f[m,n]+f[m-1,n])/h^2;  
end proc:  
fx2(f,m,n,h);
```

$$\frac{f_{m+1,n} - 2f_{m,n} + f_{m-1,n}}{h^2}$$

Первая производная по  $y$ :

```
>fy1:=proc(f,m,n,h) (f[m,n+1]-f[m,n-1])/2/h; end proc:  
fy1(f,m,n,h);
```

$$\frac{1}{2} \frac{f_{m,n+1} - f_{m,n-1}}{h}$$

Вторая производная по  $y$ :

```
>fy2:=proc(f,m,n,h) (f[m,n+1]-2*f[m,n]+f[m,n-1])/h^2;  
end proc:  
fy2(f,m,n,h);
```

$$\frac{f_{m,n+1} - 2f_{m,n} + f_{m,n-1}}{h^2}$$

Конечно-разностные производные для функции  $w(x, y)$ :

```
>Wx1:=unapply(fx1(W,m,n,h[1]),m,n);  
Wx2:=unapply(fx2(W,m,n,h[1]),m,n);
```

$$Wx1 := (m, n) \rightarrow \frac{1}{2} \frac{W_{m+1,n} - W_{m-1,n}}{h_1}$$
$$Wx2 := (m, n) \rightarrow \frac{W_{m+1,n} - 2W_{m,n} + W_{m-1,n}}{h_1^2}$$

```
>Wy1:=unapply(fy1(W,m,n,h[2]),m,n);
Wy2:=unapply(fy2(W,m,n,h[2]),m,n);
```

$$Wy1 := (m, n) \rightarrow \frac{1}{2} \frac{W_{m,n+1} - W_{m,n-1}}{h_2}$$

$$Wy2 := (m, n) \rightarrow \frac{W_{m,n+1} - 2W_{m,n} + W_{m,n-1}}{h_2^2}$$

Обратим внимание, что здесь шаги сетки в направлениях  $x$  и  $y$  могут быть различными. Рекомендуем читателю поэкспериментировать с выбором шагов в зависимости от условий задачи.

Определяем задачу в Maple:

```
>pde:=VectorCalculus[Laplacian](w(x,y),[x,y])=-q/K;
```

$$pde := \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} w(x, y) = -\frac{q}{K}$$

```
>bc1:=w(0,y)=0,w(x,0)=0;
```

```
bc2:=D[1](w)(L[1],y)=0,D[2](w)(x,L[2])=0;
```

$$bc1 := w(0, y) = 0, w(x, 0) = 0$$

$$bc2 := D_1(w)(L_1, y) = 0, D_2(w)(x, L_2) = 0$$

Получим конечно-разностные уравнения для этой задачи. Пусть, например:

```
>M:=8:N:=8:
```

```
>L:=[4,4];h:=[L[1]/M,L[2]/N];K:=40;q:=10;
```

$$L := [4, 4]$$

$$h := \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

$$K := 40$$

$$q := 10$$

Определяем сетку по  $x$  и  $y$ :

```
>X:=k->k*h[1]; Y:=k->k*h[2];
```

$$X := k \rightarrow kh_1$$

$$Y := k \rightarrow kh_2$$

Учтем граничные условия:

```
>for n from 0 to N do
```

```
W[0,n]:=0;
```

```
W[M+1,n]:=W[M-1,n];
```

```
end do:
```

```
>for m from 0 to M do
```

```
W[m,0]:=0;
```

```
W[m,N+1]:=W[m,N-1];
```

```
end do:
```



Уравнения для значений во внутренних узлах:

```
>for m from 0 to M do
for n from 0 to N do
eq[m,n]:=eval(pde,
{x = X(m),y = Y(n),
diff(w(x,y),x$2) = Wx2(m,n),
diff(w(x,y),y$2) = Wy2(m,n)});
end do;
end do;
```

Численное решение полученной системы:

```
>eq_set:={};
for m from 1 to M do
for n from 1 to N do
eq_set:= eq_set union {eq[m,n]};
end do;
end do;
>var_set:={};
for m from 1 to M do
for n from 1 to N do
var_set := var_set union {W[m,n]};
end do;
end do;
>W_sol:=fsolve( eq_set,var_set);
>assign(W_sol);
```

Изобразим полученное решение в виде пространственной поверхности (рис 8.25):

```
>w:=[seq([seq([i*h[1],j*h[2],evalf(W[i,j])],
i=0..M)],j=0..N)];
>surfdata(w,axes=frame,labels=[x,y,'w'],
orientation=[-35, 65, 0],
title=cat('Решение при M = N = ',convert(M,string)),
font=[Courier,bold,13],labelfont=[Courier,bold,13]);
```

Посмотрим, например, график распределения температур в центральном сечении пластинки при  $y = L_2/2$  (рис. 8.26). Для этого найдем номер узла, соответствующего середине стороны  $y = L_2/2$ :

```
>l*h[2]=L[2]/2;l:=solve(l*h[2]=L[2]/2,l);
```

$$\frac{1}{2}l = 2$$

$$l := 4$$

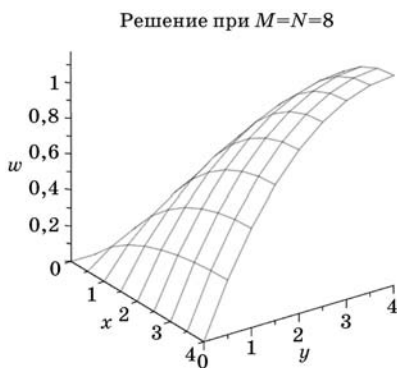


Рис. 8.25  
Пространственная эпюра температур



Рис. 8.26  
Распределение температур в сечении  $y = L_2/2$

```

>W_yc:=seq([i*h[1],evalf(W[i,l])],i=0..M):
>Рус:=plot(W_yc,title=cat("Решение в центральном сечении при
y = ",convert(L[2]/2,string)),labels=[x,'w'],
color=black,gridlines=true,font=[Courier,bold,13],
labelfont=[Courier,bold,13],style=point,symbolsize=13,
xtickmarks=7,ytickmarks=7,
legend=cat("M = N = ",convert(M,string))):
plots[display](Рус);

```

Рассматриваемая задача допускает точное решение, которое может быть получено методом Гринберга. Точное решение имеет вид (рекомендуем читателю самостоятельно получить это решение!)

$$u(x, y) = \frac{16qL_1^2}{k\pi^3} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{ch}\left[\frac{(2j+1)\pi(L_2-y)}{2L_1}\right]}{\operatorname{ch}\left[\frac{(2j+1)\pi L_2}{2L_1}\right]} \right\} \frac{\sin\left[\frac{(2j+1)\pi x}{2L_1}\right]}{(2j+1)^3}.$$

Для сравнения с приближенным решением определим формулу точного решения в виде частичной суммы ряда:

```

>u:=(x,y,S)->16*q*L[1]^2/K/Pi^3*
sum((1-cosh((2*j+1)*Pi*(L[2]-y)/2/L[1])/
cosh(((2*j+1)*Pi*L[2])/2/L[1]))*
sin((2*j+1)*Pi*x/2/L[1])/(2*j+1)^3,j=0..S):

```

Построим график точного решения, взяв пять членов ряда (рис. 8.27):

```

>S:=5;
pUc:=plot(u(x,L[2]/2,S),x=0..L[1],
color=black,gridlines=true,font=[Courier,bold,13],
labelfont=[Courier,bold,13],
xtickmarks=7,ytickmarks=7,
legend=cat("Точное решение S = ",convert(S,string))):
plots[display](pUc);

```

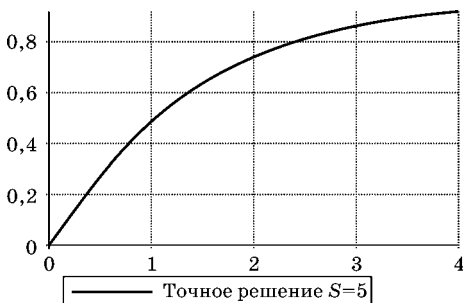


Рис. 8.27

Распределение температур в сечении  $y = L_2/2$

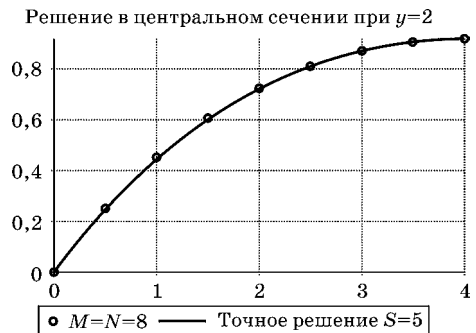


Рис. 8.28

Распределение температур в сечении  $y = L_2/2$ . Сравнение решений

Сравнение решений (рис. 8.28):

```
>plots[display](pUc,Pyc);
```

Анализируя рисунок 8.28, видим хорошее согласие решений!

### ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ВСТРОЕННЫМИ СРЕДСТВАМИ MAPLE

Система Maple может находить численные решения линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных по прямоугольным областям.

Так же как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, для численного решения уравнения (или системы уравнений) в частных производных служит универсальная функция `pdsolve/numeric`. Вызов этой функции осуществляется в следующем формате:

```
pdsolve (PDEsys, conditions, numeric, vars, options);
```

Параметры функции:

- `PDEsys` — одиночное уравнение или набор или список *зависящих от времени* линейных дифференциальных уравнений в частных производных от *двух* независимых переменных;
- `conditions` — набор или список начальных и граничных условий;
- `numeric` — ключевое слово, указывающее на необходимость получения численного решения;
- `vars` — (необязательный) зависимая переменная или набор или список зависимых переменных для `PDEsys`;
- `options` — (необязательные) уравнения ключевого слова формы `keyword = value`, где `keyword` — ключевое слово — одно из `'indepvars'`, `'time'`, `'range'`, `'spacstep'`, `'timestep'`, `'bcopts'` или `'optimize'`; определяет опции для задачи и ее решения.

Функция

```
pdsolve(PDEsys,conditions,numeric,vars,options);
```

возвращает модуль, который может использоваться для определения численного решения зависящих от времени (т. е. гиперболических или параболических) уравнений в частных производных или систем таких уравнений по простым прямоугольным областям. Функция `pdsolve/numeric` — стандартная программа, использующая обычные методы конечных разностей для получения численного решения. Уравнение PDE или система уравнений `PDEsys` должна быть определена в `diff` — системе обозначений. Производные в начальных/граничных условиях должны быть определены в индексированной D-системе обозначений. Например, для функции  $u(x,y)$  конструкция  $D[1](u)(0,y)$  описывает производную по нормали на линии  $x = 0$ , т. е. описывает условие  $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0}$ .

Параметр `vars` определяет зависимую переменную (или переменные) задачи. Для решающих программ (`solvers`), которые могут вычислять решения систем уравнений в частных производных, это указывает порядок для зависимых переменных на выходе.

Необязательное уравнение `'indepvars'=list` определяет независимые переменные задачи и указывает порядок независимых переменных для возвращаемых процедур, которые вычисляют решение в данных значениях независимых переменных.

Решающая программа имеет два режима работы. Первый использует заданный по умолчанию метод, который является центрированной неявной схемой и позволяет получать решения линейного уравнения или линейной системы уравнений высокого порядка. Уравнения системы должны быть достаточно близки к стандартной форме для метода нахождения численного решения.

Второй режим работы строго образовательный, позволяет указывать специальные методы решения уравнения. Этот режим ограничен решением одного единственного линейного уравнения в частных производных.

Оба режима допускают классические граничные условия первого, второго, третьего и четвертого рода, т. е. граничные условия Дирихле, Неймана, Робина, или периодические граничные условия.

Необязательные уравнения (в дополнение к `'indepvars'`) для заданного по умолчанию метода следующие:

- `'time'` = name;
- `'range'` =  $l \dots r$ ;
- `'spacestep'` = numeric;
- `'timestep'` = numeric;
- `'bcpts'` = integer;
- `'optimize'` = boolean/symbol (булева переменная/символ).

Опция `time` определяет имя переменной времени для задачи. Параметр `range` определяет пространственную область (домен) задачи. Значения обеих опций определены автоматически, если граничные условия назначены для обеих конечных точек домена. Эти опции необходимы только для аперiodических задач первого порядка, где только одна из конечных точек появляется в условии.

Опция `spacestep` определяет интервалы для пространственных точек на дискретной сетке, на которой вычисляется решение; значения по умолчанию  $1/20$ -я из пространственного диапазона задачи `range`, где  $l$  — левосторонняя граница и  $r$  — правосторонняя граница. Интервал должен быть малым, чтобы достаточное число точек находилось в пространственной области для данного метода граничных условий и пространственной интерполяции. Если данное значение `spacestep` не вписывается во входной домен с целым числом времен, выбирается самый близкий размер шага, который может быть использован.

Опция `timestep` задает размер шага по времени, используемого при интегрировании. Значение по умолчанию соответствует значению пространственного шага `spacestep`.

Параметр `bcpts` определяет число точек, использованных в дискретизации граничных условий задачи. Это значение по умолчанию на единицу больше, чем порядок производных по пространственным переменным — первый порядок точности аппроксимации граничного условия.

Параметр `optimize` определяет уровень оптимизации. Три типа оптимизации доступны: `true`, `'partial'` и `false`. Заданная по умолчанию `'partial'` оптимизация, как отмечают разработчики, дает довольно хорошие результаты для малых

времен. Установка `false` блокирует оптимизацию в целом (нерекомендуемый параметр). Установка `true` заставляет `pdsolve` вызывать `codegen[optimize]` при построении численного метода. Применение полностью оптимизированного метода приводит к дополнительным затратам времени, поэтому и рекомендуется `'partial'` — настройка по умолчанию.

На этом мы заканчиваем краткое описание функции `pdsolve/numeric`. Более полную информацию можно получить по справке `?pdsolve, numeric`.

Рассмотрим применение этой функции для численного решения задач математической физики.

**Задача 10.** Решить следующую смешанную задачу для параболического уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} + u + e^x \sin(x) - t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

$$u|_{x=0} = 1 + t, \quad u|_{x=\pi} = 1 + t, \quad u|_{t=0} = 1 + e^x \sin(2x).$$

*Решение.* Определяем уравнение и дополнительные условия задачи:

`>restart;`

`>PDE:=`

`diff(u(x,t),t)-diff(u(x,t),x,x)+2*diff(u(x,t),x)-u(x,t)=`

`exp(x)*sin(x)-t;`

`IBC:={u(0,t)=1+t,u(Pi,t)=1+t,u(x,0)=1+exp(x)*sin(2*x)};`

$$PDE := \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right) + 2 \left( \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right) - u(x, t)$$

$$= e^x \sin(x) - t$$

$$IBC := \{u(0, t) = 1 + t, u(\pi, t) = 1 + t, u(x, 0) = 1 + e^x \sin(2x)\}$$

Точное решение этой задачи дается функцией

$$v(x, t) = 1 + t + (1 - e^{-t})e^x \sin(x) + e^{x-4t} \sin(2x),$$

т. е.

`>v:=(x,t)->t+1+(1-exp(-t))*exp(x)*sin(x)+`

`exp(x-4*t)*sin(2*x);`

$$v := (x, t) \rightarrow t + 1 + (1 - e^{-t})e^x \sin(x) + e^{x-4t} \sin(2x)$$

Действительно, проверим это:

`>simplify(subs(u(x,t)=v(x,t),PDE));`

$$e^x \sin(x) - t = e^x \sin(x) - t$$

`>v(0,t);v(Pi,t);v(x,0);`

$$1 + t$$

$$1 + t$$

$$1 + e^x \sin(2x)$$

Мы рекомендуем читателю в качестве упражнения получить это точное решение.

Решим задачу численно с помощью функции `pdsolve` с установленной опцией `numeric`:

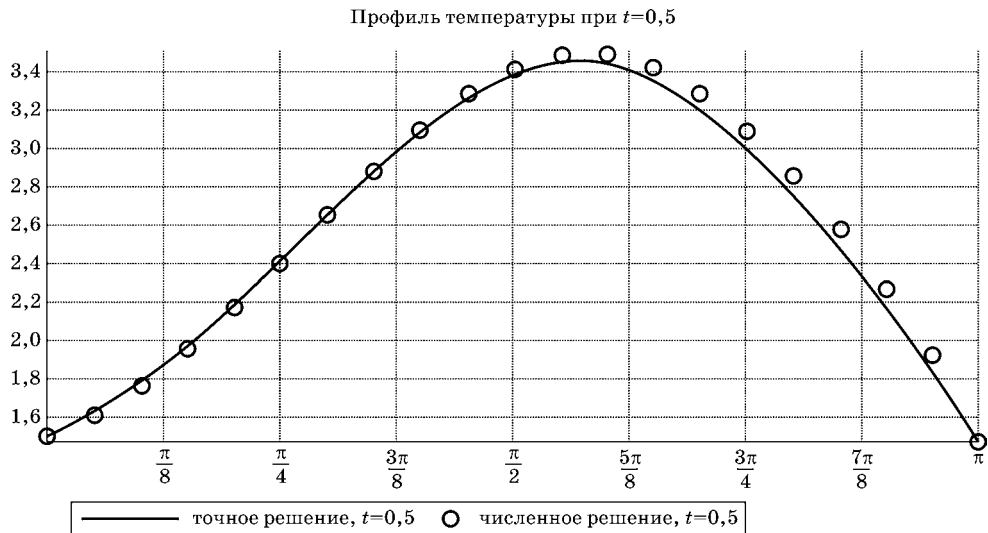
```
>pds := pdsolve(PDE,IBC,numeric);
pds := module() export plot, plot3d, animate, value, settings; ... end module
```

Модуль, возвращаемый функцией `pdsolve/numeric`, предоставляет несколько способов, которые могут использоваться для вычисления или визуализации решения исходного уравнения или системы: `plot`, `plot3d`, `animate` и `value`. Кроме того, `settings` делает возможным настройку параметров процесса решения.

Если результат, возвращаемый функцией `pdsolve/numeric`, присвоен переменной `pde`, вызывающие последовательности для использования различных способов представления решения имеют форму `pde:-method (arguments)`, где `method` — один из `plot`, `plot3d`, `animate`, `value` или `settings`.

Для наглядного сравнения точного решения с численным решением построим графики (рис. 8.29):

```
>p1:=pds:-plot(t=0.5,title=`Профиль температуры при t=0.5`,
style=point,symbol=circle,symbolsize=14,
legend=`Численное решение, t=0.5`,color=black):
>q1:=plot(v(x,0.5),x=0..Pi,color=black,linestyle=3,
legend=`Точное решение, t=0.5`):
>plots[display]({p1,q1},gridlines=true,
font=[Helvetica,bold,14],labelfont=[Helvetica,bold,14],
legendstyle=[font=[Helvetica,bold,14]]);
```



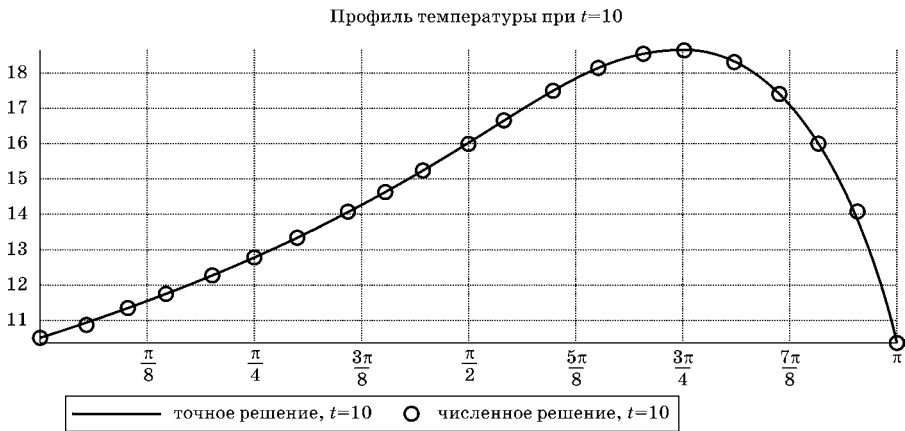
**Рис. 8.29**  
Сравнение решений при  $t = 0,5$

Посмотрим еще графики, например, при  $t = 10$  (рис. 8.30):

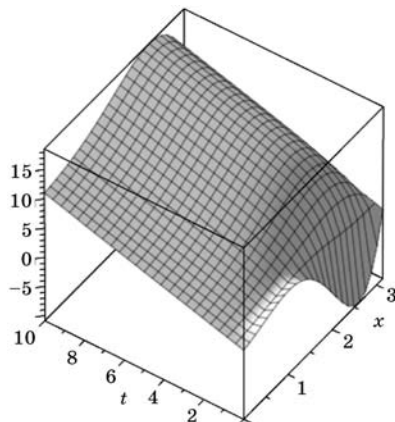
```
>p3:=pds:-plot(t=10,title=`Профиль температуры при t=10`,
style=point,symbol=circle,color=black,symbolsize=14,
legend=`Численное решение, t=10`):
q3:=plot(v(x,10),x=0..Pi,color=black,
legend=`Точное решение, t=10`):
plots[display]({p3,q3},gridlines=true,
font=[Helvetica,bold,14],labelfont=[Helvetica,bold,14],
legendstyle=[font=[Helvetica,bold,14]]);
```

Можно посмотреть пространственную поверхность температур (рис. 8.31):

```
>pds:-plot3d(t=0..10,x=0..Pi,axes=boxed,
orientation=[-145,45],font=[Helvetica,bold,14],
labelfont=[Helvetica,bold,14],color=[3,10,u]);
```



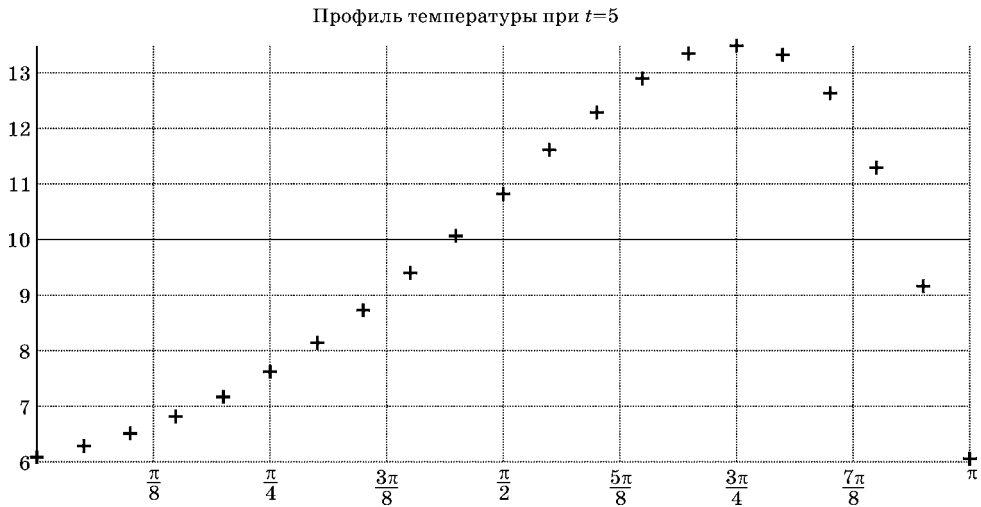
**Рис. 8.30**  
Сравнение решений при  $t = 10$



**Рис. 8.31**  
Распределение температур при  $t = 0 \dots 10$

Определим, например, при каких значениях  $x$  в момент времени  $t = 5$  температура будет равна  $u(x, 5) = 10$  (рис. 8.32). Для этого построим профиль температур, чтобы отделить корни:

```
>pp1:=pds:-plot(t=5,title=`Профиль температуры при t=5`,
color=black,style=point,symbol=cross,symbolsize=14):
pp2:=plot(10,x=0..Pi,color=black):
plots[display]({pp1,pp2},gridlines=true,
font=[Helvetica,bold,14],
labelfont=[Helvetica,bold,14],
legendstyle=[font=[Helvetica,bold,14]]);
```



**Рис. 8.32**  
Распределение температур при  $t = 5$

Из графика видно, что это будут диапазоны  $3\pi/8 < x < \pi/2$  и  $7\pi/8 < x < \pi$ . Теперь, чтобы получить численные значения, мы создадим специальную процедуру, используя процедуру `value`, имеющуюся в модуле решения:

```
>pds:-value(t=5,output=listprocedure);uval := rhs(op(3,%));
```

```
[x = proc(x) ... end proc, t = 5., u(x, t) = proc(x) ... end proc]
uval := proc(x) ... end proc
```

И наконец, найдем нужные нам значения координаты  $x$ :

```
>fsolve(uval(x)=10,x=3*Pi/8..Pi/2);
fsolve(uval(x)=10,x=7*Pi/8..Pi);
```

1.400565166  
2.928179056

Итак, температура будет равна 10 при  $t = 5$  в двух точках:  $x \approx 1,4$  и  $x \approx 2,9$ .



Можно также определить температуру в любой точке, например в точке с координатами  $x = 2, 5$  и  $t = 7$ :

```
>U:=pds:-value();U(2.5,7.);v(2.5,7.);
```

```
U := proc() ... end proc
[x = 2.5, t = 7., u(x, t) = 15.3872910100268]
15.28423485
```

Итак,  $u(2.5, 7.) \approx 15.4$ . Точное значение —  $v(2.5, 7.) \approx 15.3$ .

Рассмотрим еще пример решения гиперболического уравнения.

**Задача 11.** Исследовать малые поперечные колебания струны, закрепленной в своих концах при заданном начальном смещении и нулевой начальной скорости.

*Решение.* Задача, как известно, сводится к интегрированию одномерного волнового уравнения при дополнительных условиях:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$u|_{x=0} = 0; \quad u|_{x=l} = 0; \quad u|_{t=0} = f(x); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0.$$

Воспользуемся функцией `Laplacian`, имеющейся в Maple в пакете `VectorCalculus`. Эта функция полезна для записи дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Сначала загружаем этот пакет:

```
>with(VectorCalculus):
```

Определяем уравнение и дополнительные условия задачи. Будем считать для определенности  $v = \sqrt{10}$ ,  $l = 1$ ; струна закреплена в концах и имеет нулевую начальную скорость:

```
>Cord_Eqn:={diff(u(x,t),t,t)/10=
Laplacian(u(x,t),'cartesian'[x])};
```

$$Cord\_Eqn := \left\{ \frac{1}{10} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right\}$$

```
>BC1:={u(0,t)=0,u(1,t)=0,D[2](u)(x,0)=0};
```

$$BC1 := \{u(0, t) = 0, u(1, t) = 0, D_2(u)(x, 0) = 0\}$$

Определим теперь начальную функцию  $f(x)$ . Рассмотрим случай, когда струна в начальный момент времени  $t = 0$  оттянута в центре и затем отпущена без начальной скорости. Будем иметь:

```
>BC2:={u(x,0)=
piecewise(x>=0 and x<=1/2, x, x>1/2 and x<=1, 1-x)};
```

$$BC2 := \left\{ u(x, 0) = \begin{cases} x & 0 \leq x \text{ and } x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x & \frac{1}{2} < x \text{ and } x \leq 1 \end{cases} \right\}$$

Решаем начально-краевую задачу численно с использованием функции `pdsolve` и установленной опцией `numeric`. Мы можем также установить точность решения, определяя шаг по времени и по пространственной переменной по прямоугольнику «расстояние — время»:

```
>sol:=pdsolve(Cord_Eqn,BC1 union BC2,numeric,
spacestep=1/200,timestep=1/100):
```

Посмотрим профиль струны в движении (рис. 8.33):

```
>sol:-animate(u(x,t),t=0..2*Pi,frames=30,
labels=["x","u(x,t)],labelfont=[TIMES,ROMAN,14],
scaling=constrained,gridlines=true,
font=[Courier,bold,14]);
```

На рисунке 8.33, конечно, отображен только один фрагмент (начальный), и чтобы увидеть колебания струны в движении, надо запустить анимацию, нажав соответствующую кнопку на панели инструментов.

Отобразим профиль струны, например, в момент времени  $t = 3/4$  с (рис. 8.34):

```
>sol:-plot(t=3/4,labels=["x","u(x,t)],
labelfont=[TIMES,ROMAN,14],gridlines=true,
font=[Courier,bold,13],labelfont=[Courier,bold,13]);
```

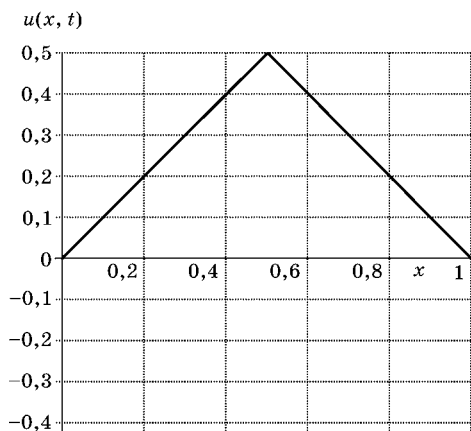


Рис. 8.33  
Колебания струны

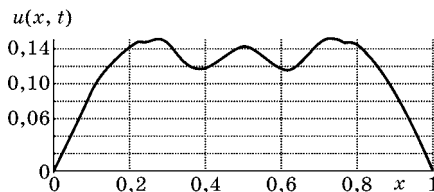


Рис. 8.34  
Профиль струны в момент времени  
 $t = 3/4$  с

## ПРИМЕР НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

В качестве демонстрации численного решения нелинейного уравнения рассмотрим одномерный вариант уравнения Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где  $\text{Re}$  — число Рейнольдса.

Это уравнение представляет собой хорошую модель уравнений Навье — Стокса, так как оно в простейшей форме описывает баланс между нелинейным конвективным процессом (член  $u \partial u / \partial x$ ) и диссипативным процессом (член  $(1/\text{Re}) \partial^2 u / \partial x^2$ ). Несмотря на то что уравнение Бюргерса нелинейно, для многих сочетаний начальных и граничных условий оно допускает точное решение. В силу этой причины уравнение Бюргерса часто используется для выяснения точности, обеспечиваемой вычислительными алгоритмами.

Рассмотрим задачу о распространяющейся ударной волне, которая первоначально представляет собой разрыв, расположенный в плоскости  $x = 0$ . В дальнейшем эта волна распространяется вправо, однако ее профиль, бывший вначале разрывным, сглаживается за счет воздействия вязкого диссипативного процесса  $(1/\text{Re}) \partial^2 u / \partial x^2$ .

Будем искать решение уравнения Бюргерса в области  $-1 \leq x \leq 1$  при  $t \geq 0$ . Начальные и граничные условия примем следующими:

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq 1; \end{cases}$$

$$u(-1, t) = 1; \quad u(1, t) = 0.$$

Определяем уравнение в Maple:

```
>eq:=diff(u(x,t),t)+u(x,t)*diff(u(x,t),x)-
1/R*diff(u(x,t),x$2)=0;
```

$$eq := \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + u(x, t) \left( \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = 0$$

Определяем начальные и граничные условия:

```
>ibc:={u(x,0)=u0(x),u(-1,t)=1,u(1,t)=0};
```

$$ibc := \{u(-1, t) = 1, u(1, t) = 0, u(x, 0) = u_0(x)\}$$

Определяем начальный профиль волны:

```
>u0:=x->1-Heaviside(x);
```

$$u_0 := x \rightarrow 1 - \text{Heaviside}(x)$$

Для последующего отображения решения на графиках подготовим график этого начального профиля:

```
>ph:=plot(u0(x),x=-1..1,color=blue,  
linestyle=3,legend='t=0',labels=['`,`']):
```

Подготовим также надписи на осях графиков:

```
>pt:=textplot({[-0.95,1.1,`u`],[1.05,0.1,`x`]},  
'view'=[0..1.1, 0..1.1]):
```

Задаем значение числа Рейнольдса и решаем задачу:

```
>R:=10;pds := pdsolve(eq,ibc,numeric);
```

```
R:=10  
pds:=module()  
export plot, plot3d, animate, value, settings  
...  
end module
```

Отообразим решение на графике в момент времени  $t = 0,47$  с (рис. 8.35):

```
>p_10:=pds:-plot(t=0.47,numpoints=50,color=black,  
thickness=2,legend='Re=10, t=0.47`,  
scaling=unconstrained,labels=['`,`'],  
axes=frame):  
plots[display]({p_10,ph,pt},  
labelfont=[TIMES,ROMAN,14],gridlines=true,  
font=[Courier,bold,13],labelfont=[Courier,bold,13]);
```

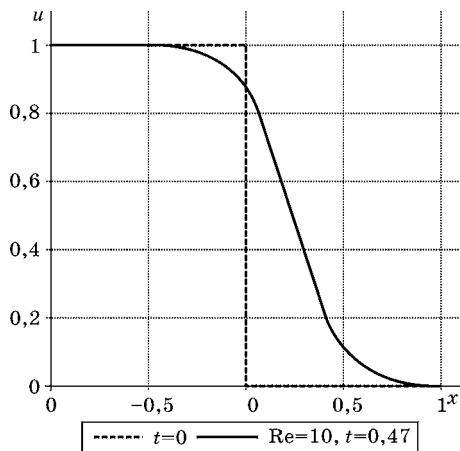


Рис. 8.35  
Ударная волна в момент времени  $t = 0,47$  с

Найдем теперь решение для другого значения числа Рейнольдса:

```
>R:=50;pds_50 := pdsolve(eq,ibc,numeric);
```

```
R := 50
pds_50 := module()
export plot, plot3d, animate, value, settings
...
end module
```

Отообразим результат на графике в момент времени  $t = 0,36$  с (рис. 8.36):

```
>p_50:=pds_50:-plot(t=0.36,numpoints=50,color=brown,
thickness=2,legend=`Re=50, t=0.36`,
scaling=unconstrained,labels=[``,``],
axes=frame):
>plots[display]({p_50,ph,pt}),
labelfont=[TIMES,ROMAN,14],gridlines=true,
font=[Courier,bold,13],labelfont=[Courier,bold,13];
```

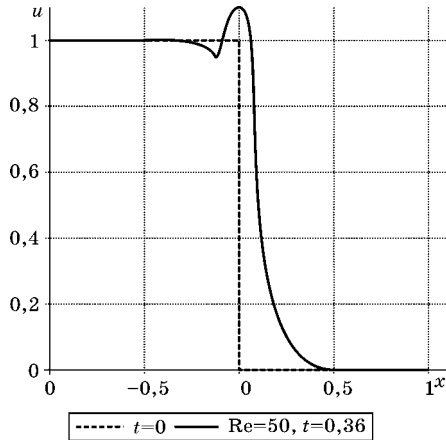
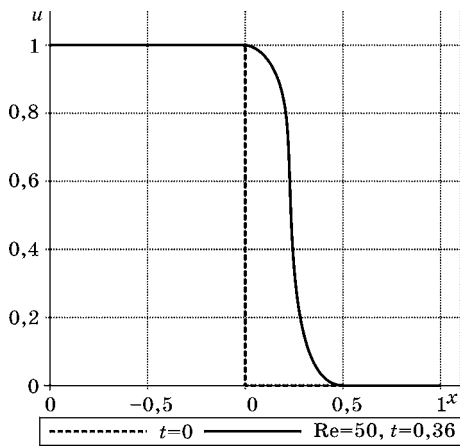


Рис. 8.36  
Ударная волна ( $t = 0,36$  с,  $Re = 50$ )

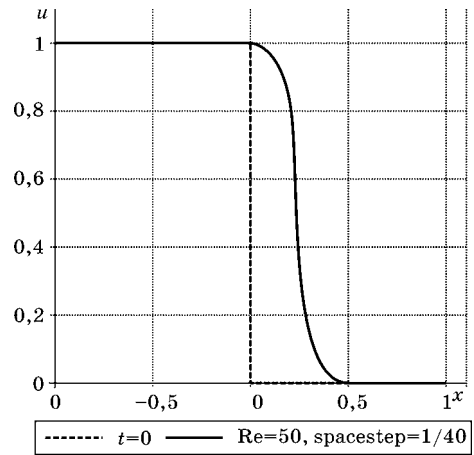
Решение в области скачка неудовлетворительно. Попытаемся улучшить его за счет дробления сетки, на которой ищется решение (рис. 8.37):

```
pds_50_ := pdsolve(eq,ibc,numeric,spacestep=1/40):
>p_50_:=pds_50_:-plot(t=0.36,numpoints=50,color=brown,
thickness=2,legend=`Re=50, t=0.36`,
scaling=unconstrained,labels=[``,``],
axes=frame):
>plots[display]({p_50_,ph,pt}),
labelfont=[TIMES,ROMAN,14],gridlines=true,
font=[Courier,bold,13],labelfont=[Courier,bold,13];
```

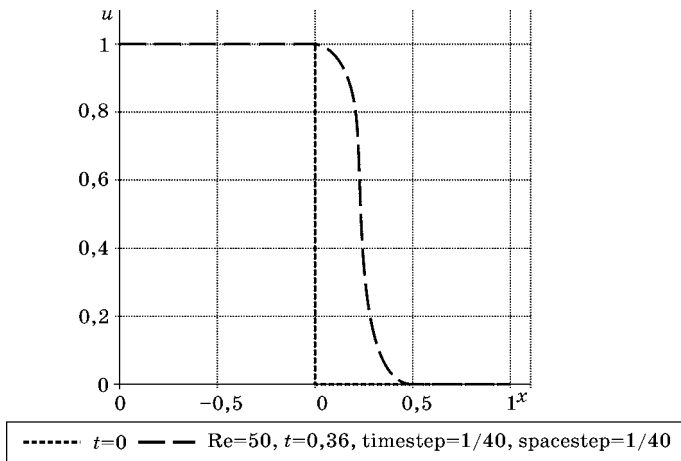
Теперь все в порядке!



**Рис. 8.37**  
Ударная волна  
( $t = 0,36$  с,  $Re = 50$ , уточнение)



**Рис. 8.38**  
Ударная волна  
( $t = 0,36$  с,  $Re = 50$ , уменьшение шага по  $x$ )



**Рис. 8.39**  
Ударная волна  
( $t = 0,36$  с,  $Re = 50$ , измельчение сетки)

При уточнении решения мы заново выполнили расчет с другим шагом по координате  $x$ . Улучшения решения можно добиться, используя уже полученное решение `pds_50`, установив опцию `settings`, в которой зададим шаг по координате  $x$  (рис. 8.38):

```
>pds_50:-settings(spacestep=1/40);
>p_50n:=pds_50:-plot(t=0.36,numpoints=50,color=black,
style=point,thickness=2,
```

```

legend='Re=50, t=0.36, spacestep=1/40',
scaling=unconstrained, labels=['\``, ``'],
axes=frame);
plots[display]({p_50n, ph, pt},
labelfont=[TIMES, ROMAN, 14], gridlines=true,
font=[Courier, bold, 13], labelfont=[Courier, bold, 13]);

```

Еще лучший результат мы получим, измельчив сетку и по координате, и по времени (рис. 8.39):

```

>pds_50:-settings(timestep=1/40, spacestep=1/40);
>p_50nn:=pds_50:-plot(t=0.36, numpoints=50, color=black,
style=point, symbol=cross, thickness=2,
legend='Re=50, t=0.36, timestep=1/40, spacestep=1/40',
scaling=constrained, labels=['\``, ``'], axes=frame);
>plots[display]({ph, pt, p_50nn});

```

### ЗАДАЧИ С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ

1. Применяя метод Эйлера, численно решить данные дифференциальные уравнения с данными начальными условиями на отрезке  $[a, b]$  с шагом  $h = 0,1$ :

1)  $y' = \frac{1}{2}xy, y(0) = 1, a = 0, b = 1;$

2)  $y' = x^2 + y^2, y(0) = 0, a = 0, b = 1;$

3)  $y' = 1 + xy^2, y(0) = 0, a = 0, b = 1;$

4)  $y' = \frac{y}{x+1} - y^2, y(0) = 1, a = 0, b = 1;$

5)  $y' = \alpha y^2 + \frac{\beta}{x^2}, y(1) = 1, a = 1, b = 2;$

а)  $\alpha = -1, \beta = 0,05 + 0,05k, k = 0, 1, 2, \dots, 7;$

б)  $\alpha = -0,5, \beta = 0,1 + 0,1k, k = 0, 1, 2, 3.$

2. Применяя один из улучшенных методов Эйлера, найти значение решения дифференциального уравнения с данным начальным условием и данным шагом в указанной точке:

1)  $y' = x + y^2, y(0) = 0, h = 0,03, \text{ найти } y(0,3);$

2)  $y' = 1 + x - y^2, y(0) = 1, h = 0,02, \text{ найти } y(0,1);$

3)  $y' = x^2 - y^2, y(0) = 0, h = 0,1, \text{ найти } y(1);$

4)  $y' = xy - 0,1y^2, y(0) = 0, h = 0,02, \text{ найти } y(0,2);$

5)  $y' = x^3 + y^2, y(0) = 0,5, h = 0,1, \text{ найти } y(0,5);$

6)  $y' = x + \sqrt{y}, y(0,5) = 0,7240, h = 0,1, \text{ найти } y(1,5);$

7)  $y' = 2x + \cos y, y(0) = 0, h = 0,02, \text{ найти } y(0,1);$

8)  $y' = e^x - y^2, y(0) = 0, h = 0,04, \text{ найти } y(0,4);$

9)  $y' = x \ln y - y \ln x, y(1) = 1, h = 0,1, \text{ найти } y(1,6);$

10)  $y' = 0,1[\sqrt[3]{y} + \ln(x+y) - 1], y(-1) = 2, h = 0,2, \text{ найти } y(1).$

3. Методом Рунге — Кутты с шагом  $h = 0,2$  найти решения данных уравнений на указанном отрезке  $[a, b]$ :

1)  $y' = -x + y, y(0) = 1, 5, a = 0, b = 1;$

2)  $y' = \frac{y}{x} - y^2, y(1) = 1, a = 1, b = 2.$

4. Методом Рунге — Кутты с шагом  $h = 0,1$  найти решение данного уравнения на отрезке  $[0; 0,3]$  при заданных значениях параметров и заданном начальном условии:

$$y' = \frac{\cos bx}{a + y^2}, y(0) = 1,5, a = 1,0 + 0,4n, b = 1,0 + 0,8k, n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, k = 0, 1, 2.$$

5. Методом Рунге — Кутты с шагом  $h = 0,1$  найти решение данного уравнения на отрезке  $[0; 0,3]$  при заданных значениях параметров и заданном начальном условии:

$$y' = e^{-ax}(y^2 + b), y(0) = 0, a = 1,0 + 0,4n, b = 1,0 + 0,4k, n = 0, 1, \dots, 5, k = 0, 1, \dots, 5.$$

6. Методом конечных разностей найти решение краевой задачи:

$$x^2 y'' + xy' = 1, y(1) = 0, y(1,4) = \frac{1}{2} \ln^2(1,4) = 0,0566.$$

7. Методом конечных разностей найти решение краевой задачи:

$$y'' - 2xy' - 2y = -4x, y(0) - y'(0) = 0, y(1) = 1 + e = 3,718.$$

8. Методом конечных разностей найти решение краевой задачи:

$$y'' - 2xy' - 2y = -4x, y(0) - y'(0) = 0, 2y(1) - y'(1) = 1.$$

9. Методом конечных разностей найти решение краевой задачи с точностью до 0,001:

$$y'' + 2xy' + 2y = 4x, y(0) = 1, y(0,5) = e^{-0,25} + 0,5 = 1,279.$$

10. Составить и решить систему алгебраических уравнений для определения прогиба балки при шаге сетки  $h = l/6, l/8, l/10, l/20$ . Рассмотреть случай жестко защемленной балки:  $w = 0, w' = 0$  при  $x = 0$  и  $x = l$ . Определить максимальный изгибающий момент и нормальное максимальное напряжение.

11. Для прямоугольной плиты с равномерно распределенной массой и жестко закрепленной по контуру определить низшую собственную частоту свободных поперечных колебаний. Проанализировать результат при отношении сторон плиты  $a/b = 1, 1/2, 1/3, 1/4$ .

12. Для прямоугольной плиты, жестко закрепленной по контуру, определить критическую сжимающую нагрузку. Проанализировать результат при отношении сторон плиты  $a/b = 1, 1/2, 1/3, 1/4$ .

13. Найти численное решение уравнения  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , удовлетворяющее условиям:  $u(x, 0) = f(x), u(0, t) = \varphi(t), u(1, t) = \psi(t)$ , для значений  $0 \leq t \leq T$ , взяв по аргументу  $x$  шаг  $h = 0,1$ . Задачу решить при следующих данных:



$$a) f(x) = (ax^2 + b)\sin\pi x; \varphi(t) = \psi(t) = 0;$$

$$T = 0,02; a = 1,1, 1,3, 1,5; b = 1,1 + 0,1n; n = 0, 1, 2, 3, 4;$$

$$б) f(x) = e^{-bx}\sin ax; \varphi(t) = 0; \psi(t) = e^{-b}\sin a;$$

$$T = 0,02; a = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}; b = 0,1 \cdot n; n = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

14. Найти численное решение уравнения  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x + t$ , удовлетворяющее условиям  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $u(0, t) = \varphi(t)$ ,  $u(1, t) = \psi(t)$ , для значений  $0 \leq t \leq T$ , взяв по аргументу  $x$  шаг  $h = 0,1$ . Задачу решить при следующих данных:

$$f(x) = (ax^2 + b)\sin\pi x; \varphi(t) = \psi(t) = 0;$$

$$T = 0,02; a = 1,1, 1,3, 1,5; b = 1,1 + 0,1n; n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

15. Найти численное решение уравнения  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3t \sin x$ , удовлетворяющее условиям:  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $u(0, t) = \varphi(t)$ ,  $u(1, t) = \psi(t)$ , для значений  $0 \leq t \leq T$ , взяв по аргументу  $x$  шаг  $h = 0,1$ . Задачу решить при следующих данных:

$$f(x) = e^{-bx}\sin ax; \varphi(t) = 0; \psi(t) = e^{-b}\sin a;$$

$$T = 0,02; a = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}; b = 0,1 \cdot n; n = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

16. Найти численное решение уравнения  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , удовлетворяющее условиям:  $u(x, 0) = 0$ ,  $2x(1-x)\sin\pi x$ ,  $u_t(x, 0) = 0$ ,  $u(0, t) = 0$ ,  $u(1, t) = 0$ .

17. Найти численное решение уравнения  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , удовлетворяющее условиям:  $u(x, 0) = x(\pi - x)$ ,  $u_t(x, 0) = 0$ ,  $u(0, t) = 0$ ,  $u(\pi, t) = 0$ .

18. Найти численное решение уравнения  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , удовлетворяющее условиям:  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $u_t(x, 0) = 0$ ,  $u(0, t) = 0$ ,  $u(1, t) = 0$ . Задачу решить при следующих данных:  $f(x) = (ax^2 + 1,1)\sin\pi x$ ,  $a = 1,1 + 0,1n$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ .

19. Найти численное решение уравнения  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + t$  с шагом  $h = l = 0,1$ , удовлетворяющее условиям:  $u(x, 0) = (1,5x^2 + 1,2)\sin\pi x$ ,  $u_t(x, 0) = 0,1x$ ,  $u(0, t) = 0$ ,  $u(1, t) = 0$ .

20. Найти численное решение уравнения  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 - t^2$  с шагом  $h = l = 0,1$ , удовлетворяющее условиям:  $u(x, 0) = (1,5x^2 + 0,9)e^{-x}$ ,  $u_t(x, 0) = 0$ ,  $u(0, t) = 0$ ,  $u(1, t) = 2,4e^{-1}$ .

#### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

**Пример 1.** Для тонкой пластины  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq a$  (рис. 8.40), у которой два противоположных края ( $AD$  и  $BC$ ) имеют шарнирное опирание, а два других ( $AB$  и  $CD$ ) — жесткое защемление, построить пространственные эпюры (поверхности) прогибов  $w$ , изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$ , крутящих моментов  $M_{xy}$ ;

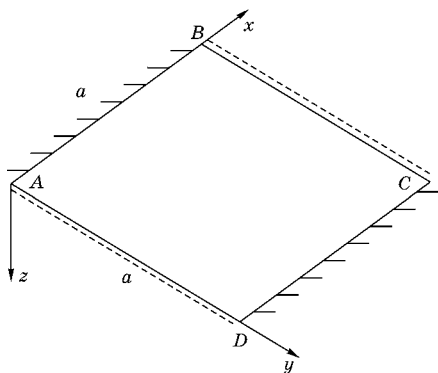


Рис. 8.40  
Пример 1

определить в пластине максимальные нормальные напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ ; вычислить в произвольном сечении максимальные касательные напряжения от кручения.

Вся поверхность пластины загружена внешней распределенной нагрузкой, направленной вниз и изменяющейся по закону

$$q(x, y) = q_0 - 2q_0 \left[ \left( \frac{x - \frac{a}{2}}{a} \right)^2 + \left( \frac{y - \frac{a}{2}}{a} \right)^2 \right].$$

Интенсивность нагрузки  $q_0$  и размер стороны пластины  $a$ , модуль упругости материала  $E$  и высота пластины  $h$  заданы в общем виде.

*Решение.*

1. Дифференциальное уравнение изгиба пластины имеет вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D},$$

где  $w(x, y)$  — функция, выражающая закон изменения вертикальных перемещений (прогибов) точек срединной поверхности;  $q(x, y)$  — функция, выражающая закон изменения внешней распределенной нагрузки, направленной перпендикулярно срединной поверхности;  $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$  — цилиндрическая жесткость пластины;  $h$  — толщина пластины;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

2. Заменяем дифференциальное уравнение изгиба пластины алгебраическим уравнением общего вида. Используя конечно-разностные формулы для производных, получим

$$\begin{aligned} & \frac{w_{m+2,n} - 4w_{m+1,n} + 6w_{m,n} - 4w_{m-1,n} + w_{m-2,n}}{\Delta_1^4} + \\ & + \frac{2}{\Delta_1^2 \Delta_2^2} [4w_{m,n} - 2(w_{m,n+1} + w_{m+1,n} + w_{m,n-1} + w_{m-1,n}) + w_{m-1,n-1} + \\ & + w_{m-1,n+1} + w_{m+1,n-1} + w_{m+1,n+1}] + \frac{w_{m,n+2} - 4w_{m,n+1} + 6w_{m,n} - 4w_{m,n-1} + w_{m,n-2}}{\Delta_2^4} = \frac{q_{m,n}}{D}, \end{aligned}$$

где  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  — шаги сетки в направлении  $x$  и  $y$  соответственно.

Если шаг сетки одинаков по координатам  $x$  и  $y$ , т. е. если  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ , то после элементарных преобразований получим вместо дифференциального уравнения изгиба пластины алгебраическое уравнение, справедливое для произвольной точки  $(m, n)$  срединной поверхности пластины:

$$\begin{aligned} & 20w_{m,n} - 8(w_{m+1,n} + w_{m-1,n} + w_{m,n+1} + w_{m,n-1}) + \\ & + 2(w_{m-1,n-1} + w_{m+1,n+1} + w_{m-1,n+1} + w_{m+1,n-1}) + w_{m+2,n} + w_{m-2,n} + w_{m,n+2} + w_{m,n-2} = \frac{q_{m,n} \Delta^4}{D}. \end{aligned}$$

Будем называть это уравнение алгебраическим уравнением общего вида. Теперь необходимо выбрать шаг сетки  $\Delta$  и вычислить значения внешней нагрузки  $q_{m,n}$  в каждом узле сетки.

3. Принимаем шаг сетки  $\Delta = a/4$ . Нумеруем узлы сетки, как показано на рисунке 8.41. Законтурные узлы  $(-1,5)$ ,  $(0,5)$ , ...,  $(5,5)$ ;  $(5,4)$ ,  $(5,3)$ , ...,  $(5,-1)$ ;  $(4,-1)$ ,  $(3,-1)$ , ...,  $(-1,-1)$ ;  $(-1,0)$ ,  $(-1,1)$ , ...,  $(-1,4)$  являются условными и вводятся для удобства записи конечно-разностных уравнений, а прогибы в этих узлах исключаются с помощью граничных условий. А именно прогиб в условном законтурном узле по отношению к шарнирному опиранию равен прогибу с обратным знаком ближайшего узла, расположенного внутри контура, т. е. для  $i$ -го шарнирно опертого узла  $w_{i-1} = -w_{i+1}$ . Перемещение законтурного узла  $(i-1)$  по отношению к заделке равно перемещению ближайшего внутреннего узла  $(i+1)$ , т. е. для  $i$ -го защемленного узла  $w_{i-1} = w_{i+1}$ .

Узлы  $(-1,5)$ ,  $(5,5)$ ,  $(5,-1)$  и  $(-1,-1)$  вообще не участвуют в расчете и показаны только для симметрии нумерации.

4. Вычисляем значения внешней нагрузки в узлах сетки. Для этого в формулу для  $q(x, y)$  последовательно подставляем координаты узлов. Например, для узла  $(2,2)$ , имеющего координаты  $x = a/2$ ,  $y = a/2$ , получим  $q(a/2, a/2) = q_0$ . Для узла  $(3,2)$  имеем  $x = 3a/4$ ,  $y = a/2$  и  $q(3a/4, a/2) = 7q_0/8$ . Аналогично вычисляем нагрузку во всех узлах.

5. Формируем систему алгебраических уравнений для вычисления прогибов в узлах сетки. С этой целью записываем алгебраическое уравнение общего вида для каждого из внутренних узлов, получающих прогиб:

Узел  $(1,1)$ :

$$20w_{1,1} - 8(w_{2,1} + w_{0,1} + w_{1,2} + w_{1,0}) + 2(w_{0,0} + w_{2,2} + w_{0,2} + w_{2,0}) + w_{3,1} + w_{-1,1} + w_{1,3} + w_{1,-1} = \frac{3q_0\Delta^4}{4D}.$$

Узел  $(1,2)$ :

$$20w_{1,2} - 8(w_{2,2} + w_{0,2} + w_{1,3} + w_{1,1}) + 2(w_{0,1} + w_{2,3} + w_{0,3} + w_{2,1}) + w_{3,2} + w_{-1,2} + w_{1,4} + w_{1,0} = \frac{7q_0\Delta^4}{8D}.$$

Узел  $(1,3)$ :

$$20w_{1,3} - 8(w_{2,3} + w_{0,3} + w_{1,4} + w_{1,2}) + 2(w_{0,2} + w_{2,4} + w_{0,4} + w_{2,2}) + w_{3,3} + w_{-1,3} + w_{1,5} + w_{1,1} = \frac{3q_0\Delta^4}{4D}.$$

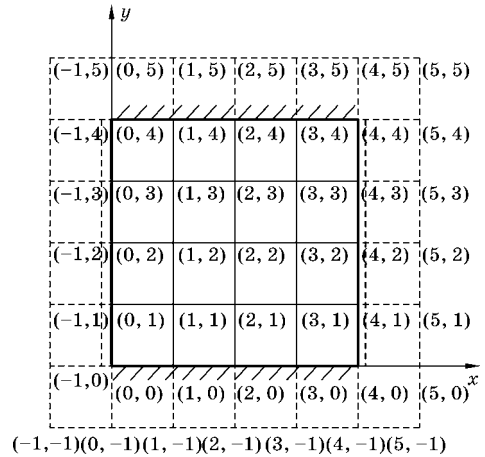


Рис. 8.41  
Сетка

Узел (2,1):

$$20w_{2,1} - 8(w_{3,1} + w_{1,1} + w_{2,2} + w_{2,0}) + 2(w_{1,0} + w_{3,2} + w_{1,2} + w_{3,0}) + \\ + w_{4,1} + w_{0,1} + w_{2,3} + w_{2,-1} = \frac{7q_0\Delta^4}{8D}.$$

Узел (2,2):

$$20w_{2,2} - 8(w_{3,2} + w_{1,2} + w_{2,3} + w_{2,1}) + 2(w_{1,1} + w_{3,3} + w_{1,3} + w_{3,1}) + \\ + w_{4,2} + w_{0,2} + w_{2,4} + w_{2,0} = \frac{q_0\Delta^4}{D}.$$

Узел (2,3):

$$20w_{2,3} - 8(w_{3,3} + w_{1,3} + w_{2,4} + w_{2,2}) + 2(w_{1,2} + w_{3,4} + w_{1,4} + w_{3,2}) + \\ + w_{4,3} + w_{0,3} + w_{2,5} + w_{2,1} = \frac{7q_0\Delta^4}{8D}.$$

Узел (3,1):

$$20w_{3,1} - 8(w_{4,1} + w_{2,1} + w_{3,2} + w_{3,0}) + 2(w_{2,0} + w_{4,2} + w_{2,2} + w_{4,0}) + \\ + w_{5,1} + w_{1,1} + w_{3,3} + w_{3,-1} = \frac{3q_0\Delta^4}{4D}.$$

Узел (3,2):

$$20w_{3,2} - 8(w_{4,2} + w_{2,2} + w_{3,3} + w_{3,1}) + 2(w_{2,1} + w_{4,3} + w_{2,3} + w_{4,1}) + \\ + w_{5,2} + w_{1,2} + w_{3,4} + w_{3,0} = \frac{7q_0\Delta^4}{8D}.$$

Узел (3,3):

$$20w_{3,3} - 8(w_{4,3} + w_{2,3} + w_{3,4} + w_{3,2}) + 2(w_{2,2} + w_{4,4} + w_{2,4} + w_{4,2}) + \\ + w_{5,3} + w_{1,3} + w_{3,5} + w_{3,1} = \frac{3q_0\Delta^4}{4D}.$$

6. Записываем граничные условия. В полученную систему уравнений, кроме искомых прогибов во внутренних точках (узлах), вошли дополнительные прогибы в узлах (0,0), (0,1), (0,2), ..., (1,4), (2,4), ..., (4,4), (4,3), ..., (4,0), (3,0), ..., (1,0) на контуре и в узлах (0,5), ..., (5,4), (5,3), ..., (4,-1), (3,-1), ..., (-1,0), (-1,1), ..., (-1,4) — за контуром.

На кромках с жестким защемлением и шарнирным опиранием прогибы равны нулю:

$$w_{0,0} = w_{0,1} = w_{0,2} = w_{0,3} = 0; \\ w_{0,4} = w_{1,4} = w_{2,4} = w_{3,4} = 0; \\ w_{4,4} = w_{4,3} = w_{4,2} = w_{4,1} = 0; \\ w_{4,0} = w_{3,0} = w_{2,0} = w_{1,0} = 0.$$

Дополнительные прогибы в узлах за контуром исключаются из системы с помощью граничных условий, как было сказано ранее (см. п. 3).

У жестко защемленных кромок  $AB$  и  $CD$  имеем:

$$w_{0,-1} = w_{0,1}, \quad w_{1,-1} = w_{1,1}, \quad w_{2,-1} = w_{2,1}, \quad w_{3,-1} = w_{3,1}, \quad w_{4,-1} = w_{4,1}, \\ w_{0,5} = w_{0,3}, \quad w_{1,5} = w_{1,3}, \quad w_{2,5} = w_{2,3}, \quad w_{3,5} = w_{3,3}, \quad w_{4,5} = w_{4,3},$$

а у кромок  $BC$  и  $AD$ , шарнирно опертых:

$$w_{-1,0} = -w_{1,0}, \quad w_{-1,1} = -w_{1,1}, \quad w_{-1,2} = -w_{1,2}, \quad w_{-1,3} = -w_{1,3}, \quad w_{-1,4} = -w_{1,4}, \\ w_{5,0} = -w_{3,0}, \quad w_{5,1} = -w_{3,1}, \quad w_{5,2} = -w_{3,2}, \quad w_{5,3} = -w_{3,3}, \quad w_{5,4} = -w_{4,4}.$$

7. Решаем полученную в п. 6 систему алгебраических уравнений (конечно, с помощью ЭВМ!). Таким образом, будем иметь:

$$w_{1,1} = w_{1,3} = w_{3,1} = w_{3,3} = \frac{147q_0\Delta^4}{568D} \approx 0,259 \frac{q_0\Delta^4}{D}; \\ w_{2,1} = w_{2,3} = \frac{101q_0\Delta^4}{284D} \approx 0,356 \frac{q_0\Delta^4}{D}; \\ w_{1,2} = w_{3,2} = \frac{909q_0\Delta^4}{2272D} \approx 0,400 \frac{q_0\Delta^4}{D}; \\ w_{2,2} = \frac{313q_0\Delta^4}{568D} \approx 0,551 \frac{q_0\Delta^4}{D}.$$

8. Строим пространственную эпюру прогибов  $w$  (изогнутую срединную поверхность пластины). Для этого зададим числовые значения параметров пластины.

Пусть, например, параметры пластины будут: размер в плане  $a = 4$  м, шаг сетки  $\Delta = a/4 = 1$  м, модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, толщина  $h = 0,01$  м, параметр поперечной нагрузки  $q_0 = 1000$  Па, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ .

Пространственная эпюра прогибов показана на рисунке 8.42.

Эпюра прогибов в центральном сечении при  $y = a/2 = 2$  м показана на рисунке 8.43.

9. Строим пространственные эпюры изгибающих и крутящих моментов. На рисунке 8.44 пока-

Эпюра прогибов при  $M=N=4$

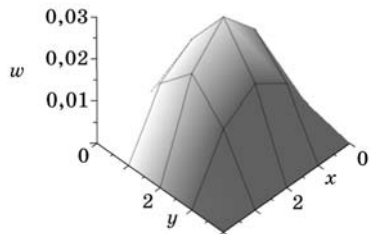


Рис. 8.42  
Поверхность прогибов

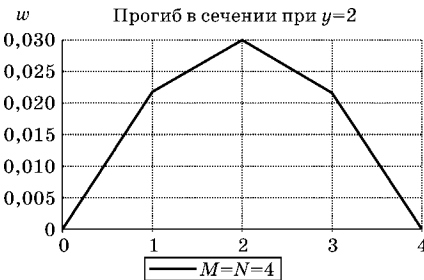


Рис. 8.43  
Эпюра прогиба в сечении

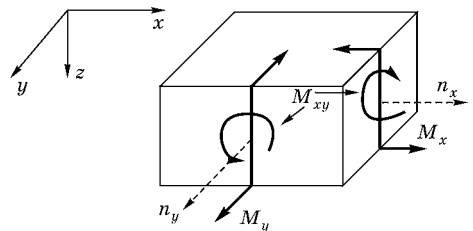


Рис. 8.44  
Моменты

зан элемент, выделенный из пластины, с моментами  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_{xy}$ , направления которых приняты положительными. Заметим, что  $M_x$  — момент, возникающий на грани, внешняя нормаль  $n_x$  к которой параллельна оси  $x$ , а  $M_y$  — на грани с нормалью  $n_y$ , параллельной оси  $y$ .

В дифференциальной форме:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right);$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right);$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Представим выражения моментов в алгебраической форме, заменив производные конечными разностями по формулам. В результате внутренние усилия  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_{xy}$  будут определяться через перемещения узлов подобно тому, как это делалось при расчете стержней. Будем иметь:

$$(M_x)_{i,k} = -D \left( \frac{w_{i+1,k} - 2w_{i,k} + w_{i-1,k}}{\Delta_1^2} + \nu \frac{w_{i,k+1} - 2w_{i,k} + w_{i,k-1}}{\Delta_2^2} \right);$$

$$(M_y)_{i,k} = -D \left( \frac{w_{i,k+1} - 2w_{i,k} + w_{i,k-1}}{\Delta_2^2} + \nu \frac{w_{i+1,k} - 2w_{i,k} + w_{i-1,k}}{\Delta_1^2} \right);$$

$$(M_{xy})_{i,j} = -\frac{D(1-\nu)}{4\Delta_2\Delta_1} (w_{i+1,j+1} - w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j-1}).$$

Здесь, напомним,  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  — шаги сетки в направлении  $x$  и  $y$  соответственно. Поверхностные эпюры изгибающих моментов показаны на рисунках 8.45, 8.46.

На рисунках 8.47, 8.48 показаны эпюры изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$  в центральном сечении соответственно при  $x = 2$  м и  $y = 2$  м.

На рисунках 8.49–8.51 показаны поверхностная эпюра крутящих моментов  $M_{xy}$  и эпюры крутящих моментов в сечениях соответственно при  $x = 1$  м и  $y = 1$  м.

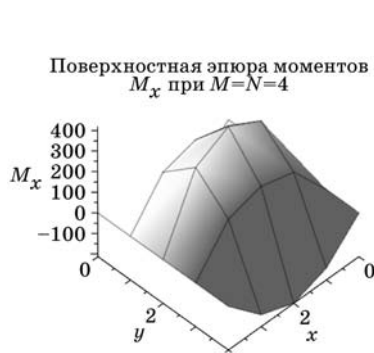


Рис. 8.45  
Эпюра моментов

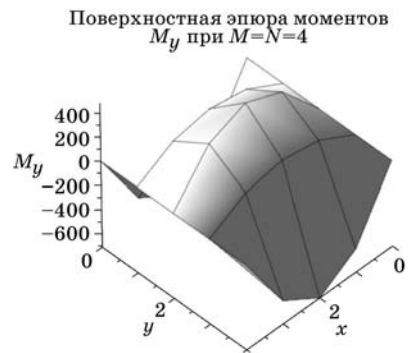


Рис. 8.46  
Эпюра моментов



Рис. 8.47  
Эпюра момента в сечении

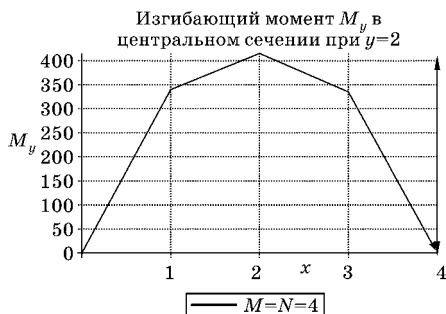


Рис. 8.48  
Эпюра момента в сечении



Рис. 8.49  
Крутящий момент



Рис. 8.50  
Крутящий момент в сечении



Рис. 8.51  
Крутящий момент в сечении

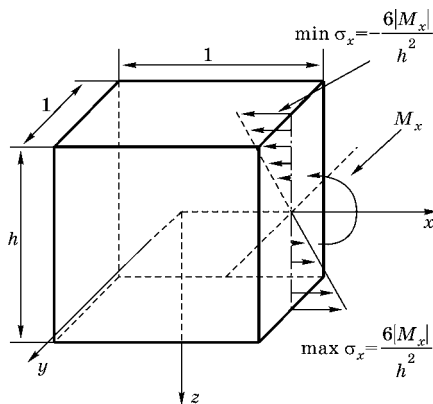


Рис. 8.52  
Максимальное напряжение

10. Вычисляем напряжения. После того как стали известны изгибающие и крутящие моменты в узлах сетки, можно перейти к вычислению напряжений. Максимальные нормальные напряжения в пластине определяем следующим образом. В окрестности узла, где  $M_x$  и  $M_y$  достигают наибольших величин (у нас это узел (2,2) в центре пластины), выделим из пластины элемент высотой  $h$  и размерами в плане  $1 \times 1$  (рис. 8.52). Перенесем с эпюры  $M_x$  и  $M_y$  на грани элемента величины изгибающих моментов, учитывая их знаки.

Напряжения в произвольной точке составят:

$$\sigma_x = \frac{M_x z}{I}; \quad \sigma_y = \frac{M_y z}{I}; \quad \tau = \frac{M_{xy} z}{I},$$

где  $I = \frac{1 \cdot h^3}{12}$  — момент инерции прямоугольного сечения, т. е.

$$\sigma_x = \frac{12M_x z}{h^3}; \quad \sigma_y = \frac{12M_y z}{h^3}; \quad \tau = \frac{12M_{xy} z}{h^3},$$

а максимальные по модулю значения напряжений — в крайних волокнах сечения, т. е. при  $z = z_{\max} = \frac{h}{2}$ :

$$|\sigma_x|_{\max} = \frac{6|M_x|}{h^2}; \quad |\sigma_y|_{\max} = \frac{6|M_y|}{h^2}; \quad |\tau|_{\max} = \frac{6|M_{xy}|}{h^2}.$$

В нашем конкретном случае (округляем до третьего знака)

$$\begin{aligned} \max M_x &= (M_x)_{2,2} = -\frac{D}{\Delta^2} [w_{3,2} - 2(1+\nu)w_{2,2} + w_{1,2} + \nu(w_{2,3} + w_{2,1})] \approx \\ &\approx -q_0 \Delta^2 [2 \cdot 0,400 - 2,6 \cdot 0,551 + 2 \cdot 0,3 \cdot 0,356] \approx 0,419 q_0 \Delta^2 \approx 419. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|\sigma_x|_{\max} = \frac{6|M_x|}{h^2} \approx \frac{6 \cdot 0,419 q_0 \Delta^2}{h^2} \approx \frac{6 \cdot 419}{0,01^2} \approx 25,14 \cdot 10^6.$$

Таким образом,  $|\sigma_x|_{\max} \approx 25,14$  МПа.

Остальные напряжения рекомендуем читателю вычислить самостоятельно.

Полученный результат можно уточнить, измельчив сетку. Продемонстрируем решение задачи в Maple:

```
>restart;
>with(plots):
>with(linalg):
>interface(displayprecision = 3):
```

Определим разностные операторы для первой и второй производных по  $x$  и  $y$  и на основе этих операторов получим конечно-разностные выражения для производных функции  $w(x, y)$  (нормального прогиба пластины) и их комбинаций — изгибающих и крутящего моментов  $M_x, M_y, M_{xy}$  и приведенных перерезывающих сил  $Q_x$  и  $Q_y$ .

```
>fx1:=proc(f,m,n,h)
(f[m+1,n]-f[m-1,n])/2/h;
end proc;
>fx2:=proc(f,m,n,h)
(f[m+1,n]-2*f[m,n]+f[m-1,n])/h^2;
```



```

end proc:
>fy1:=proc(f,m,n,h)
(f[m,n+1]-f[m,n-1])/2/h;
end proc:
>fy2:=proc(f,m,n,h)
(f[m,n+1]-2*f[m,n]+f[m,n-1])/h^2;
end proc:
>Wx1:=unapply(fx1(W,m,n,h[1]),m,n):
>Wx2:=unapply(fx2(W,m,n,h[1]),m,n):
>Wx3:=unapply(simplify(
(fx1(W,m+1,n,h[1])-2*fx1(W,m,n,h[1])+
fx1(W,m-1,n,h[1]))/h[1]^2),m,n):
>Wx4:=unapply(simplify(
(fx2(W,m+1,n,h[1])-2*fx2(W,m,n,h[1])+
fx2(W,m-1,n,h[1]))/h[1]^2),m,n):
>Wy1:=unapply(fy1(W,m,n,h[2]),m,n):
>Wy2:=unapply(fy2(W,m,n,h[2]),m,n):
>Wy3:=unapply(simplify(
(fy1(W,m,n+1,h[2])-2*fy1(W,m,n,h[2])+
fy1(W,m,n-1,h[2]))/h[2]^2),m,n):
>Wy4:=unapply(simplify(
(fy2(W,m,n+1,h[2])-2*fy2(W,m,n,h[2])+
fy2(W,m,n-1,h[2]))/h[2]^2),m,n):
>Wx1y1:=
unapply(simplify((fy1(W,m+1,n,h[2])-
fy1(W,m-1,n,h[2]))/2/h[1]),m,n):
>Wx2y1:=unapply(simplify(
(fy1(W,m+1,n,h[2])-2*fy1(W,m,n,h[2])+
fy1(W,m-1,n,h[2]))/h[1]^2),m,n):
>Wx1y2:=unapply(simplify(
(fx1(W,m,n+1,h[1])-2*fx1(W,m,n,h[1])+
fx1(W,m,n-1,h[1]))/h[2]^2),m,n):
>Wx2y2:=unapply(simplify(
(fy2(W,m+1,n,h[2])-2*fy2(W,m,n,h[2])+
fy2(W,m-1,n,h[2]))/h[1]^2),m,n):

```

**Конечно-разностные выражения для приведенных поперечных сил:**

```

>Qx:=unapply(-Dc*(Wx3(m,n)+(2-nu)*Wx1y2(m,n)),m,n):
>Qy:=unapply(-Dc*(Wy3(m,n)+(2-nu)*Wx2y1(m,n)),m,n):

```

**Конечно-разностные выражения для изгибающих моментов:**

```

>Mx:=unapply(-Dc*(Wx2(m,n)+nu*Wy2(m,n)),m,n):
>My:=unapply(-Dc*(Wy2(m,n)+nu*Wx2(m,n)),m,n):

```

**Конечно-разностное выражение для крутящего момента:**

```

>Mxy:=unapply(-Dc*(1-nu)*Wx1y1(m,n),m,n):

```

Вводим уравнение изгиба плиты и граничные условия:

```
>pde := laplacian(laplacian(w(x,y),[x,y]),[x,y]) =  
q(x,y)/Dc:  
>bc1 := w(x,0)=0, D[2](w)(x,0)=0,  
w(x,L[2])=0, D[2](w)(x,L[2])=0:  
bc2 := w(0,y)=0, D[1](D[1](w))(0,y)=0,  
w(L[1],y)=0, D[1](D[1](w))(L[1],y)=0:
```

Введем числовые данные для расчета и построения графиков — модуль упругости, коэффициент Пуассона, толщину плиты, параметр нагрузки, цилиндрическую жесткость плиты и размеры плиты в плане:

```
>E:=2.*10^11: nu:=0.3: delta:=0.01: q0:=1000.:  
Dc:=E*delta^3/12/(1-nu^2): L:=[4,4]:
```

Получим конечно-разностное решение краевой задачи при:

```
>M := 48: N := 48:
```

Шаг сетки:

```
>h:=[L[1]/M,L[2]/N];
```

Узлы сетки:

```
>X := k -> k*h[1]; Y := k -> k*h[2];
```

Зададим нагрузку:

```
>q := (x,y) -> q0-  
2*q0*(((x-L[1]/2)/L[1])^2+((y-L[2]/2)/L[2])^2):
```

Учтем граничные условия:

```
>for n from 0 to N do  
W[0,n] := rhs(bc2[1]):  
eqx2[n] := eval(bc2[2],  
{x = X(0),D[1](D[1](w))(0,y) = Wx2(0,n)}):  
eqx2[n] := W[-1,n]=solve(eqx2[n],W[-1,n]):  
W[M,n] := rhs(bc2[3]):  
eqx4[n] := eval(bc2[4],  
{x = X(M),D[1](D[1](w))(L[1],y) = Wx2(M,n)}):  
eqx4[n] := W[M+1,n]=solve(eqx4[n],W[M+1,n]):  
end do:  
>for m from 0 to M do  
W[m,0] := rhs(bc1[1]):  
eqy2[m] := eval( bc1[2],  
{y = Y(0),D[2](w)(x,0) = Wy1(m,0)}):  
eqy2[m] := W[m,-1]=solve(eqy2[m],W[m,-1]):  
W[m,N] := rhs(bc1[3]):  
eqy4[m] := eval( bc1[4],  
{y = Y(N),D[2](w)(x,L[2]) = Wy1(m,N)}):  
eqy4[m] := W[m,N+1]=solve(eqy4[m],W[m,N+1]):
```

```

assign(eqy1[m]):assign(eqy2[m]):
assign(eqy3[m]):assign(eqy4[m]):
end do:

```

Уравнения для значений во внутренних узлах:

```

>for m from 1 to M-1 do
for n from 1 to N-1 do
eq[m,n] := simplify(eval(pde,
{x = X(m),y = Y(n),
diff(w(x,y),x$4) = Wx4(m,n),
diff(w(x,y),x$2,y$2) = Wx2y2(m,n),
diff(w(x,y),y$4) = Wy4(m,n)}));
end do:
end do:

```

Формирование системы:

```

>eq_set:={}:
for m from 1 to M-1 do
for n from 1 to N-1 do
eq_set:= eq_set union {eq[m,n]}:
end do:
end do:
for m from 0 to M do
eq_set := subs(eqy1[m],eqy2[m],eqy3[m],eqy4[m],eq_set):
end do:
for n from 0 to N do
eq_set := subs(eqx2[n],eqx4[n],eq_set):
end do:
>var_set:={}:
for m from 1 to M-1 do
for n from 1 to N-1 do
var_set := var_set union {W[m,n]}:
end do:
end do:
>nops(eq_set);nops(var_set);
2209
2209

```

Таким образом, решается система из 2209 уравнений с 2209 неизвестными.

```

>W_sol:=fsolve(eq_set,var_set):assign(W_sol):

```

Получим поверхностную эпюру прогибов (рис. 8.53):

```

>surfdata(w,labels=[x,y,'w'],axes=frame,color=gray,
font=[Courier,bold,14],labelfont=[Courier,bold,14],
title=cat(' Поверхностная эпюра прогибов\n

```

```

при M = N = ` ,convert(M,string)));

```

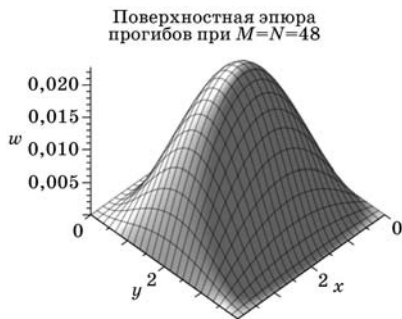


Рис. 8.53  
Поверхность прогибов

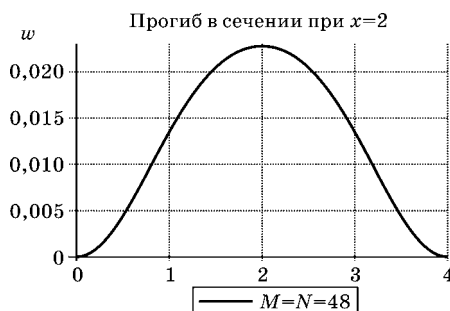


Рис. 8.54  
Прогиб в центральном сечении

Найдем номер узла, соответствующего середине стороны  $x = L_1/2$ :

```
>k:=k':k*h[1]=L[1]/2:k:=solve(k*h[1]=L[1]/2,k):
```

```
>W_cx:=seq([j*h[2], evalf(W[k,j])], j=0..N):
```

Построим эпюру прогибов в сечении  $x = L_1/2$  (рис. 8.54):

```
>plot(W_cx,title=cat("Прогиб в сечении при y = `",
convert(L[2]/2,string)),labels=[x,'w'],color=black,
gridlines=true,font=[Courier,bold,14],
labelfont=[Courier,bold,14],
xtickmarks=7,ytickmarks=7,
legend=cat("M = N = `",convert(M,string)));
```

Теперь вычислим моменты:

```
>for n from 0 to N do
```

```
assign(eqx2[n]);assign(eqx4[n]);
```

```
end do;
```

```
MX := [seq([ seq([i*h[1],j*h[2],
evalf(Mx(i,j))], i=0..M)], j=0..N):
```

```
MY := [seq([ seq([i*h[1],j*h[2],
evalf(My(i,j))], i=0..M)], j=0..N):
```

```
MXY := [seq([ seq([i*h[1],j*h[2],
evalf(Mxy(i,j))], i=1..M-1)], j=1..N-1):
```

На рисунках 8.55, 8.56 показаны эпюры изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$  в центральном сечении соответственно при  $x = 2$  м и  $y = 2$  м:

```
>p:=p':p*h[1]=L[1]/2;p:=solve(p*h[1]=L[1]/2,p):
```

```
>l:=l':l*h[2]=L[2]/2;l:=solve(l*h[2]=L[2]/2,l):
```

```
>Mx_c_x_2:=seq([j*h[2], evalf(Mx(p,j))], j=0..N):
```

```
>plot(Mx_c_x_2,title=cat("Изгибающий момент Mx при x = `",
convert(L[1]/2,string)),labels=[y,'Mx'],color=black,
gridlines=true,font=[Courier,bold,14],
labelfont=[Courier,bold,14],xtickmarks=7,ytickmarks=10,
legend=cat("M = N = `",convert(M,string)));
```

```
>My_c_y_2 := [seq([i*h[1], evalf(My(i,l))], i=0..M):
```

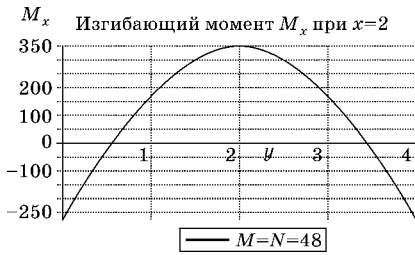


Рис. 8.55

Момент в центральном сечении

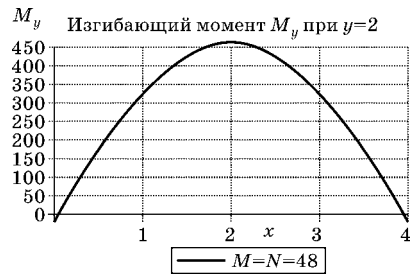


Рис. 8.56

Момент в центральном сечении

```
>plot(My_c_y_2,title=cat('Изгибающий момент My при y = `',
convert(L[2]/2,string)),labels=[x,'My'],color=black,
gridlines=true,font=[Courier,bold,14],
labelfont=[Courier,bold,14],xtickmarks=7,ytickmarks=10,
legend=cat('M = N = `',convert(M,string)));
```

Найдем номер узла, соответствующего координате  $x = L_1/4$ :

```
>k1:='k1':k1*h[1]=L[1]/4:k1:=solve(k1*h[1]=L[1]/4,k1):
```

Найдем номер узла, соответствующего координате  $y = L_2/4$ :

```
>s1:='s1':s1*h[2]=L[2]/4:s1:=solve(s1*h[2]=L[2]/4,s1):
```

На рисунках 8.57, 8.58 показаны эпюры крутящих моментов в сечениях при  $x = 1$  м и  $y = 1$  м:

```
>Mxy_c := [seq([i*h[1], evalf(Mxy(i,s1))], i=0..M)]:
plot(Mxy_c,title=cat('Крутящий момент в сечении при y = `',
convert(L[2]/4,string)),labels=[x,'Mxy'],color=black,
gridlines=true,font=[Courier,bold,14],
labelfont=[Courier,bold,14],
xtickmarks=7,ytickmarks=10,
legend=cat('M = N = `',convert(M,string)));
>Myx_c := [seq([j*h[2], evalf(Mxy(k1,j))], j=0..N)]:
plot(Myx_c,title=cat('Крутящий момент в сечении при x = `',
convert(L[1]/4,string)),labels=[y,'Mxy'],color=black,
gridlines,font=[Courier,bold,14],
labelfont=[Courier,bold,14],
xtickmarks=7,ytickmarks=10,
legend=cat('M = N = `',convert(M,string)));
```

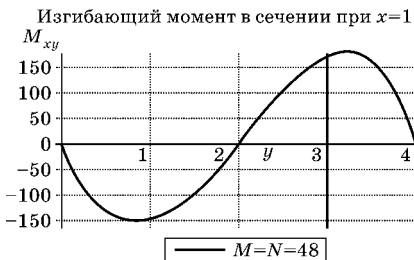


Рис. 8.57

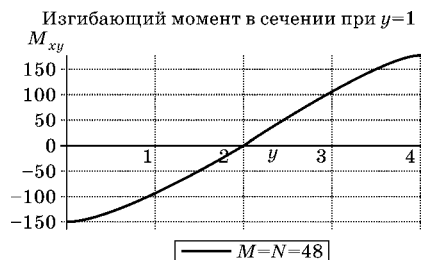


Рис. 8.58

Вычислим напряжения. Находим максимальный по модулю момент  $M_x$

```
>S:=0;
for i from 0 to M do
for j from 0 to N do
if abs(Mx(i,j))>S then S:=abs(Mx(i,j)) else S end if;
end do;
end do;
>MXmax:=S;
```

Максимальное напряжение  $\sigma_{x,\max}$  (МПа)

```
>'sigma[x,max]'=6*M[x,max]'/delta'^2;
sigma[x,max]=6*MXmax/delta^2/10^6;
```

$$\sigma_{x,\max} = \frac{6M_{x,\max}}{\delta^2}$$

$$\sigma_{x,\max} = 21.063$$

Находим максимальный по модулю момент  $M_y$

```
>S:=0:i='i':j='j':
for i from 0 to M do
for j from 0 to N do
if abs(My(i,j))>S then S:=abs(My(i,j)) else S end if;
end do;
end do;
>MYmax:=S;
```

Максимальное напряжение  $\sigma_{y,\max}$  (МПа)

```
>'sigma[y,max]'=6*M[y,max]'/delta'^2;
sigma[y,max]=6*MYmax/delta^2/10^6;
```

$$\sigma_{y,\max} = \frac{6M_{y,\max}}{\delta^2}$$

$$\sigma_{y,\max} = 54.790$$

**Пример 2.** Для тонкой пластины  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq a$  (рис. 8.59), имеющей свободную кромку  $DC$ , шарнирное опирание по кромке  $AB$  и жесткое защемление по кромкам  $AD$  и  $BC$ , построить пространственные эпюры, приняв шаг сетки  $\Delta = a/4$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $P_1 = 10q\Delta^2$ ,  $P_2 = 5q\Delta^2$ .

*Решение.* Задача отличается от предыдущей задачи примера 1 особенностью граничных условий на свободной кромке  $DC$ . Для узлов (0,3), (1,3), (2,3), (3,3), (0,2), (1,2), (2,2), (3,2), (0,1), (1,1), (2,1), (3,1) (рис. 8.60), получающих перемещения, алгебраическое уравнение общего вида записывается точно так же, как и в примере 1. При этом в уравнение, записанное для каждого узла на свободной кромке, войдут значения прогибов в двух законтурных узлах (вместо одного для узлов, расположенных около защемленной и шарнирно опертой кромок).

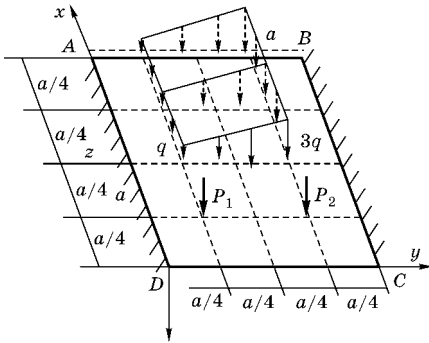


Рис. 8.59

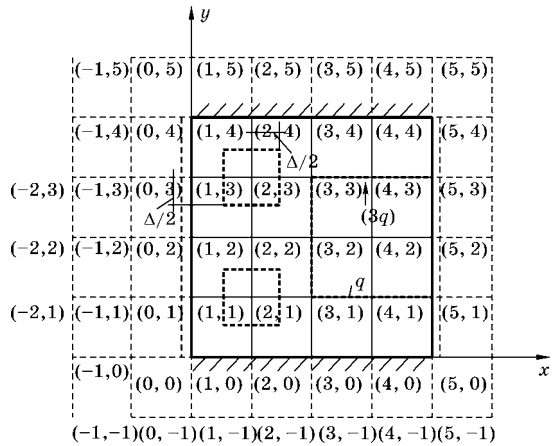


Рис. 8.60

Поэтому к основному алгебраическому уравнению общего вида для каждого из узлов  $(0, 3)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(0, 1)$  необходимо записать еще по два дополнительных уравнения, выражающие для незагруженной кромки равенство нулю изгибающего момента и приведенной поперечной силы, т. е.

$$M_x|_{x=0} = 0, \quad \tilde{Q}_x|_{x=0} = 0.$$

Для произвольной точки  $(i, k)$  на свободной кромке выражения в дифференциальной и алгебраической формах запишутся следующим образом:

$$(M_x)_{i,k} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{i,k} = \frac{D}{\Delta^2} [2(1+\nu)w_{i,k} - \nu(w_{i,k+1} + w_{i,k-1}) - w_{i+1,k} - w_{i-1,k}];$$

$$(\tilde{Q}_x)_{i,k} = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right)_{i,k} = \frac{D}{2\Delta^3} \{w_{i-2,k} - w_{i+2,k} + 2(3-\nu)[w_{i+1,k} - w_{i-1,k}] - (2-\nu)[w_{i+1,k-1} + w_{i+1,k+1} - w_{i-1,k-1} - w_{i-1,k+1}]\}.$$

В качестве иллюстрации запишем для узла  $(3, 1)$  алгебраическое уравнение общего вида, а для узла  $(0, 3)$  — три уравнения: алгебраическое уравнение общего вида и уравнения в алгебраической (конечно-разностной) форме для момента  $(M_x)_{i,k}$  и приведенной силы  $(\tilde{Q}_x)_{i,k}$ . Сосредоточенные силы заменяем распределенной нагрузкой с интенсивностью:

$$q_{1,1} = \frac{P_1}{\Delta^2} = \frac{10q\Delta^2}{\Delta^2} = 10q; \quad q_{1,3} = \frac{P_2}{\Delta^2} = \frac{5q\Delta^2}{\Delta^2} = 5q.$$

Узел  $(3, 1)$ :

$$20w_{3,1} - 8(w_{4,1} + w_{2,1} + w_{3,2} + w_{3,0}) + 2(w_{2,0} + w_{4,2} + w_{2,2} + w_{4,0}) + w_{5,1} + w_{1,1} + w_{3,3} + w_{3,-1} = \frac{q\Delta^4}{D},$$

где на кромках с жестким защемлением и шарнирным опиранием прогибы равны нулю

$$w_{4,0} = w_{3,0} = w_{2,0} = w_{4,1} = w_{4,2} = 0.$$

Кроме того,

$$w_{3,-1} = w_{3,1}, \quad w_{5,1} = -w_{3,1}.$$

Узел (0,3):

$$20w_{0,3} - 8(w_{1,3} + w_{-1,3} + w_{0,4} + w_{0,2}) + 2(w_{-1,2} + w_{1,4} + w_{-1,4} + w_{1,2}) + w_{2,3} + w_{-2,3} + w_{0,5} + w_{0,1} = 0;$$

$$2(1 + \nu)w_{0,3} - \nu(w_{0,4} + w_{0,2}) - w_{1,3} - w_{-1,3} = 0;$$

$$w_{-2,3} - w_{2,3} + 2(3 - \nu)[w_{1,3} - w_{-1,3}] - (2 - \nu)[w_{1,2} + w_{1,4} - w_{-1,2} - w_{-1,4}] = 0.$$

Итак, записав для внутренних узлов по одному алгебраическому уравнению общего вида с учетом граничных условий шарнирного опирания и жесткого защемления, а для узлов на свободной кромке — по одному алгебраическому уравнению общего вида с учетом граничных условий свободных кромок, получим систему из 18 уравнений, совместное решение которой дает значения перемещений в узлах сетки (табл. 8.1).

Таблица 8.1

Значения прогибов в узлах

Номера узлов	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
$w$	0,697	1,118	0,820	1,186	1,730	1,233
Номера узлов	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)
$w$	1,567	1,753	1,278	0,926	1,033	0,791

Общим множителем к числовым данным таблицы 8.1 является  $q \frac{\Delta^4}{D}$ . По этим данным строится эпюра прогибов, а также вычисляются узловые моменты  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_{xy}$ , как и в примере 1. Рекомендуем проделать все необходимые вычисления и построить графики самостоятельно в качестве упражнения.

**Пример 3.** Для квадратной плиты с шарнирным опиранием по контуру (рис. 8.61) определить критическую нагрузку  $P_{кр}$ .

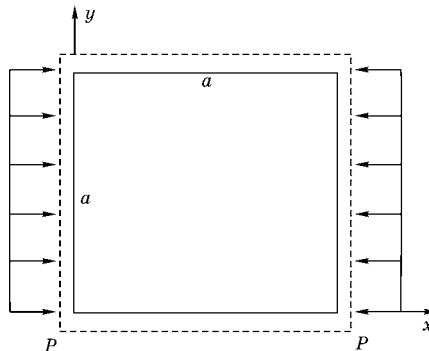


Рис. 8.61



*Решение.* Дифференциальное уравнение устойчивости пластины, сжатой в направлении оси  $x$  погонной нагрузкой  $P$ , имеет вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{P}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Заменяем дифференциальное уравнение алгебраическим общего вида, используя конечно-разностные формулы для производных.

Продемонстрируем решение этой задачи в системе Maple. Подключаем необходимый для вычислений пакет линейной алгебры:

```
>restart;
>with(linalg):
```

Вводим дифференциальное уравнение устойчивости в безразмерных координатах  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ :

```
>pde:=diff(w(x,y),x$4)+2*diff(w(x,y),x$2,y$2)*a^2/b^2+
diff(w(x,y),y$4)*a^4/b^4+lambd*diff(w(x,y),x$2)=0:
```

Здесь для удобства мы ввели обозначение  $\lambda = \frac{Pa^2}{D}$ .

Определим конечно-разностные операторы:

```
>Wx1 := (m,n) -> (W[m+1,n]-W[m-1,n])/2/h1:
>Wx2 := (m,n) -> (W[m+1,n]-2*W[m,n]+W[m-1,n])/h1^2:
>Wx3 := (m,n) -> (W[m+2,n]-2*W[m+1,n]+2*W[m-1,n]-
W[m-2,n])/2/h1^3:
>Wx4 := (m,n) -> (W[m+2,n]-4*W[m+1,n]+6*W[m,n]-
4*W[m-1,n]+W[m-2,n])/h1^4:
>Wy1 := (m,n) -> (W[m,n+1]-W[m,n-1])/2/h2:
>Wy2 := (m,n) -> (W[m,n+1]-2*W[m,n]+W[m,n-1])/h2^2:
>Wy3 := (m,n) -> (W[m,n+2]-2*W[m,n+1]+2*W[m,n-1]-
W[m,n-2])/2/h2^3:
>Wy4 := (m,n) -> (W[m,n+2]-4*W[m,n+1]+6*W[m,n]-
4*W[m,n-1]+W[m,n-2])/h2^4:
>Wx2y2 := (m,n) ->
(4*W[m,n]-2*(W[m,n+1]+W[m+1,n]+W[m,n-1]+W[m-1,n])+
(W[m-1,n-1]+W[m-1,n+1]+W[m+1,n+1]+W[m+1,n-1]))/h1^2/h2^2:
>Wy2x := (m,n) ->
1/2*(W[m+1,n+1]-W[m-1,n+1]-2*W[m+1,n]+2*W[m-1,n]+
W[m+1,n-1]-W[m-1,n-1])/h1/h2^2:
>Wx2y := (m,n) ->
1/2*(W[m+1,n+1]-W[m+1,n-1]-2*W[m,n+1]+2*W[m,n-1]+
W[m-1,n+1]-W[m-1,n-1])/h2/h1^2:
```

Примем безразмерный шаг сетки  $h = \frac{1}{3}$ , одинаковый по обеим координатам:

```
>M := 3: N := 3:
>b:=a:
>h1 := 1/M; h2 := 1/N:
```

и зададим сетку:

```
>X := k -> k*h1: Y := k -> k*h2:
```

Произведем учет граничных условий (шарнирное опирание по контуру):

```
>for n from 0 to N do  
W[0,n] := 0: W[-1,n] := -W[1,n];  
W[M,n] := 0: W[M+1,n] := -W[M-1,n];  
end do:  
>for m from 0 to M do  
W[m,0] := 0: W[m,-1] := -W[m,1];  
W[m,N] := 0: W[m,N+1] := -W[m,N-1];  
end do:
```

Сформируем систему уравнений для внутренних точек:

```
>for m from 1 to M-1 do  
for n from 1 to N-1 do  
eq[m,n] := eval(pde,  
{x = X(m),y = Y(n),  
diff(w(x,y),x$4) = Wx4(m,n),  
diff(w(x,y),x$2,y$2) = Wx2y2(m,n),  
diff(w(x,y),y$4) = Wy4(m,n),  
diff(w(x,y),x$2) = Wx2(m,n)});  
print(eq[m,n]);  
end do:  
end do:
```

$$\begin{aligned} -648W_{2,1} + 1458W_{1,1} - 648W_{1,2} + 162W_{2,2} + \lambda(9W_{2,1} - 18W_{1,1}) &= 0 \\ -648W_{2,2} + 1458W_{1,2} - 648W_{1,1} + 162W_{2,1} + \lambda(9W_{2,2} - 18W_{1,2}) &= 0 \\ 1458W_{2,1} - 648W_{1,1} - 648W_{2,2} + 162W_{1,2} + \lambda(-18W_{2,1} + 9W_{1,1}) &= 0 \\ 1458W_{2,2} - 648W_{1,2} - 648W_{2,1} + 162W_{1,1} + \lambda(-18W_{2,2} + 9W_{1,2}) &= 0 \end{aligned}$$

Как видим, полученная система — однородная. Для того чтобы она имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно обращение ее определителя в нуль. Сформируем матрицу полученной системы и вычислим ее определитель:

```
>eq_set:={}:  
for m from 1 to M-1 do  
for n from 1 to N-1 do  
eq_set:= eq_set union {eq[m,n]}:  
end do:  
end do:  
>var_set:={}:  
for m from 1 to M-1 do  
for n from 1 to N-1 do  
var_set := var_set union {W[m,n]};
```

```
end do;
end do;
>var_set;
```

$\{W_{1,1}, W_{2,1}, W_{1,2}, W_{2,2}\}$

```
>nops(eq_set);nops(var_set);
```

4  
4

```
>A := genmatrix(eq_set, var_set);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1458 - 18\lambda & -648 & 9\lambda - 648 & 162 \\ 9\lambda - 648 & 162 & 1458 - 18\lambda & -648 \\ -648 & 1458 - 18\lambda & 162 & 9\lambda - 648 \\ 162 & 9\lambda - 648 & -648 & 1458 - 18\lambda \end{bmatrix}$$

```
>Delta:=det(A);
```

$$\Delta := -1586874322944 + 102852965376\lambda - 2270315952\lambda^2 + 19840464\lambda^3 - 59049\lambda^4$$

Приравниваем нулю определитель и находим значения параметра  $\lambda$ :

```
>res:=solve(%,lambda);
```

$$res := 144, 36, 48, 108$$

Как видим, Maple справился с этой задачей аналитически. В более сложных ситуациях необходимо использовать команду `fsolve` для численного определения корней алгебраического уравнения.

Наименьшее значение параметра  $\lambda$  соответствует критической нагрузке:

```
>lambda:=min(res);
```

$$\lambda := 36$$

Таким образом,

```
>'P[kp]'=lambda*'D'/a^2;
```

$$P_{kp} = \frac{36D}{a^2}$$

Точное значение критической нагрузки:

```
>'P[kp,exact]'=4*Pi^2*'D'/a^2;
```

$$P_{kp,exact} = \frac{4\pi^2 D}{a^2}$$

Погрешность вычислений составляет

```
>evalf(abs((rhs(%)-rhs(%))/rhs(%))*100);
```

8.810934758

т. е. примерно 8,8%.

Уточнить результат, как обычно, можно сгустив сетку. Например, для шага сетки  $h = \frac{1}{6}$  получим  $\lambda_{\min} = 288 - 144\sqrt{3} \approx 38,5846836$  и критическую нагрузку

$$P_{kp} = 38,5846836 \frac{D}{a^2}.$$

Погрешность теперь составляет примерно 2%. (Проверьте!)

**Пример 4.** Для плиты с равномерно распределенной массой и шарнирным опиранием по контуру определить низшую собственную частоту свободных поперечных колебаний.

*Решение.* Дифференциальное уравнение свободных поперечных колебаний пластины с равномерно распределенной массой имеет вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{h\rho\omega^2}{D} w = 0,$$

где  $h$  — толщина пластины;  $\rho$  — плотность материала;  $D$  — цилиндрическая жесткость;  $\omega$  — искомая круговая частота свободных колебаний.

Эта задача в математическом отношении незначительно отличается от предыдущей задачи из примера 3. Точно так же, как и в примере 3, заменяем дифференциальное уравнение алгебраическим общего вида. Для решения задачи в системе Maple можно воспользоваться теми же преобразованиями, что и в предыдущем случае, внося необходимые изменения, соответствующие рассматриваемой задаче. Так, введем исходное дифференциальное уравнение в безразмерных координатах:

```
>pde:=  
diff(w(x,y),x$4)+2*diff(w(x,y),x$2,y$2)*a^2/b^2+diff(w(x,y),y$4)*a^4/b^4-  
lambda*w(x,y)=0:
```

Здесь теперь параметр  $\lambda = \frac{h\rho\omega^2 a^4}{D}$ .

Используем те же самые выражения для конечно-разностных операторов. Повторно приводить их не будем.

Примем безразмерный шаг сетки  $h = \frac{1}{3}$ , одинаковый по обеим координатам, и определим сетку, как в примере 3.

Произведем учет граничных условий (шарнирное опирание по контуру), как в примере 3.

Сформируем систему уравнений для внутренних точек, как в примере 3. Теперь, после выполнения соответствующих операторов, получим

$$\begin{aligned}
-\lambda W_{1,1} + 1458W_{1,1} - 648W_{1,2} - 648W_{2,1} + 162W_{2,2} &= 0 \\
-\lambda W_{1,2} - 648W_{1,1} + 1458W_{1,2} + 162W_{2,1} - 648W_{2,2} &= 0 \\
-\lambda W_{2,1} - 648W_{1,1} + 162W_{1,2} + 1458W_{2,1} - 648W_{2,2} &= 0 \\
-\lambda W_{2,2} + 162W_{1,1} - 648W_{1,2} - 648W_{2,1} + 1458W_{2,2} &= 0
\end{aligned}$$

Матрица коэффициентов этой системы имеет вид

$$A := \begin{bmatrix} 162 & -648 & -648 & -\lambda + 1458 \\ -648 & 162 & -\lambda + 1458 & -648 \\ -648 & -\lambda + 1458 & 162 & -648 \\ -\lambda + 1458 & -648 & -648 & 162 \end{bmatrix}$$

а ее определитель

$$\Delta := \lambda^4 - 5832\lambda^3 + 11022480\lambda^2 - 7890835968\lambda + 1586874322944$$

Корнями этого определителя будут 324, 1296, 1296, 2916. Наименьший из корней  $\lambda_{\min} = 324$  и определяет низшую частоту свободных поперечных колебаний плиты:

$$\omega^2 = \frac{324D}{hr a^4} \Rightarrow \omega = \frac{18}{a^2} \sqrt{\frac{D}{hr}}.$$

Точное значение частоты

$$\omega_t = \frac{2\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{hr}}.$$

Таким образом, погрешность составляет примерно 8,8%. Сгустив сетку, можно уточнить результат. Предоставляем это читателю в качестве упражнения.

# ПРИЛОЖЕНИЕ

## Оригиналы и их изображения

$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{f}(p)e^{pt} dp$	$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$
$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{p}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p + \alpha}$
$\cos(\beta t)$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$
$\sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$
$t^{\nu}$	$\frac{\Gamma(\nu + 1)}{p^{\nu + 1}}$
$\sin(at)\text{sh}(at)$	$\frac{2a^2 p}{p^4 + 4a^4}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}$
$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2 + \alpha^2}}$
$\begin{cases} 1, & t < T \\ 0, & t > T \end{cases}$	$\frac{1 - e^{-pT}}{p}$
$\sin(at)\text{ch}(at)$	$\frac{a(p^2 + 2a^2)}{p^3 + 4a^4}$
$\text{sh}(at)$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
$\text{ch}(at)$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
$\frac{1}{2a}(\sin(at) - at \cos(at))$	$\frac{a^2}{(p^2 + a^2)^2}$
$\frac{t}{2a} \sin(at)$	$\frac{p}{(p^2 + a^2)^2}$
$\cos(at)\text{ch}(at)$	$\frac{p^3}{p^4 + 4a^4}$

$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{f}(p)e^{pt} dp$	$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$
$e^{-\lambda t} \cos(\omega t)$	$\frac{p + \lambda}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}$
$e^{-\lambda t} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$
$\cos(at) \operatorname{sh}(at)$	$\frac{a(p^2 - 2a^2)}{p^4 + 4a^4}$
$\operatorname{ch}(at)$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
$1 - \Phi\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p}$
$\frac{\operatorname{ch}(2\sqrt{t})}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}} \frac{e^p}{e^p}$
$\frac{\operatorname{sh}(2\sqrt{t})}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{1}{p\sqrt{p}} \frac{e^p}{e^p}$
$J_0(a\sqrt{t})$	$\frac{e^{-\frac{a^2}{4p}}}{p}$
$\frac{1 + 2at}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{p + a}{p\sqrt{p}}$
$\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p+a}}$

# ЛИТЕРАТУРА

1. *Арсенин, В. Я.* Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции. — М. : Физматгиз, 1966. — 368 с.
2. *Будак, Б. М.* Сборник задач по математической физике / Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. — М. : ГИТТЛ, 1956. — 684 с.
3. *Бутенин, Н. В.* Введение в аналитическую механику. — М. : Наука, 1971. — 264 с.
4. *Владимиров, В. С.* Уравнения математической физики. — 4-е изд. — М. : Наука, 1981. — 512 с.
5. *Владимиров, В. С.* Сборник задач по уравнениям математической физики / В. С. Владимиров, А. А. Вашарин, Х. Х. Каримова [и др.]. — 4-е изд., стер. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 288 с.
6. *Гельфанд, И. М.* Вариационное исчисление / И. М. Гельфанд, С. В. Фомин. — М. : Физматгиз, 1961. — 228 с.
7. *Говорухин, В.* Компьютер в математическом исследовании. Учебный курс / В. Говорухин, В. Цибулин. — СПб. : Питер, 2001. — 624 с.
8. *Голоскоков, Д. П.* Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple : учеб. для вузов. — СПб. : Питер, 2004. — 539 с.
9. *Голоскоков, Д. П.* Практический курс математической физики в системе Maple : учебн. пособие для вузов. — СПб. : ООО «ПаркКом», 2010. — 643 с.
10. *Гюнтер, Н. М.* Сборник задач по высшей математике / Н. М. Гюнтер, Р. О. Кузьмин. — М. : Л. : ГИТТЛ, 1951. — Т. 3. — 268 с.
11. *Дёч, Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. — М. : Наука, 1971. — 288 с.
12. *Диткин, В. А.* Операционное исчисление / В. А. Диткин, А. П. Прудников. — М. : Высш. шк., 1966. — 408 с.
13. *Игнатьев, Ю. Г.* Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. — Казань : Казанский университет, 2014. — 298 с.
14. *Канторович, Л. В.* Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. — М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. — 696 с.
15. *Карслоу, Х.* Операционные методы в прикладной математике / Х. Карслоу, Д. Егер. — М. : Иностранная литература, 1948. — 292 с.
16. *Кошляков, Н. С.* Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. — М. : Высш. шк., 1970. — 712 с.
17. *Кручкович, Г. И.* Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики / Г. И. Кручкович, Г. М. Мордасова [и др.]. — М. : Высш. шк., 1970. — 512 с.
18. *Лебедев, Н. Н.* Сборник задач по математической физике / Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская, Я. С. Уфлянд. — М. : ГИТТЛ, 1955. — 420 с.
19. *Лебедев, Н. Н.* Специальные функции и их приложения. — СПб. : Лань, 2010. — 368 с.
20. *Ловитт, У. В.* Линейные интегральные уравнения. — М. : ГИТТЛ, 1957. — 268 с.
21. *Матросов, А. В.* Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. — СПб. : БХВ-Петербург, 2001. — 528 с.
22. *Михлин, С. Г.* Вариационные методы в математической физике. — М. : ГИТТЛ, 1957. — 476 с.
23. *Очан, Ю. С.* Методы математической физики. — М. : Высш. шк., 1965. — 384 с.



24. *Петровский, И. Г.* Лекции по теории интегральных уравнений. — М. ; Л. : ГИТТЛ, 1951. — 128 с.
25. *Петровский, И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. — М. : Физматгиз, 1961. — 400 с.
26. *Смирнов, В. И.* Курс высшей математики. — М. : Наука, 1974. — Т. 4. — Ч. 1. — 336 с.
27. *Снеддон, И.* Преобразования Фурье. — М. : Иностранная литература, 1955. — 668 с.
28. *Соболев, С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М. : Наука, 1988. — 334 с.
29. *Соболев, С. Л.* Уравнения математической физики. — М. : Наука, 1966. — 444 с.
30. *Тихонов, А. Н.* Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — 5-е изд. — М. : Наука, 1977. — 736 с.
31. *Трантер, К. Дж.* Интегральные преобразования в математической физике. — М. : ГИТТЛ, 1956. — 204 с.
32. *Трикоми, Ф.* Интегральные уравнения. — М. : Иностранная литература, 1960. — 300 с.
33. *Трикоми, Ф.* Дифференциальные уравнения. — М. : Иностранная литература, 1962. — 352 с.
34. *Эльсгольц, Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М. : Наука, 1965. — 424 с.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	5
<i>Глава 1</i>	
<b>Введение</b> .....	8
1.1. Предмет и задачи математической физики .....	8
1.2. Основные дифференциальные операторы математической физики .....	9
1.3. Основные интегральные тождества .....	13
1.4. Криволинейные координаты .....	16
<i>Глава 2</i>	
<b>Уравнения математической физики</b> .....	19
2.1. Уравнение колебаний .....	19
Уравнение малых поперечных колебаний струны .....	19
Уравнение малых продольных колебаний упругого стержня .....	21
Уравнение малых поперечных колебаний мембраны .....	25
Задача о равновесии мембраны .....	27
Задача об установившихся синусоидальных колебаниях мембраны .....	27
Телеграфное уравнение .....	28
2.2. Уравнение диффузии .....	30
Уравнение теплопроводности .....	30
Уравнение диффузии .....	32
2.3. Стационарное уравнение .....	33
Вывод уравнения электростатики .....	33
Вывод уравнения гидродинамики .....	34
2.4. Основные уравнения математической физики .....	35
2.5. Классификация уравнений второго порядка .....	38
Классификация уравнений в точке .....	39
Классификация уравнений с двумя независимыми переменными .....	42
2.6. Преобразование уравнений второго порядка с помощью замены переменных .....	43
Уравнение гиперболического типа .....	45
Уравнение параболического типа .....	46
Уравнение эллиптического типа .....	47

2.7. Классификация задач математической физики . . . . .	47
Задача Коши . . . . .	49
Краевая задача для уравнений эллиптического типа . . . . .	49
Смешанная задача . . . . .	50
2.8. Понятие о корректно поставленной задаче математической физики . . . . .	51
Замечание о классе функций, среди которых ищется решение задачи . . . . .	51
О единственности решения задач математической физики . . . . .	52
2.9. Понятие об общем интеграле уравнения в частных производных . . . . .	58
Примеры . . . . .	59
Применение общего интеграла к решению некоторых задач математической физики . . . . .	60
Колесания неограниченной струны. Метод Даламбера . . . . .	61
2.10. Понятие об обобщенных решениях в математической физике . . . . .	63
Дельта-функция Дирака и ее свойства . . . . .	66
Вопросы к главе 2 . . . . .	69
Задачи с примерами решения . . . . .	70
Примеры решения типовых задач . . . . .	73
 <i>Глава 3</i>	
<b>Метод Фурье . . . . .</b>	<b>94</b>
3.1. Уравнения с разделяющимися переменными . . . . .	94
3.2. Задача об охлаждении пластины . . . . .	99
3.3. Задача Дирихле для круга . . . . .	103
Преобразование решения задачи Дирихле для круга. Интеграл Пуассона . . . . .	105
3.4. Задача Штурма — Лиувилля . . . . .	108
3.5. Некоторые свойства собственных значений регулярной задачи Штурма — Лиувилля . . . . .	110
3.6. Фундаментальная система решений Штурма — Лиувилля . . . . .	113
3.7. Асимптотическое поведение фундаментальных решений Штурма — Лиувилля при $\lambda \rightarrow +\infty$ . . . . .	115
3.8. Определение собственных значений и собственных функций регулярной задачи Штурма — Лиувилля . . . . .	118
3.9. Разложение в ряд по собственным функциям регулярной задачи Штурма — Лиувилля . . . . .	120
3.10. Регулярная задача Штурма — Лиувилля с граничными условиями четвертого рода . . . . .	124
3.11. Сингулярная задача Штурма — Лиувилля . . . . .	128
3.12. Общее изложение метода Фурье для случая двух независимых переменных . . . . .	130
3.13. Задача об охлаждении пластины, излучающей тепло . . . . .	134
Вопросы к главе 3 . . . . .	136
Задачи с примерами решения . . . . .	137
Примеры решения типовых задач . . . . .	141
 <i>Глава 4</i>	
<b>Специальные функции математической физики . . . . .</b>	<b>167</b>
4.1. Эйлеровы интегралы . . . . .	168
Эйлеров интеграл первого рода . . . . .	168
Эйлеров интеграл второго рода . . . . .	171

4.2. Интеграл вероятности . . . . .	173
4.3. Функция Бесселя . . . . .	176
4.4. Функция Вебера . . . . .	179
4.5. Представление функции Вебера в виде ряда . . . . .	182
4.6. Рекуррентные формулы для функций Бесселя . . . . .	184
4.7. Интегральные представления для цилиндрических функций . . . . .	186
4.8. Асимптотические представления цилиндрических функций для больших значений аргумента . . . . .	189
4.9. Модифицированные цилиндрические функции . . . . .	192
4.10. Задача Штурма — Лиувилля, связанная с цилиндрическими функциями . . . . .	195
4.11. Разложение функции в ряды Фурье — Бесселя и Дини . . . . .	198
4.12. Приложения цилиндрических функций в математической физике . . . . .	202
Задача о колебаниях круглой мембраны . . . . .	202
Решение задачи Дирихле для цилиндра . . . . .	204
4.13. Сферические функции. Полиномы Лежандра . . . . .	207
4.14. Производящая функция для полиномов Лежандра . . . . .	210
4.15. Рекуррентные формулы для полиномов Лежандра . . . . .	213
4.16. Задача Штурма — Лиувилля, связанная с полиномами Лежандра . . . . .	214
Вычисление нормы для полиномов Лежандра . . . . .	216
4.17. Приложение полиномов Лежандра в математической физике . . . . .	218
Вопросы к главе 4 . . . . .	220
Задачи с примерами решения . . . . .	221
Примеры решения типовых задач . . . . .	223
 <i>Глава 5</i>	
<b>Неоднородные задачи математической физики . . . . .</b>	<b>235</b>
5.1. Метод приведения к однородной задаче . . . . .	235
Задача о распределении температуры в бесконечной пластине . . . . .	235
Задача о нагревании бесконечного цилиндра . . . . .	236
Задача о вынужденных колебаниях круглой мембраны . . . . .	237
Задача Дирихле для прямоугольника . . . . .	238
5.2. Метод Гринберга . . . . .	239
Краткая схема решения задачи методом Гринберга . . . . .	242
Связь метода Гринберга с методом Фурье . . . . .	243
Замечания о сходимости рядов, полученных методом Гринберга . . . . .	243
Способы улучшения сходимости . . . . .	244
5.3. Примеры задач математической физики, разрешимых с помощью метода Гринберга . . . . .	245
Задача Дирихле для прямоугольника . . . . .	245
Задача о вынужденных колебаниях круглой мембраны . . . . .	248
5.4. Задачи с непрерывным спектром . . . . .	250
Некоторые интегральные разложения, связанные с сингулярной задачей Штурма — Лиувилля . . . . .	251
5.5. Примеры задач с непрерывным спектром . . . . .	255
Задача об охлаждении полубесконечного тела . . . . .	255
Задача Дирихле для полуплоскости . . . . .	258
Преобразование полученного решения . . . . .	259
Задача Дирихле для полупространства . . . . .	260

5.6. Метод интегральных преобразований . . . . .	265
Интегральные преобразования . . . . .	265
5.7. Примеры решения неоднородных задач с непрерывным спектром . . . . .	271
Задача Дирихле для полуполосы . . . . .	271
Задача об изгибе плиты . . . . .	273
5.8. Преобразование Лапласа . . . . .	275
Определение преобразования Лапласа . . . . .	275
Свойства преобразования Лапласа . . . . .	277
Обращение преобразования Лапласа . . . . .	281
5.9. Приложение преобразования Лапласа к задачам математической физики . . . . .	284
Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений . . . . .	284
Интегрирование дифференциальных уравнений в частных производных . . . . .	288
Построение метода преобразования Лапласа на случай большого числа независимых переменных . . . . .	290
Задача о продольных колебаниях стержня . . . . .	291
Вопросы к главе 5 . . . . .	294
Задачи с примерами решения . . . . .	295
Примеры решения типовых задач . . . . .	301
 <i>Глава 6</i>	
<b>Интегральные уравнения в математической физике . . . . .</b>	<b>335</b>
6.1. Основные классы интегральных уравнений . . . . .	335
6.2. Некоторые классы уравнений, допускающие явное решение при помощи специальных приемов . . . . .	339
Уравнения Вольтерры второго рода с ядром, зависящим от разности . . . . .	339
Уравнения Вольтерры первого рода с ядром, зависящим от разности . . . . .	342
Уравнение Абеля . . . . .	343
Уравнения Фредгольма с ядром, зависящим от разности и пределами от $-\infty$ до $+\infty$ . . . . .	345
Уравнения Фредгольма с ядрами, зависящими от суммы и произведения . . . . .	347
6.3. Интегральные уравнения Фредгольма с вырожденным ядром . . . .	349
Примеры . . . . .	352
6.4. Общее решение уравнения Вольтерры разложением в ряд по степеням параметра $\lambda$ . . . . .	356
6.5. Общее решение уравнения Фредгольма разложением в ряд по степеням параметра $\lambda$ . . . . .	360
Примеры . . . . .	361
Замечание о решении уравнения Фредгольма при произвольном значении параметра $\lambda$ . . . . .	363
Общее понятие резольвенты для уравнений Фредгольма . . . . .	364
6.6. Однородные уравнения Фредгольма . . . . .	365
Определение собственных значений и собственных функций для некоторых интегральных уравнений . . . . .	366
Альтернатива Фредгольма . . . . .	370

6.7. Интегральные уравнения Фредгольма с симметричным ядром . . . . .	371
Краткий обзор теории уравнений с симметричным ядром . . . . .	372
6.8. Приближенные методы решения интегральных уравнений . . . . .	373
Сведение интегрального уравнения к уравнению с вырожденным ядром . . . . .	373
Сведение интегрального уравнения к системе линейных алгебраических уравнений . . . . .	375
Метод последовательных приближений . . . . .	376
6.9. Приложения интегральных уравнений в математической физике . . . . .	377
Сведение задачи Штурма — Лиувилля к интегральному уравнению . . . . .	377
Сведение плоской задачи гидродинамики к интегральному уравнению Фредгольма . . . . .	380
Вопросы к главе 6 . . . . .	383
Задачи с примерами решения . . . . .	384
Примеры решения типовых задач . . . . .	388
Численное решение интегральных уравнений . . . . .	407

*Глава 7*

<b>Вариационные методы в математической физике . . . . .</b>	<b>416</b>
7.1. Некоторые понятия вариационного исчисления . . . . .	416
Необходимое условие экстремума для функционала, заданного определенным интегралом . . . . .	419
Пример. Решение задачи об изгибе балки . . . . .	420
Необходимое условие экстремума для функционала, заданного кратным интегралом . . . . .	422
Пример. Связь задачи Дирихле с вариационной задачей . . . . .	423
7.2. Некоторые вспомогательные понятия и формулы . . . . .	424
Скалярное произведение функций . . . . .	424
Понятие об операторе . . . . .	425
Симметричные операторы . . . . .	426
Положительные и положительно определенные операторы . . . . .	428
7.3. Прямые методы решения вариационных задач . . . . .	431
Теорема о минимальном функционале . . . . .	432
Минимизирующая последовательность и ее сходимость . . . . .	433
Метод Ритца . . . . .	434
Метод Бубнова — Галёркина . . . . .	435
Формулировки некоторых краевых задач . . . . .	436
О выборе базисных (координатных) функций . . . . .	442
7.4. Применения вариационного метода . . . . .	444
Задача о стационарном распределении температуры в брусе прямоугольного сечения . . . . .	444
Вывод уравнения колебаний струны . . . . .	446
7.5. Примеры решения задач в пакете Maple . . . . .	447
Простейшая вариационная задача. Конечно-разностный метод Эйлера . . . . .	447
Простейшая вариационная задача. Метод Ритца . . . . .	452
Задача Дирихле в прямоугольнике . . . . .	455
Изгиб тонких пластин . . . . .	457

Решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода методом Бубнова — Галёркина . . . . .	472
Вопросы к главе 7 . . . . .	476
Задачи для самостоятельного решения . . . . .	477
<i>Глава 8</i>	
<b>Численные методы решения задач математической физики . . . . .</b>	<b>481</b>
8.1. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача Коши . . . . .	481
Метод Эйлера . . . . .	481
Метод Рунге — Кутты . . . . .	491
8.2. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача . . . . .	494
Метод пристрелки . . . . .	494
Метод конечных разностей . . . . .	502
Формулы для приближенного вычисления производных от функции одной переменной . . . . .	502
Применение метода сеток для решения одномерных краевых задач . . . . .	508
8.3. Численное решение дифференциальных уравнений в частных производных. Метод сеток . . . . .	524
Формулы для приближенного вычисления производных от функции двух переменных . . . . .	524
Применение метода сеток для решения уравнения Пуассона в прямоугольнике . . . . .	526
Численное решение задач математической физики встроенными средствами Maple . . . . .	531
Задачи с примерами решения . . . . .	543
Примеры решения типовых задач . . . . .	545
<b>Приложение . . . . .</b>	<b>566</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>568</b>

*Дмитрий Петрович ГОЛОСКОКОВ*

## **КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТА MAPLE**

*Учебное пособие*

*Издание второе, исправленное*

Зав. редакцией  
физико-математической литературы *Н. Р. Нигмадзянова*  
Ответственный редактор *Н. В. Черезова*  
Технический редактор *Е. С. Крюков*  
Корректор *Т. А. Кошелева*  
Подготовка иллюстраций *А. П. Маркова*  
Верстка *Е. Е. Егорова*  
Выпускающие *Т. С. Симонова, О. В. Шилкова*

ЛР № 065466 от 21.10.97  
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10  
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

**Издательство «ЛАНЬ»**  
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com  
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.  
Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.  
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

### **ГДЕ КУПИТЬ**

#### **ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИЙ:**

*Для того, чтобы заказать необходимые Вам книги, достаточно обратиться в любую из торговых компаний Издательского Дома «ЛАНЬ»:*

**по России и зарубежью**  
«ЛАНЬ-ТРЕЙД». 192029, Санкт-Петербург, ул. Крупской, 13  
тел.: (812) 412-85-78, 412-14-45, 412-85-82; тел./факс: (812) 412-54-93  
e-mail: trade@lanbook.ru; ICQ: 446-869-967  
www.lanpbl.spb.ru/price.htm

**в Москве и в Московской области**  
«ЛАНЬ-ПРЕСС». 109263, Москва, 7-я ул. Текстильщиков, д. 6/19  
тел.: (499) 178-65-85; e-mail: lanpress@lanbook.ru

**в Краснодаре и в Краснодарском крае**  
«ЛАНЬ-ЮГ». 350901, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1  
тел.: (861) 274-10-35; e-mail: lankrd98@mail.ru

#### **ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:**

*интернет-магазины:*

**Издательство «Лань»:** <http://www.lanbook.com>  
«Сова»: <http://www.symplex.ru>; «Ozon.ru»: <http://www.ozon.ru>  
«Библион»: <http://www.biblion.ru>

Подписано в печать 24.07.15.  
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 70×100<sup>1/16</sup>.  
Печать офсетная. Усл. п. л. 46,80. Тираж 700 экз.

Заказ № .

Отпечатано в ОАО «Первая образцовая типография»,  
филиал «Чеховский Печатный Двор»  
в полном соответствии с качеством предоставленных материалов.  
142300, Московская обл., г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1.  
Тел.: (495) 988-63-76, факс: 8 (496) 726-54-10.